

Prak.: P1 Semester: WS20/21 Wochentag: Mo Gruppennr.: 15

Name: Schäfer Vorname: Marie

Name: Poppe Vorname: Tim

Emailadresse(n): _____

Versuch: e/m-Bestimmung (P1-72, 74, 75) Fehlerrech.: Nein

Betreuer: Elias Aufrecht Durchgeführt am: 10.01.202

Wird vom Betreuer ausgefüllt.

1. Abgabe am: _____

Rückgabe am: _____ Begründung:

2. Abgabe am: _____

Ergebnis: + / 0 / - Fehlerrechnung: Ja / Nein

Datum: _____ Handzeichen: _____

Bemerkungen:



Versuche P1-72, 74, 75: **Bestimmung von e/m des Elektrons**

Raum F1-14

Sie bestimmen bei diesem Versuch die spezifische Ladung des Elektrons nach zwei verschiedenen Methoden, von denen jede ihre besonderen Vor- und Nachteile hat. Der Versuch bietet Gelegenheit zur Beschäftigung mit der Bewegung geladener Teilchen in elektrischen und magnetischen Feldern, mit dem Magnetfeld stromdurchflossener Leiter und mit der Hallsonde als Meßgerät für Magnetfelder.

Hinweis: Es werden gefährliche elektrische Spannungen verwendet. Während des Aufbaus und während aller Veränderungen an den Schaltungen dürfen daher keine Geräte eingeschaltet sein. Bei jeder neuen Schaltung ist das erste Einschalten nur nach Kontrolle durch den Betreuer erlaubt.

Aufgaben:

1. e/m -Bestimmung mit dem Fadenstrahlrohr

1.1 Untersuchung des Feldes eines Helmholtzspulenpaars. Bauen Sie vor dem Plexiglkasten mit Helmholtzspulen und Fadenstrahlrohr die zusätzliche Helmholtzspule mit Meßplatte so auf, dass sich die Meßplatte in der Mittelebene zwischen zwei Spulen befindet. Die Anordnung gleicht der Spulenordnung, in der sich das Fadenstrahlrohr befindet. Die Spulen beiderseits der Meßplatte sind in Reihe zu schalten. Die Anschlüsse der betreffenden Spule im Plexiglkasten sind an extra Buchsen herausgeführt. Die Meßplatte kann an etlichen vorgesehenen Stellen die Hallsonde aufnehmen.

Messen Sie die Hallspannungen an den vorgesehenen Stellen für die Spulenströme 1,0; 1,5; und 2,0A.

Hinweis: Lassen Sie die Hallsonde nicht allzu lange eingeschaltet, damit sie nicht überhitzt. Dadurch vermeiden Sie eine temperaturabhängige Drift der Hallspannung.

1.2 Kalibrieren Sie die Hallsonde mit Hilfe des berechenbaren Feldes der langen Eichspule. Messen Sie etwa 10 Wertepaare (Hallspannung/Spulenstrom) und berechnen Sie daraus die Eichgerade $B(U_{\text{Hall}})$. Der Bereich der hier gemessenen Hallspannungen sollte zu den bei Aufgabe 1.1 gemessenen Werten passen.

1.3 Vergleichen Sie den gemessenen Wert des Mittenfeldes zwischen den Helmholtzspulen mit dem berechneten Wert. Überprüfen Sie die Feldhomogenität bei der vorliegenden Spulenordnung. Unter der Voraussetzung Spulenradius = Spulenabstand = R gilt für das Mittenfeld

$$B = 0,7155 \cdot \mu_0 \cdot n \cdot \frac{I}{R}$$

Dabei ist n die Windungszahl der Spule und I der Strom in der Spule.

1.4 Messen Sie den Durchmesser der Elektronenkreisbahnen im Fadenstrahlrohr

a) in Abhängigkeit der Anodenspannung (z.B. 100; 125; ... 250V) bei zwei Spulenströmen (z.B. 1A und 2A),
b) in Abhängigkeit vom Spulenstrom (z.B. 1,0; 1,2; ... 2,0A) bei zwei Anodenspannungen (125V und 250V).
Dabei ist die Zusatzspule wieder abgebaut. Fadenstrahlrohr und Spulen sind entsprechend Schaltung-1 angeschlossen. An den vorgesehenen Stellen sind die Sicherheitskabel zu benutzen. Die Durchmesserbestimmung erfolgt parallaxenfrei mittels verschieblicher Marken vor und eines Spiegels hinter dem Fadenstrahlrohr. Die Röhre muß in der Halterung so orientiert werden, daß sich Kreisbahnen und nicht Spiralen ergeben. Tragen Sie die Ergebnisse zur Kontrolle der theoretischen Abhängigkeiten zunächst in geeignete nach 1.4a und 1.4b getrennte Koordinatensysteme ein. Fassen Sie dann alle Ergebnisse in einem geeigneten Koordinatensystem zusammen und entnehmen Sie diesem den Wert von e/m .

2. e/m -Bestimmung nach der Methode von Busch

2.1 zur Vorbereitung: Die Oszillographenröhre innerhalb des Plexiglaszylinders und der beweglichen Magnetspule wird über das zugehörige Steuerpult mit allen notwendigen Spannungen versorgt. Die Deflektorspannung kann wahlweise mit einem der beiden Ablenkplattenpaare verbunden werden wobei beide Platten des unbenutzten Paares mit den Kurzschlussbrücken auf Massepotential gelegt werden müssen. Stellen Sie eine niedrige Beschleunigungsspannung (ca. 300V) ein. Wählen Sie bei abgeregeltem Magnetfeld die Deflektorspannung so, dass ein maximal langer Strich auf dem Schirm erscheint. Stellen Sie die Strahlintensität (Spannung an g_1) und den Fokus (Spannung an g_3) sinnvoll ein. Steigern Sie dann langsam

den Magnetspulenstrom und beobachten Sie die resultierende Bildveränderung. Diskutieren Sie deren Zustandekommen. Stellen Sie schließlich den Spulenstrom so ein, daß alle Elektronen den Schirm auf einem möglichst kleinen Fleck treffen. Versuchen Sie, einen höheren Spulenstrom einzustellen, bei dem abermals der Strich zu einem kleinen Fleck wird.

2.2 Messen Sie den für Einstellungen wie bei 2.1 nötigen Spulenstrom I für Beschleunigungsspannungen U von 200V bis 700V in 50V-Schritten. Tragen Sie U über I² auf und ermitteln Sie e/m aus der Geradensteigung. Bedenken Sie, daß die Spule nicht 'lang' und folglich $B \neq B_0 = \mu_0 \cdot I \cdot n/L$ ist. Sie müssen längs der Strecke vom Deflektorzentrum bis zum Leuchtschirm über folgende empirische Formel mitteln:

$$B = B_0 \cdot K = \left\{ \mu_0 I \frac{n}{L} \right\} \times \left\{ 0,567 \times \left(\frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} + \frac{L-a}{\sqrt{R^2 + (L-a)^2}} \right) \right\}$$

Dabei ist a der Abstand des Feldortes von einem Spulenende, L=0.2m die Länge der Spule und R=0.045m der mittlere Radius der Spulenwicklung (siehe Graphik-1). Der Korrekturfaktor K ist ein reiner Geometriefaktor und hängt vom gewählten Deflektorpaar ab.

Hinweise:

Vermeiden Sie eine hohe Leuchtdichte an der Oszillographenröhre, **damit der Schirm nicht einbrennt!**

Der mechanische Aufbau im Innern einer Oszillographenröhre ist nicht so perfekt, daß der Strahl die Schirmmitte treffen muss. Das ist kein Fehler am Gerät.

Für **ausführliche Fehlerrechnung** soll die Messung nicht nur mit dem Ablenkplattenpaar d₁, sondern auch mit dem Paar d₂ durchgeführt werden.

Zubehör:

Für beide Aufgabenteile:

Gleichstromnetzgerät für die Magnetfelder: - die Helmholtzspulen, die Eichspule bzw. die Zylinderspule; Multimeter zur Strommessung; mm-Maßstab; Taschenlampe;

Für die Messungen mit Fadenstrahlrohr:

Fadenstrahlrohr (Glühkathode mit indirekter Heizung, Wehneltzylinder, kegelförmige Anode, gefüllt mit Wasserstoffgas, ca. 0,013mbar);

Betriebsgerät für das Fadenstrahlrohr (0-300V= als Anodenspannung und -20-0V= als Wehneltspannung, wobei der Frontplattenschalter nach oben zeigen muß; außerdem 6,3V~ als Heizspannung)

Helmholtzspulenpaar (**max. 2A**) Windungszahl je n=130; mittl. Radius R = mittl. Spulenabstand 2a = 15cm; Spiegel und Schiebemarken zum parallaxenfreien Messen des Elektronenstrahl-Kreisdurchmessers, eingebaut in einem Plexiglastasten zur Vermeidung der Implosionsgefahr;

Zusätzlich eine einzelne Helmholtzspule auf Brett und mit Meßplatte (Bohrungen für die Hallsonde in 3cm-Abständen);

Hallsonde mit Betriebsgerät;

Millivoltmeter (Knick) für die Hallspannung, (Genauigkeit ±1% **Achtung:** Gebrauchslage beachten!);

Eichspule für die Hallsonde (**max. 0.8A**) (L=300mm; Ø=20mm; n=750 Windungen ±1%);

Für die Messungen nach Busch:

Oszillographenröhre (Typ DG7-32; Abstände der beiden Deflektorzentren d₁ und d₂ vom Leuchtschirm S:
d₁-S = (88±1)mm, d₂-S = (70±1)mm);

Betriebsgerät für die Oszillographenröhre (0 - 700V Beschleunigungsspannung, mit Intensität und Fokus);

Netzgerät für die Deflektorspannung (zum Einspeisen ins Betriebsgerät);

Zylinderspule (**max. 2A**) L = (200±0,5) mm, R = (45±0,5) mm; n = 3000 Windungen;

Abstand Spulenende zum Leuchtschirm = 50 mm (Magnet am Anschlag);

Literatur:

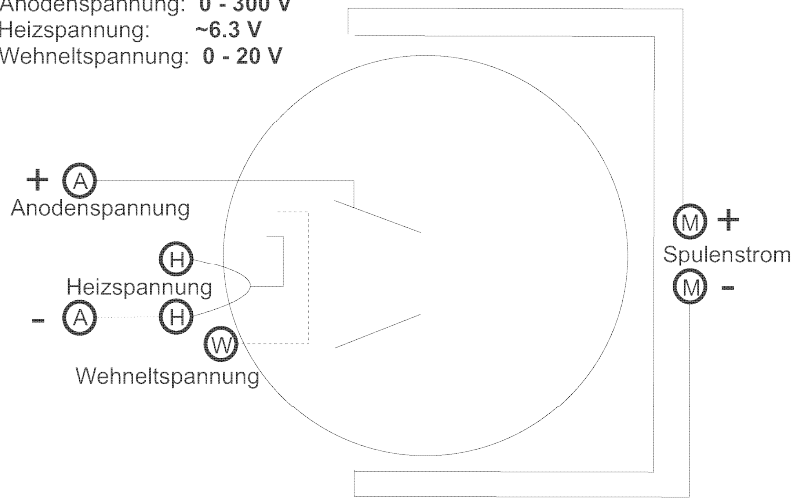
Schpolski: *Atomphysik*, Bd. 1

Bergmann, Schaefer: *Experimentalphysik*; Bd. 2

Gerthsen, Kneser, Vogel: *Physik*

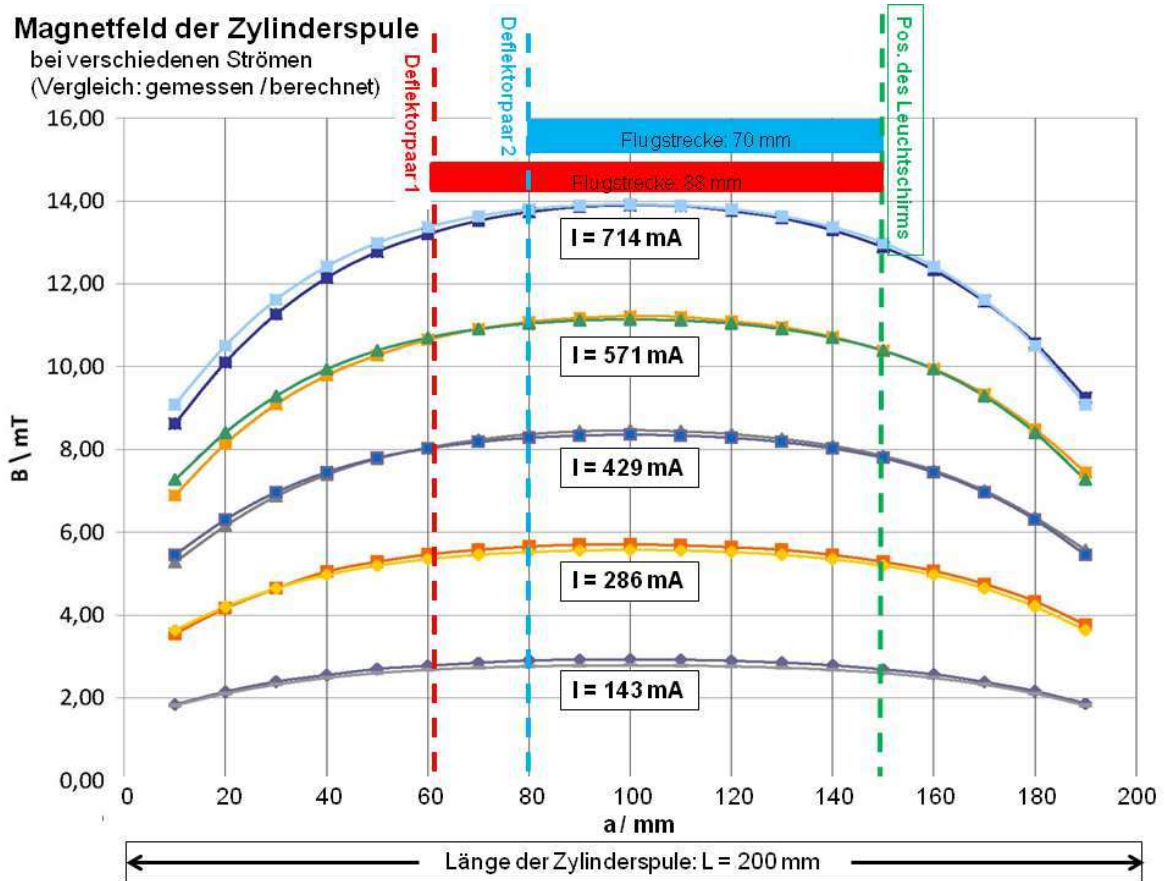
Walcher: *Praktikum der Physik*

Anodenspannung: 0 - 300 V
 Heizspannung: ~6.3 V
 Wehneltspannung: 0 - 20 V



----- Schaltung 1: Anschlüsse des Fadenstrahlrohrs (schematisch) -----

Magnetfeld der Zylinderspule
 bei verschiedenen Strömen
 (Vergleich: gemessen / berechnet)



Graphik-1: Lage der Flugstrecke im Feld der Zylinderspule beim Verfahren nach Busch

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Theorie | 6 |
| 1.1 | Spezifische Ladung $\frac{e}{m}$ | 6 |
| 1.2 | Lorentz-Kraft F_L und elektrische Kraft F_{el} | 6 |
| 1.3 | Hall-Effekt und -Sonde | 6 |
| 1.4 | Helmholtz-Spulenpaar | 8 |
| 1.5 | Durchmesser d einer e^- -Kreisbahn | 9 |
| 2 | Fadenstrahlrohr | 10 |
| 2.1 | Überprüfung der Feldhomogenität per Hall-Sonde | 10 |
| 2.2 | Kalibrieren der Hall-Sonde | 11 |
| 2.3 | Messung der Feldstärke | 12 |
| 2.4 | Messung des Elektronenbahndurchmessers | 13 |
| 3 | Methode von Busch | 18 |
| 3.1 | Aufbau und Funktionsweise | 18 |
| 3.2 | Versuchsvorbereitung | 19 |
| 3.3 | Messung der Spulenströme | 19 |
| 4 | Anhang | 22 |
| 4.1 | Sichtbarkeit des Elektronenstrahls in H_2 | 22 |

1 Theorie

1.1 Spezifische Ladung $\frac{e}{m}$

Ziel dieser Experimente ist die Untersuchung und Messung einer intrinsischen Eigenschaft des Elektrons, welche die spezifische Ladung $\frac{e}{m}$ ist. Unter dieser wird die Ladung Q des Elektrons, gegeben durch die Elementarladung e , eine Naturkonstante, geteilt durch die Masse $m = m_e$ des Elektrons verstanden.

1.2 Lorentz-Kraft F_L und elektrische Kraft F_{el}

Allgemein ist zu beobachten, dass, wenn sich eine Ladung q mit der Geschwindigkeit v durch ein magnetisches Feld (B-Feld) mit magnetischer Flussdichte B bewegt, eine Kraft auf diese Ladung wirkt, welche als Lorentzkraft F_L bekannt ist. Diese Kraft steht senkrecht auf sowohl der Bewegungsrichtung als auch zu den Feldlinien des magnetischen Feldes, sodass sich vektoriell ergibt, dass

$$\vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B}) . \quad (1)$$

Betrachtet man, dass sich die differentielle Ladung dQ als Strom I multipliziert mit der Zeit dt schreiben lässt, wobei die Geschwindigkeit $dv = \frac{ds}{dt}$, so gilt daraus differentiiell für die Lorentzkraft, dass

$$dF_L = \vec{B} I ds , \quad (2)$$

wobei dies als Kraft auf ein infinitesimales Stromelement in einem Magnetfeld zu interpretieren ist. Auch bei der Bewegung durch ein elektrisches Feld (E-Feld) der elektrischen Feldstärke E erfährt eine Ladung q eine elektrische Kraft F_{el} , welche entlang der Feldlinien des elektrischen Feldes wirkt, sodass hier gilt, dass

$$\vec{F}_{el} = q\vec{E} . \quad (3)$$

Nun ist es interessant, diese Kräfte unter der Einbindung des zweiten Newtonschen Gesetzes,

$$F = m\ddot{x} , \quad (4)$$

zu betrachten. Wird dieses mit der elektrischen oder der Lorentz-Kraft gleich, so ergibt sich für die durch die Kraft vorhandene Beschleunigung \ddot{x} , dass

$$\ddot{x} = \frac{q}{m} E \text{ bzw. } \ddot{x} = \frac{q}{m} vB . \quad (5)$$

Die spezifische Ladung $\frac{q}{m}$ eines Teilchens ist daher besonders relevant für die Proportionalität zwischen einer Feldstärke und der daraus auf das Teilchen resultierenden Beschleunigung.

1.3 Hall-Effekt und -Sonde

Um den Hall-Effekt zu verstehen, wird nun ein stromdurchflossener Quader betrachtet, wobei Kathode und Anode der Spannungsquelle an zwei gegenüberliegenden Enden befestigt sind. Nun bewegen sich aufgrund des anliegenden elektrischen Feldes Elektronen, welche negative Ladung tragen, von Kathode zu Anode. Wird dieser Versuchsaufbau nun in ein äußeres Magnetfeld mit Flussdichte B gebracht, so werden die sich mit Geschwindigkeit v bewegenden Elektronen durch die Lorentzkraft senkrecht zu ihrer Fließrichtung abgelenkt, sodass sich auf einer Seite des Quaders (von der Fließrichtung aus gesehen), deren Position von der Orientierung der magnetischen Feldlinien abhängt, ein Überschuss an negativer Ladung einstellt.

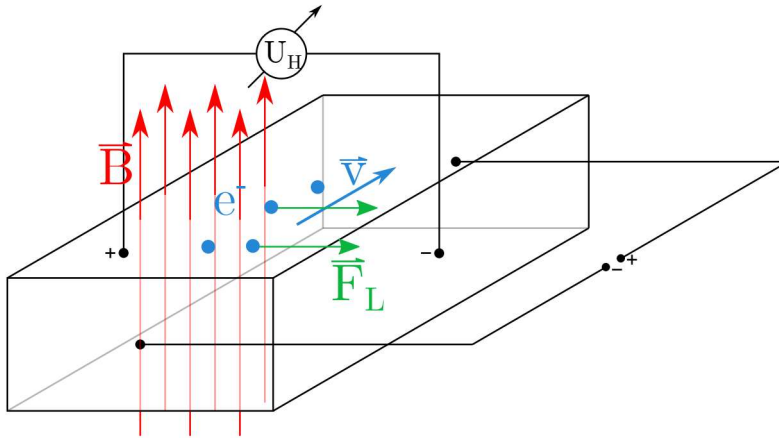


Abbildung 1: Schematische Darstellung des Hall-Effekts.

Dementsprechend entsteht ein senkrecht zur ursprünglichen Bewegungsrichtung und senkrecht zu den magnetischen Feldlinien ein elektrisches Feld E_H , welches so lange anwächst, bis die daraus resultierende elektrische Kraft die Lorentzkraft ablenkt. Aufgrund der unterschiedlichen Ladungsverteilung und des elektrischen Feldes E_H ist ersichtlich, dass eine Potentialdifferenz zwischen den beiden Seiten herrscht, somit ist dort nach anbringen eines Spannungsmessgeräts eine Spannung, die so genannte Hall-Spannung U_H zu messen, wobei das gesamte, zu dieser Spannung führende Phänomen als Hall-Effekt bekannt ist. Dieser Sachverhalt ist noch einmal in Abbildung 1 verbildlicht.

Dieser Effekt ermöglicht nun durch Messung der Hall-Spannung U_H die Flussdichte B des magnetischen Feldes mit Hilfe einer so genannten Hall-Sonde, welche äquivalent zu dem oben betrachteten Quader funktioniert. Im Folgenden wird nun die Herleitung der Relation zwischen Flussdichte und Hall-Spannung hergeleitet. Wie bereits oben erwähnt, wächst das elektrische Feld so lange, bis die daraus resultierende Kraft die Lorentz-Kraft kompensiert, es gilt daher das Kräftegleichgewicht

$$F_{el} = F_L \Leftrightarrow qE = qvB \Leftrightarrow B = \frac{E_H}{v} \quad (6)$$

für den Fall, dass das magnetische Feld orthogonal zu der einen Quaderseitenfläche steht. Da nun eine Seitenfläche positiv und eine Seitenfläche negativ geladen sind, entspricht dieser Sachverhalt exakt der Diskussion eines Plattenkondensators, sodass die daher bekannte Beziehung zwischen E-Feld E_H , Plattenabstand d und Spannung U_H , sodass folgt, dass

$$E_H = \frac{U_H}{d} \Rightarrow B = \frac{U_H}{vd} . \quad (7)$$

Bei der Geschwindigkeit v der Elektronen handelt es sich um deren so genannte Driftgeschwindigkeit, welche sich aus $j = qnv$ mit Stromdichte j und Ladungsdichte q ergibt. Gleichzeitig bezeichnet die Stromdichte jedoch auch den Strom I durch eine gewisse Fläche A , sodass gilt, dass

$$j = \frac{I}{A} = qnv \Leftrightarrow v = \frac{I}{qnA} . \quad (8)$$

Durch Einsetzen dieser Relation in Gleichung (7) ergibt sich schließlich, dass

$$B = \frac{qnA}{Id} U_H , \quad (9)$$

wobei hier A die Querschnittsfläche des Quaders bezeichnet. Somit ist, da diese Größen für eine Hall-Sonde bekannt sind, die Messung einer magnetischen Flussdichte möglich.

1.4 Helmholtz-Spulenpaar

Eine Möglichkeit der Messung der spezifischen Ladung ist die Verwendung eines Helmholtzspulenpaares. Eine Helmholtzspule bezeichnet eine Zylinderspule von geringer Länge, jedoch großem Durchmesser im Verhältnis zur Länge. Werden zwei Helmholtzspulen nah aneinander betrieben, so ist das magnetische Feld zwischen diesen nahezu homogen, jedoch ist nun eine exakte Formel zu extrahieren, welche auch Schwankungen mit einbezieht. Im Folgenden wird ein Versuchsaufbau betrachtet, in welchem das Spulenpaar den Abstand d hat und die z -Achse durch beide hindurch zeigt, wobei der Ursprung mittig zwischen beiden liegt.

Aus dem Biot-Savart-Gesetz lässt sich herleiten, dass das Magnetfeld einer kreisförmigen Spule mit Radius R und N Windungen entlang der z -Achse durch ihren Mittelpunkt, was der Symmetrieachse der Spule entspricht, dass

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 N I R^2}{2(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (10)$$

mit Strom I und magnetischer Feldkonstante μ_0 . Wird dies nun auf den oben beschriebenen Aufbau angewendet, so ist das Gesamtmagnetfeld die Summe aus einer Spule bei $z = -\frac{d}{2}$ und einer Spule bei $z = \frac{d}{2}$. Für das Magnetfeld $B_z(z)$ gilt daher mit Gleichung (10), dass

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 N I R^2}{2} \cdot \left[\frac{1}{\left(\left(z + \frac{d}{2}\right)^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\left(\left(z - \frac{d}{2}\right)^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right]. \quad (11)$$

Um diesen Term nun zu vereinfachen, wird Gleichung (11) in eine Taylorreihe um $z = 0$ bis zur zweiten Ordnung entwickelt, woraus folgt, dass

$$B_z(z) \approx \frac{\mu_0 N I R^2}{\left(\left(\frac{d}{2}\right)^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left[1 + \frac{3}{2} \frac{(d^2 - R^2)}{\left(\left(\frac{d}{2}\right)^2 + R^2\right)^2} z^2 + \frac{15}{8} \frac{\frac{d^4}{2} - 3d^2 R^2 + R^4}{\left(\left(\frac{d}{2}\right)^2 + R^2\right)^4} z^4 + \mathcal{O}(z^6) \right] \quad (12)$$

Nun sind die Spulen in der so genannten Helmholtz-Bedingung aufgebaut, welche bezeichnet, dass der Abstand d genau dem Radius R der Spulen entspricht. Wird diese Bedingung in Gleichung (12) eingesetzt, so folgt, dass

$$B_z(z) \approx \frac{\mu_0 N I R^2}{\left(\left(\frac{R}{2}\right)^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left[1 + \frac{3}{2} \frac{\overbrace{(R^2 - R^2)}{=0}}{\left(\left(\frac{R}{2}\right)^2 + R^2\right)^2} z^2 + \frac{15}{8} \frac{\overbrace{R^4 - 3R^2 R^2 + R^4}{=-\frac{3}{2}R^2}}{\left(\left(\frac{R}{2}\right)^2 + R^2\right)^4} z^4 \right]$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \mu_0 N I \frac{1}{R} \cdot \left[1 - \frac{144}{125} \frac{z^4}{R^4} \right]. \quad (13)$$

$$(14)$$

Diese Taylorentwicklung in Gleichung (13) zeigt somit, dass das Magnetfeld, entlang der z -Achse, um die Mitte nahezu homogen ist. Die später betrachteten Elektronenstrahlkreisbahnen, wie in Kapitel 2.4 erläutert, werden genau mittig zwischen beiden Spulen betrachtet, was der Position $z = 0$ entspricht. Für das Magnetfeld an dieser Position gilt daher, dass

$$B = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}} N \mu_0 I \frac{1}{R}. \quad (15)$$

1.5 Durchmesser d einer e^- -Kreisbahn

Die in Kapitel 1.2 eingeführte Lorentz-Kraft ermöglicht nun die Diskussion spezieller Sachverhalte. Generell ist hierfür wichtig, zu bedenken, dass die Lorentzkraft nur auf Komponenten einer Geschwindigkeit orthogonal zu den magnetischen Feldlinien wirkt. Passiert ein Teilchen de Ladung q nun ein Magnetfeld, dessen Feldlinien transversal zur Bewegungsrichtung \vec{v} stehen, so wirkt keine Lorentzkraft und das Teilchen passiert unbeeinflusst. Bewegt sich nun ein Teilchen jedoch longitudinal durch das Magnetfeld, beispielsweise, indem es orthogonal zur Symmetrieachse zweier Helmholtzspulen zwischen diese eintritt, so wirkt die F_L , orthogonal zum Geschwindigkeitsvektor \vec{v} . Daraus resultierend wird das Teilchen entlang der Lorentzkraft abgelenkt, wobei es sich auch dann orthogonal zu den Feldlinien bewegt, ersichtlicherweise bewirkt die Lorentzkraft daher eine kreisförmige Bewegung, sie entspricht somit einer Zentripetalkraft F_Z . Ist diese Kraft nun groß genug, dass der Radius r der Kreisbahn beobachtbar ist, so lässt sich eine Beziehung zwischen der spezifischen Ladung und der Geschwindigkeit wie folgt herleiten, wobei im Folgenden nun als Teilchen ein Elektron betrachtet wird, da dies auch Objekt der späteren Experimente ist.

Da, wie bereits diskutiert, die Lorentz-Kraft F_L als Zentripetalkraft F_Z wirkt, lassen sich beide Kräfte gleichsetzen, sodass gilt, dass

$$F_L = F_Z \Leftrightarrow evB = \frac{mv^2}{r} \stackrel{r=\frac{1}{2}d}{\Leftrightarrow} \frac{e}{m} = \frac{2v}{Bd} . \quad (16)$$

Unter der Annahme, dass die Elektronen ihre kinetische Energie E_{kin} gänzlich aus der Beschleunigung über eine Potentialdifferenz U erhalten haben, ergibt mit Gleichung (16) sich, dass

$$\frac{1}{2}mv^2 = eU \Leftrightarrow v^2 = 2U \frac{e}{m} . \quad (17)$$

Indem nun Gleichung (16) quadriert wird und dann v^2 durch Gleichung (17) eliminiert, folgt, dass

$$\frac{e^2}{m^2} = \frac{4}{B^2 d^2} 2U \frac{e}{m} \Leftrightarrow \frac{e}{m} = \frac{8U}{B^2 d^2} . \quad (18)$$

In Gleichung (18) ist nun noch das B -Feld zu eliminieren, indem dessen Taylor-Approximation aus Gleichung (15) eingesetzt wird, sodass letztendlich für die spezifische Ladung $\frac{e}{m}$ folgt, dass

$$\frac{e}{m} = \frac{125R^2}{8N^2\mu_0^2} \cdot \frac{U}{I^2 d^2} . \quad (19)$$

2 Fadenstrahlrohr

2.1 Überprüfung der Feldhomogenität per Hall-Sonde

Tabelle 1: Gemessene Werte der Hallspannung an den in Abbildung 2 dargestellten Positionen.

| Pos | U_{Hall} in mV | | |
|-----|-------------------------|---------|---------|
| | 0,996 A | 1,511 A | 2,011 A |
| 1 | 0,06 | 0,11 | 0,15 |
| 2 | 0,06 | 0,11 | 0,16 |
| 3 | 0,07 | 0,12 | 0,17 |
| 4 | 0,07 | 0,12 | 0,17 |
| 5 | 0,07 | 0,12 | 0,17 |
| 6 | 0,07 | 0,11 | 0,16 |
| 7 | 0,06 | 0,11 | 0,15 |
| 8 | 0,05 | 0,09 | 0,12 |
| 9 | 0,07 | 0,11 | 0,16 |
| 10 | 0,07 | 0,12 | 0,17 |
| 11 | 0,07 | 0,12 | 0,17 |
| 12 | 0,07 | 0,11 | 0,16 |

In einem ersten Versuch zur Bestimmung der spezifischen Ladung wird im Folgenden ein zwischen zwei Helmholtzspulen platziertes Fadenstrahlrohr verwendet. Vorher müssen jedoch das Helmholtzspulenpaar und sein Magnetfeld genauer untersucht werden. Hierzu wird außerhalb des bereits vorgefertigten Versuchsaufbaus eine einzelne Helmholtzspule platziert und so geschaltet, dass diese mit einer der Spulen aus dem fertigen Aufbau erneut ein Helmholtzspulenpaar bildet. Mittig zwischen den Spulen wird dann ein Holzbrett platziert, in dem in Form eines Kreuzes insgesamt zwölf Löcher vorhanden sind. Die Schnittstelle der Linien befindet sich im Mittelpunkt des Spulenrings. Schematisch ist dieser Aufbau in Abbildung 2 dargestellt.

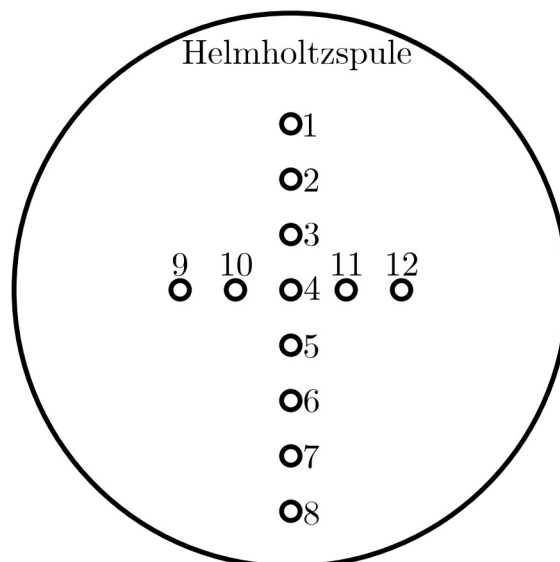


Abbildung 2: Schematische Darstellung der Positionen der Messpunkte.

Nun wird mithilfe einer Hallsonde, deren Funktionsweise im Kapitel 1.3 beschrieben ist, das Magnetfeld des Helmholtzspulenpaares quantitativ untersucht und auf ausreichende Homogenität geprüft. Hierzu wird die Hallsonde bei drei verschiedenen angelegten Spulenströmen (1 A, 1,5 A und 2 A) nacheinander in die Löcher der Holzplatte gesteckt und die gemessene Hallspannung notiert. Auf diese Weise werden die in Tabelle 1 gelisteten Messdaten erhalten. Es zeigt sich, dass die Abweichung der Hall-Spannung U_{Hall} nur sehr gering ist, sie nimmt von der Mitte (Position 4) weggehend ab, was auch den Erwartungen entspricht. Da diese Abweichungen jedoch sehr gering sind, ist das Feld durchaus als näherungsweise homogen zu betrachten.

2.2 Kalibrieren der Hall-Sonde

Nun soll die bereits verwendete Hallsonde mithilfe des berechenbaren Magnetfeldes einer langen Eichspule kalibriert werden. Hierzu wird die Hallsonde mittig in die Spule eingeführt, dann werden zehn Wertepaare von eingestelltem Spulenstrom I und gemessener Hallspannung U_{Hall} aufgenommen.

Tabelle 2: Gemessene Werte für U_{Hall} und I und die daraus berechneten Feldstärken B .

| U_{Hall} in mV | I in A | B in mT |
|-------------------------|----------|-----------|
| 0,12 | 0,394 | 1,238 |
| 0,13 | 0,437 | 1,373 |
| 0,15 | 0,477 | 1,499 |
| 0,16 | 0,507 | 1,593 |
| 0,18 | 0,543 | 1,706 |
| 0,19 | 0,583 | 1,832 |
| 0,20 | 0,620 | 1,948 |
| 0,22 | 0,659 | 2,070 |
| 0,24 | 0,707 | 2,221 |
| 0,25 | 0,743 | 2,334 |

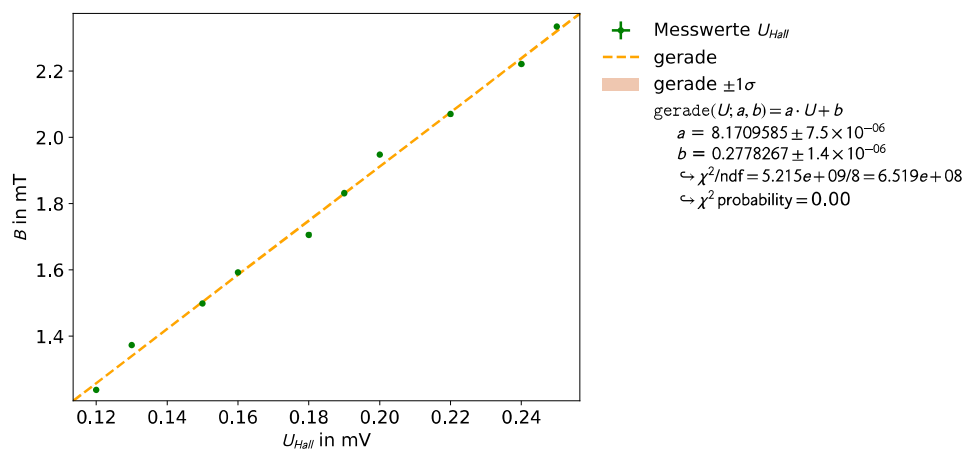


Abbildung 3: Anpassung der gemessenen Feldstärke B über die Hallspannung U_{Hall} .

Die Magnetfeldstärke der verwendeten Eichspule ist leicht mithilfe der Formel

$$B = \mu_0 \frac{N}{L} I \quad (20)$$

und den angegebenen Größen $N = 750$ und $L = 0,3 \text{ m}$ zu berechnen. Aus den gemessenen Werte, welche in Tabelle 2 aufgelistet sind, werden dann über Gleichung (20) die Feldstärken B berechnet. Um daraus die Eichgerade $B(U_{\text{Hall}})$ der Sonde zu bestimmen, wird die Python-Bibliothek *kafé2* verwendet, womit die in Abbildung 3 erhaltene Eichgerade erhalten wird. Bei dieser Auftragung lässt sich somit ein Proportionalitätsfaktor $B = p \cdot U$ bestimmen, der gerade der Steigung der Geraden im Diagramm entspricht. So lässt sich $p = 8,171 \text{ mT} \cdot \text{mV}^{-1}$ ablesen.

2.3 Messung der Feldstärke

Um jetzt eine Aussage über die Feldhomogenität treffen zu können, muss der gemessene Wert für das Mittenfeld mit dem noch zu berechnenden Wert für die Spule verglichen werden. Hierfür werden aus den in Tabelle 1 gelisteten Spannungen U_{Hall} über den im vorherigen Kapitel gemessenen Proportionalitätsfaktor p die Feldstärken B berechnet. Von diesen wird dann für jede der konstanten Stromstärken I der Mittelwert gebildet, die so erhaltenen Werte sind in Tabelle 3 gelistet. Um nun noch die gesuchten Werte für das Magnetfeld aus der Theorie heraus zu berechnen, ist die in Kapitel 1.4 hergeleitete Formel (15) zu verwenden:

$$B = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}} N \mu_0 \frac{I}{R} . \quad (21)$$

Mit $N = 130$ und $R = 0,15 \text{ m}$ der Helmholtzspulen lassen sich so die ebenfalls in Tabelle 3 dargelegten Werte berechnen. Um Theorie und Experiment zu vergleichen, sind in der Tabelle zusätzlich die Differenzen zwischen diesen Werten gegeben sowie deren relative Abweichungen zum Messwert. Es zeigt sich somit, dass der gemessene Wert stark von den theoretischen Werten abweicht. Es ist zu vermuten, dass dieser Fehler durch den Versuchsaufbau zustande kommt, welcher in Kapitel 2.1 erläutert wird. Durch das Hinzufügen der dritten, mit Messpunkten versehenen Spule ist kein Magnetfeld zweier, sondern das dreier Spueln vorhanden. Die zusätzliche Spule kann mit der einen des festen Versuchsaufbaus als Helmholtzspulenpaar betrachtet werden, jedoch ist dadurch die andere Spule des festen Versuchsaufbaus vorhanden, deren Magnetfeld am Messpunkt zwar schwächer, aber nicht null ist. Es könnte daher hier der Fall sein, dass die externe Spule andersherum von dem Strom I durchflossen wird als die Spulen des festen Versuchsaufbaus. Dies hätte zu Folge, dass die Magnetfelder jeweils entgegengesetzt orientiert sind. Somit würde sich die Magnetfelder der externen und der dieser nähergelegenen festen Spule gegenseitig aufheben und lediglich das Magnetfeld der dritten, weiter entfernten Spule würde registriert werden. Daher ist zu vermuten, dass genau dies hier der Fall war, da die Messergebnisse deutlich unter den aus der Theorie berechneten Werten lagen.

Tabelle 3: Aus den Messungen in Tabelle 1 und der Theorie berechnete Feldstärken inklusive deren Differenzen und relativen Abweichungen.

| I in A | B_{mess} in mT | B_{ber} in mT | ΔB in mT | ΔB_{rel} in % |
|----------|-------------------------|------------------------|------------------|------------------------------|
| 1 | 0,538 | 0,779 | 0,241 | 45,0 |
| 1,5 | 0,919 | 1,169 | 0,250 | 27,2 |
| 2 | 1,301 | 1,559 | 0,258 | 19,8 |

2.4 Messung des Elektronenbahndurchmessers

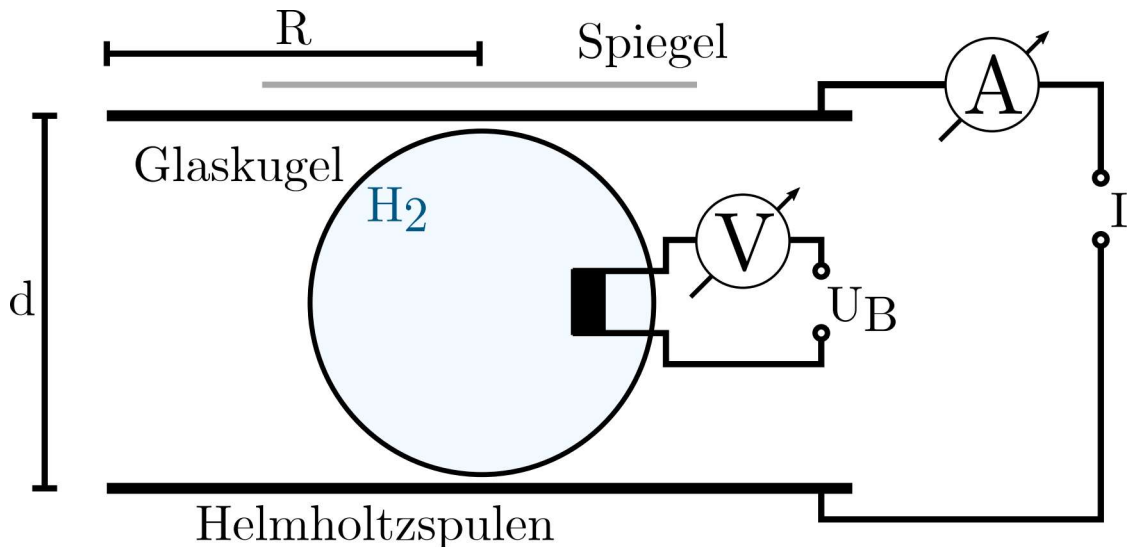
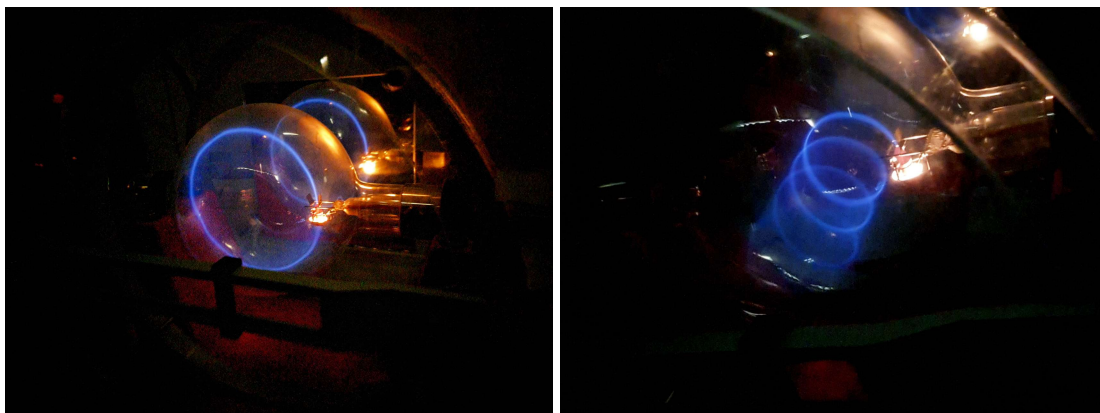


Abbildung 4: Schematischer Versuchsaufbau zum Fadenstrahlrohr.

Die Kenntnis, dass das Magnetfeld des Helmholtzspulenpaares nahezu homogen ist, ermöglicht nun, die spezifische Ladung zu messen. Hierfür wird ein Helmholtzspulenpaar verwendet, in dessen Mitte eine mit gasförmigem Wasserstoff (H_2) gefüllte Glaskugel platziert wird, welche auch als Fadenstrahlrohr bezeichnet wird. In dieser Glaskugel befindet sich am Rand zusätzlich eine Glühkathode, welche das Erzeugen eines Elektronenstrahls ermöglicht (siehe Kapitel 3.1). Hierbei können sowohl die Beschleunigungsspannung U_B der Elektronen, und somit deren kinetische Energie, als auch der durch das Spulenpaar fließende elektrische Strom I und somit die magnetische Feldstärke kontrolliert werden. Bei Austritt eines Elektronenstrahls kommt es gemäß Kapitel 1.5 durch die aufgrund des Magnetfelds wirkende Lorentzkraft F_L zu einer Kreisbewegung des Elektronenstrahls, dessen Durchmesser zu messen ist. Hierbei ist darauf zu achten, dass die Glühkathode parallel zu der Kreisfläche der Helmholtzspulen Elektronen emittiert, da ansonsten keine Kreisbahn, sondern eine Spiralbahn durchlaufen wird, wie in Abbildung 2.4 sichtbar. Da zur Messung des Kreisbahndurchmessers d kein Messschieber in die Glaskugel eingeführt werden kann, muss der Durchmesser per Augenmaß abgelesen werden. Hierfür ist hinter dem Spulenpaar parallel zur Kreisfläche ein ebener Spiegel angebracht (siehe Abbildung 2.4), ebenso ist vor dem Spulenpaar ein Messschieber mit zwei variablen Markierungen befestigt. Per Abgleich des Elektronenstrahls mit seinem Spiegelbild ist jede der beiden Messmarkierungen derartig auszurichten, dass sie auf einer Geraden mit Strahl und Spiegelbild liegen, so ist es möglich, Parallaxenfehler weitestgehend zu vermeiden. Mit beiden eingestellten Markierungen ist nun jeweils deren Abstand als d per Maßstab abzulesen. Hier sind nun Werte von d jeweils für zwei konstante Spulenströme mit variabler Beschleunigungsspannung U_B und zweimal für konstante U_B , während der Spulenstrom variiert wird, zu messen. Eine Skizze des Versuchsaufbaus ist in Abbildung 4 gegeben.



(a) Elektronenstrahl in Fadenstrahlrohr mit sichtbarem Spiegelbild dahinter. (b) Spiralbahn der Elektronen, wenn diese nicht parallel zum Spulenpaar austreten.

Tabelle 4: Gemessene Durchmesser d_1 für $I_1 = 1,018$ A und d_2 für $I_2 = 2,018$ A.

| U_B in V | d_1 in cm | U_B in V | d_2 in cm |
|------------|-------------|------------|-------------|
| 100,0 | 8,8 | 101,1 | 5,1 |
| 124,6 | 9,9 | 125,8 | 5,6 |
| 149,9 | 11,3 | 150,3 | 6,0 |
| 175,5 | 12,4 | 175,1 | 6,3 |
| 200,7 | 13,1 | 200,5 | 6,9 |
| 225,7 | 13,8 | 225,1 | 7,3 |
| 250,3 | 14,2 | 250,9 | 7,6 |

Tabelle 5: Gemessene Durchmesser d_1 für $U_1 = 150,2$ V und d_2 für $U_2 = 250,7$ V.

| I_1 in A | d_1 in cm | I_2 in A | d_2 in cm |
|------------|-------------|------------|-------------|
| 1,007 | 11,2 | 0,978 | 15,2 |
| 1,200 | 9,4 | 1,201 | 12,7 |
| 1,405 | 7,9 | 1,394 | 10,3 |
| 1,592 | 7,5 | 1,605 | 9,3 |
| 1,792 | 6,6 | 1,794 | 8,3 |
| 1,998 | 5,9 | 1,993 | 7,7 |

Durch Messung nach dem erläuterten Prinzip werden für konstanten Strom I die Messwerte in Tabelle 4 und für konstante Spannung U_B die Messwerte in Tabelle 5. Um nun die spezifische Ladung aus den Messdaten zu bestimmen, ist Gleichung (19) zu verwenden, indem diese für konstanten Strom oder konstante Spannung in eine zur linearen Regression geeignete Form umgestellt wird. Für konstante Stromstärke I lässt sich diese daher umstellen zu

$$U = \frac{e}{m} \frac{8N^2 \mu_0^2}{125R^2} I^2 d^2, \quad (22)$$

sodass die spezifische Ladung direkt aus der Geradensteigung ermittelt werden kann. Um den Fit zu erleichtern, wird ebenso eine Konstante $+c$ ergänzt, um einen Offset einzubringen.

Äquivalent ergibt sich für eine konstante Stromstärke aus Gleichung (22) der Zusammenhang

$$\frac{U}{I^2} = \frac{e}{m} \frac{8N^2 \mu_0^2}{125R^2} d^2. \quad (23)$$

Unter Verwendung der Python-Bibliothek *kafé2* werden per Anpassung mit Gleichung (22) die in Abbildung 5 dargestellte Gerade und mit Gleichung (23) die in Abbildung 6 dargestellte Gerade erhalten. Nun ist jeweils die spezifische Ladung aus diesen Steigungen a zu berechnen.

Für konstante Stromstärke I gilt daher, dass

$$a = \frac{e}{m} \frac{8N^2 \mu_0^2}{125R^2} \Leftrightarrow \frac{e}{m} = a \frac{125R^2}{8N^2 \mu_0^2}, \quad (24)$$

somit folgt für $I_1 = 1,018$ A mit den aus Quelle [5] entnommenen Werten $R = 0,15$ m und $N = 130$, dass

$$\frac{e}{m} = (11120,0 \pm 8,4) \frac{125(0,15)^2}{8(130)^2(1,2566 \cdot 10^{-6})^2} \text{C kg}^{-1} = (1,465 \pm 0,001) \cdot 10^{11} \text{C kg}^{-1}$$

und für $I_2=2,018$ A

$$\frac{e}{m} = (11301,6 \pm 8,6) \frac{125(0,15)^2}{8(130)^2(1,2566 \cdot 10^{-6})^2} \text{C kg}^{-1} = (1,489 \pm 0,001) \cdot 10^{11} \text{C kg}^{-1}.$$

Für konstante Spannungen U wird, da die Steigungen a hier der gleichen Formel folgen, für $U_1 = 150,2$ V der Wert

$$\frac{e}{m} = (12356 \pm 13) \frac{125(0,15)^2}{8(130)^2(1,2566 \cdot 10^{-6})^2} \text{C kg}^{-1} = (1,628 \pm 0,002) \cdot 10^{11} \text{C kg}^{-1}$$

und für $U_2 = 250,7$ der Wert

$$\frac{e}{m} = (11245,7 \pm 6,8) \frac{125(0,15)^2}{8(130)^2(1,2566 \cdot 10^{-6})^2} \text{C kg}^{-1} = (1,481 \pm 0,001) \cdot 10^{11} \text{C kg}^{-1}$$

erhalten.

Anstatt nur alle Messreihen einzeln zu betrachten, ist nun auch zu bedenken, dass alle Messdaten dem in Gleichung (19) dargestellten Zusammenhang folgen. Diese Gleichung lässt sich nun derartig umstellen, dass folgendes gilt:

$$\frac{e}{m} = \overbrace{\frac{125R^2}{8N^2 \mu_0^2}}{=:k} \cdot \frac{U}{I^2 d^2} \Leftrightarrow k \cdot d^2 = \frac{e}{m} \cdot \frac{I^2}{U} \quad (25)$$

Dementsprechend ist es möglich, einen weiteren Wert für die spezifische Ladung $\frac{e}{m}$ zu erhalten, indem für jede Messreihe jeweils $\frac{I^2}{U}$ und $\frac{k}{d^2}$ berechnet werden. Diese Werte werden dann mithilfe von *kafé2* an eine Gerade angepasst, deren Steigung gemäß Gleichung (25) genau der spezifischen Ladung entspricht. Die auf diese Weise durchgeführte Anpassung ist in Abbildung 7 dargestellt, dieser ist als Steigung die spezifische Ladung als

$$\frac{e}{m} = 1,2994 \pm 0,0002 \text{C kg}^{-1}$$

zu entnehmen.

Um all diese Werte nun interpretieren zu können, sind die Messergebnisse mit Literaturwerten zu vergleichen. Hierbei ist anzumerken, dass hier der Betrag der spezifischen Ladung gemessen wurde, denn der tatsächliche Wert ist, da das Elektron die Ladung $q = -e$ trägt, negativ. Indem aus Quelle [2] die Elementarladung e und die Ruhemasse des Elektrons m_e entnommen werden, lässt sich der Literaturwert der spezifischen Ladung berechnen zu

$$\frac{e}{m_{\text{Lit}}} = \frac{1,60217646 \cdot 10^{-19}}{9,1093819 \cdot 10^{-31}} \text{ C kg}^{-1} \approx 1,758820 \cdot 10^{11} \text{ C kg}^{-1} .$$

Im Vergleich zeigt sich daher, dass der Wert für $U_1 = 150,2 \text{ V}$ mit einer relativen Abweichung von 8% am nächsten am Literaturwert liegt. Die anderen Werte hingegen liegen alle ähnlich weit entfernt, so weicht der Wert für I_1 um 20,1%, der Wert für I_2 um 18,1% und der Wert für U_2 um 18,8% ab. Für die Anpassung aller Messwerte in einem Diagramm ergibt sich eine relative Abweichung von 35,4%, welche, besonders im Vergleich zu den Anpassungen der einzelnen Messreihen, groß ist. Dies könnte daran liegen, dass hier die Unsicherheiten aller Messreihen einen Einfluss auf das Ergebnis haben. So kann es sein, dass während einer Messreihe beispielsweise der eigentlich konstante Strom leicht variierte, was jedoch, da er hier quadratisch eingeht, einen großen Unterschied machen würde und die Datenanpassung letztendlich erschwert. Generell sind bei allen Messreihen die relativ hohen Abweichungen mit dem nicht sehr exakten Versuchsaufbau zu erklären. Einerseits sind die erhaltenen Werte für d ungenau, da diese nur nach Augenmaß bestimmt wurden und Parallaxefehler auch mit der Verwendung des Spiegels nicht verhindert werden können. Außerdem ist der Elektronenstrahl nicht von scharfer Kontur, sondern von seinem Mittelpunkt wegschreitend verblassend, sodass die Bestimmung, wo genau der Kreis gewählt wird, ebenfalls schwierig ist.

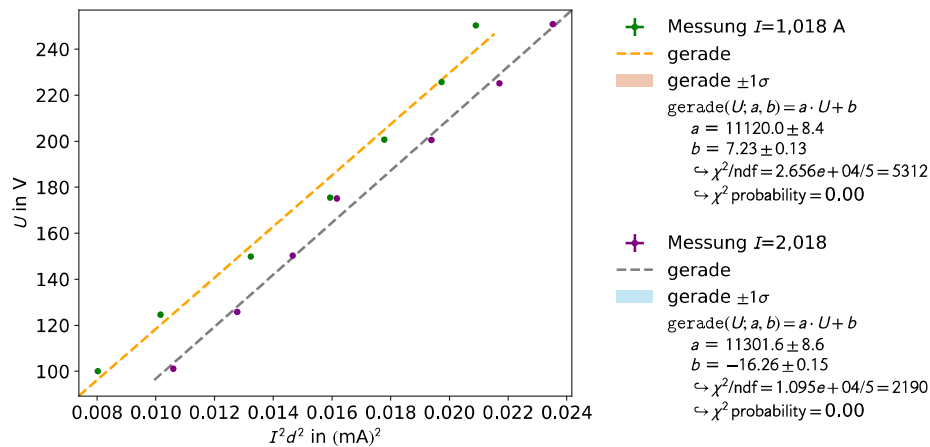


Abbildung 5: Anpassung der Messdaten aus Tabelle 4 in *kaf2* bei konstantem Strom I .

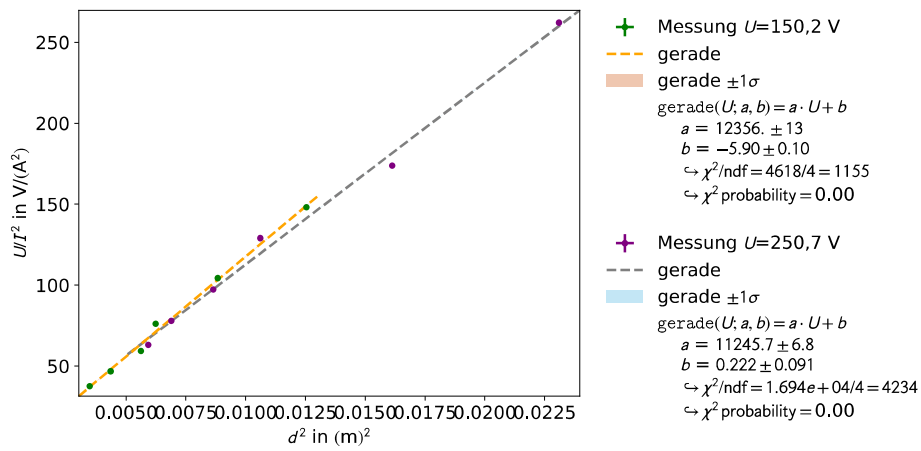


Abbildung 6: Anpassung der Messdaten aus Tabelle 5 in *kafe2* bei konstanter Spannung U .

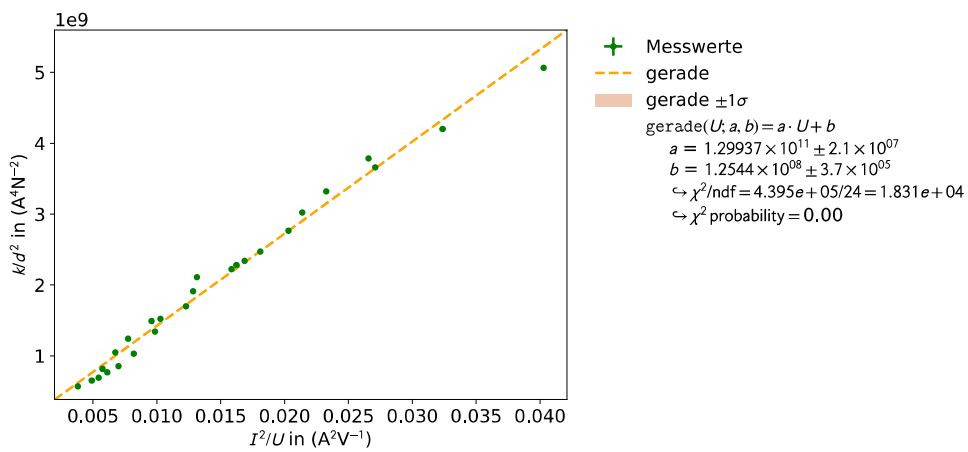


Abbildung 7: Anpassung aller Messdaten aus den Tabellen 4 und 5 in *kafe2* über den in Gleichung (25) dargestellten Zusammenhang.

3 Methode von Busch

3.1 Aufbau und Funktionsweise

Im Folgenden soll erneut die spezifische Ladung von Elektronen bestimmt werden. Diesmal wird dafür die Methode von Busch angewandt. Hierzu wird eine von einem Plexiglaszylinder umhüllte Oszillosgraphenröhre innerhalb einer Magnetspule gebracht, wie in Abbildung 8 zu sehen ist. Die Röhre beinhaltet eine Kathode K, vier Elektroden g_1, g_2, g_3 und g_4 sowie ein Paar Ablenkplatten P_1, P_2 .

Zwischen der Kathode und Elektrode g_2 liegt eine variable Beschleunigungsspannung an, die die Glühelktronen, die aus der Kathode gelöst werden, für den Flug durch die Röhre beschleunigt. Vor dem Erreichen von g_2 passieren die Elektronen die Elektrode g_1 , die einen Wehneltzylinder darstellt, der den Elektronenstrahl konzentriert. Durch Veränderung der Spannung an g_1 lässt sich also die Strahlintensität variieren. Nach Durchlaufen von g_2 erreichen die Elektronen Elektrode g_3 . Die drei Elektroden g_2, g_3 und g_4 bilden ein elektronenoptisches Linsensystem, wodurch es möglich ist, durch Anpassen der Spannung an g_3 den Elektronenstrahl zu fokussieren.

Hinter den Elektroden folgt das Ablenkplattenpaar, welches mit einer Deflektorspannung versorgt wird. Hier werden die Elektronen, wie der Name bereits vermuten lässt, durch das elektrische Feld innerhalb dieses Kondensators von ihrer gerade Flugbahn um einen Winkel θ abgelenkt. Dieser Winkel schwankt im Takt der angelegten Wechselspannung zwischen seinen Extremwerten $\pm\theta_{\max}$, wodurch auf dem Leuchtschirm am Ende der Röhre aus dem vorherigen Leuchtfleck ein Strich wird. Wird nun das Magnetfeld der Spule eingeschaltet, so werden die Elektronen aufgrund der auftretenden Lorentzkraft senkrecht abgelenkt. Der Strich auf dem Leuchtschirm wird dadurch verdreht und verkleinert, abhängig vom eingestellten Spulenstrom.

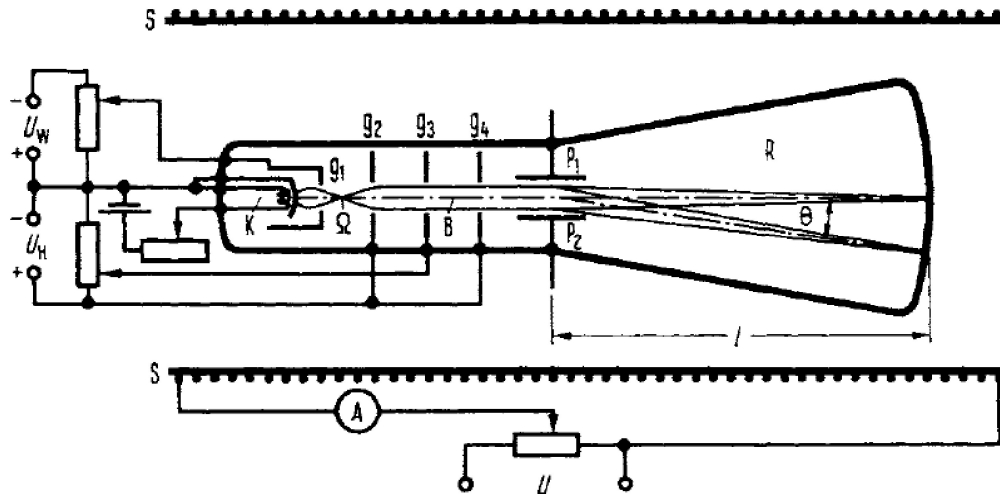


Abbildung 8: Versuchsaufbau nach der Methode von Busch. [8]

3.2 Versuchsvorbereitung

Bevor die eigentliche Messung begonnen werden kann, soll zum besseren Verständnis das Verhalten des Strichs auf dem Leuchtschirm qualitativ untersucht werden. So wird der Spulenstrom langsam hochgeregelt und die dadurch bedingte Bildveränderung beobachtet. Hier soll der Strom so eingestellt werden, dass auf dem Schirm ein möglichst kleiner Leuchtfleck zu sehen ist. Während des Hochdrehens ist zu erkennen, dass sich der Strich zuerst dreht und dabei kleiner wird, und er sich dann nach Durchlaufen seines Minimums, in dem idealerweise nur noch ein Punkt zu sehen ist, weiterdreht und dabei wieder vergrößert. Das Zusammenlaufen des Striches lässt sich darauf zurückführen, dass bei einer bestimmten Magnetfeldstärke die Lorentzkraft und damit die Zentripetalkraft, die die Elektronen auf eine Spiralbahn zwingt, genau so groß, dass die Elektronen beim Aufprall auf den Leuchtschirm gerade eine komplette Kreisbahn durchlaufen haben und somit alle idealerweise im selben Punkt aufkommen.

3.3 Messung der Spulenströme

Für die tatsächliche Messung wird nun die Beschleunigungsspannung U in 50 V Schritten von 200 V auf 700 V erhöht. Bei jeder eingestellten Spannung wird der Spulenstrom wie im vorherigen Kapitel besprochen so angepasst, dass möglichst nur noch ein Punkt auf dem Leuchtschirm zu sehen ist. Um aus diesen beiden Größen letztendlich die spezifische Ladung der Elektronen bestimmen zu können, werden noch einige Formeln benötigt.

Zuerst ist die Bewegung in Richtung der Beschleunigungsspannung zu betrachten, im Folgenden als x-Richtung festgelegt. Hier werden die Elektronen durch die Beschleunigungsspannung auf ihre endgültige Geschwindigkeit gebracht. Aus der Energieerhaltung ergibt sich somit

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= E_{\text{pot}} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_x &= eU \\ \Leftrightarrow v_x &= \frac{2eU}{m} , \end{aligned}$$

wobei m die Masse eines Elektrons und e die Elementarladung ist.

Damit die Elektronen eine Spirale durchlaufen, muss eine Kreisbahn durchlaufen werden, die durch die vom Spulenmagnetfeld bedingte Lorentzkraft senkrecht zur vorherigen Bewegungsrichtung entsteht. Es gilt also für die senkrechte Geschwindigkeit v_s

$$\begin{aligned} F_L &= F_Z \\ \Leftrightarrow ev_s B &= \frac{mv_s^2}{r} \\ \Leftrightarrow \frac{v_s}{r} &= \frac{e}{m} B = \omega \end{aligned}$$

mit r als Radius der Kreisbahn und ω als Kreisfrequenz der Bewegung. Somit gilt für die Periodendauer der Kreisbewegung

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{eB} . \quad (26)$$

Mit dieser Information ist ersichtlich, weshalb die Einstellung des Strichs auf dem Leuchtschirm zu einem Punkt relevant ist. Da so die Elektronen eine komplette Umdrehung auf der Kreisbahn vollzogen haben, muss die Periodendauer T auch der Zeit entsprechen, welche die Elektronen benötigen, um in x-Richtung den Leuchtschirm zu erreichen.

Tabelle 6: Gemessene Spulenströme bei unterschiedlichen Beschleunigungsspannungen.

| U in V | I in A | I^2 in A ² |
|----------|----------|-------------------------|
| 200 | 0,216 | 0,046 |
| 250 | 0,246 | 0,061 |
| 300 | 0,267 | 0,071 |
| 350 | 0,296 | 0,088 |
| 400 | 0,309 | 0,095 |
| 450 | 0,335 | 0,112 |
| 500 | 0,350 | 0,122 |
| 550 | 0,367 | 0,135 |
| 600 | 0,379 | 0,144 |
| 650 | 0,400 | 0,160 |
| 700 | 0,419 | 0,176 |

Also gilt

$$T = \frac{s}{v_x}, \quad (27)$$

wobei $s = 0,07$ m die Strecke zwischen Ablenkplatten und Leuchtschirm darstellt. Mit Gleichungen (26) und (27) ergibt sich also insgesamt

$$T = \frac{s}{v_x} = \frac{2\pi m}{eB} \quad (28)$$

$$\Rightarrow \frac{e}{m} = \frac{8\pi^2 U}{B^2 s^2}. \quad (29)$$

Jetzt ist noch ein Ausdruck für B zu finden und dann kann die spezifische Ladung berechnet werden. Da es sich bei der Spule allerdings nicht um eine ausreichend „lange“ Spule handelt, kann die Formel $B = B_0 = \mu_0 I \frac{n}{L}$ nicht angewendet werden. Deswegen ist in diesem Fall die empirische Formel

$$B = B_0 \cdot K = \left(\mu_0 I \frac{n}{L} \right) \cdot \left(0,567 \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} + \frac{L - a}{\sqrt{R^2 + (L - a)^2}} \right) \right), \quad (30)$$

wobei $L = 0,2$ m die Länge der Spule, $R = 0,045$ m der mittlere Radius der Spulenwicklung und a der Abstand zwischen Feldort und einem Spulenende sind. So ergibt sich also eine Ortsabhängigkeit der magnetischen Flussdichte. Da jedoch die gesamte Ablenkung bis zum Schirm relevant ist, wird die obige Formel über a in den Grenzen der verwendeten Ablenkplatten, $0,08$ m und $0,15$ m, integriert und damit gemittelt. Aus Gleichung (30) lässt sich also Folgendes berechnen:

$$B = \mu_0 I \frac{n}{L} \cdot K = I \cdot W$$

mit W als gemittelten Faktor, der sich zu Folgendem ergibt:

$$\begin{aligned} W &= \mu_0 \frac{n}{L} \cdot \frac{1}{0,15 - 0,08} \cdot \int_{0,08}^{0,15} da \left(0,567 \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} + \frac{L - a}{\sqrt{R^2 + (L - a)^2}} \right) \right) \\ &= \mu_0 \frac{n}{L} \cdot \frac{1}{0,15 - 0,08} \cdot 0,567 \cdot \left[\sqrt{R^2 + (L - a)^2} - \sqrt{R^2 + a^2} \right]_{0,08}^{0,15} \\ &= 0,01919 \text{ TA}^{-1}. \end{aligned}$$

Die Windungszahl n der Spule beträgt hier 3000. Damit ergibt sich für die gemittelte Flussdichte mit Gleichung (29) zu

$$\bar{B}^2 = I^2 \cdot W^2 = \frac{8\pi^2 m}{e s^2} \cdot U. \quad (31)$$

Werden nun die eingestellten U über I^2 (siehe Tabelle 6) aufgetragen, so lässt sich mithilfe der Steigung w des linearen Fits die spezifische Ladung bestimmen.

$$w = \frac{8\pi^2 m}{es^2 W^2} \quad (32)$$

$$\Rightarrow \frac{e}{m} = \frac{8\pi^2}{ws^2 W^2} . \quad (33)$$

Wie in Abbildung 9 abzulesen, ergibt sich aus den Messwerten für die Steigung $w = 252 \cdot 10^{-6} \text{ A}^2\text{V}^{-1}$. Somit berechnet sich die spezifische Ladung von Elektronen zu

$$\frac{e}{m} = 1,736 \cdot 10^{11} \text{ Ckg}^{-1} . \quad (34)$$

Im Vergleich zum Literaturwert (entnommen aus [7]) $\frac{e}{m}_{\text{Lit}} = 1,759 \cdot 10^{11} \text{ Ckg}^{-1}$ weicht der berechnete Wert um 1,31 % davon ab, was auf eine relativ genaue Messung hinweist. Die kleine Abweichung ist nichtsdestotrotz auf geringe Messfehler zurückzuführen, wie eine gewisse Ungenauigkeit beim Einstellen eines Leuchtflecks auf dem Schirm, da nie wirklich ein einziger, konzentrierter Punkt zu sehen war, sondern nur näherungsweise ein Punkt.

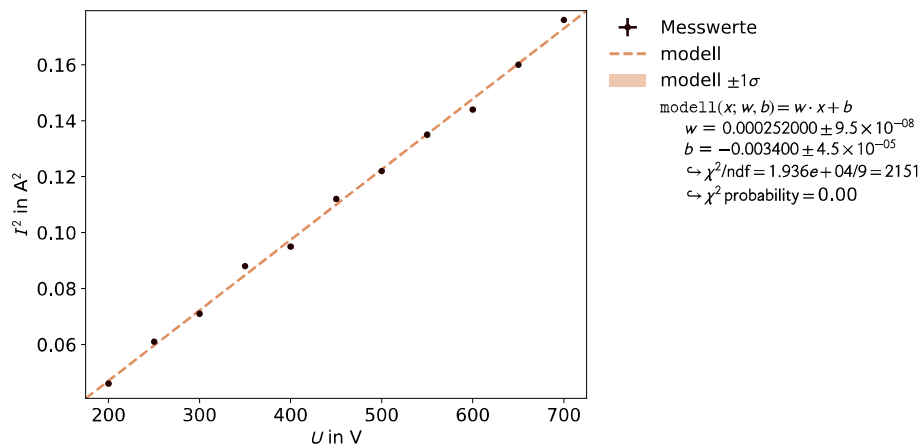


Abbildung 9: Anpassung der Messdaten aus Tabelle 6 in *kaf2*.

4 Anhang

4.1 Sichtbarkeit des Elektronenstrahls in H_2

Exxentiell für die Durchführung des Helmholtzspulenversuchs ist die Sichtbarkeit des Elektronenstrahls in Wasserstoff. Im Folgenden soll erläutert werden, wie sich die beobachtete bläuliche Lichtemission des Wasserstoffs (sichtbar in Abbildung 2.4) quantenmechanisch erklären lässt. Grundlegend kann mit einer klassischen Betrachtung der Interaktion der beschleunigten Elektronen mit den Wasserstoffatomen begonnen werden. Während ihrer Trajektorie im Fadenstrahlrohr stoßen die Elektronen mit Wasserstoffatomen, sodass ein Energieübertrag von Elektronen auf Wasserstoffatome stattfindet. Diese Atome sind daher nach dem Stoß in einem energetisch angeregten Zustand und geben diese Energie wieder ab in Form elektromagnetischer Strahlung, deren Wellenlänge λ innerhalb des sichtbaren Spektrums liegt. Dieser Effekt lässt sich nun genauer durch Quantenmechanik auf subatomarer Ebene beschreiben, wobei hierfür betrachtet werden muss, dass sich das Elektron des Wasserstoffs in so genannten Orbitalen aufhält. Jedes Orbital entspricht einem bestimmten Energieniveau, so ist die energetische Anregung des Wasserstoffatoms als ein Übergang dessen Elektrons auf ein höheres Energieniveau, also ein energetisch höheres Orbital, zu verstehen. Um diese Energieniveaus genauer zu beschreiben, ist die Schrödinger-Gleichung

$$\hat{H}\Psi = E\Psi \quad (35)$$

für das Wasserstoffatom zu lösen, wofür zunächst mehrere Näherungen vorzunehmen sind. Zum einen ist anzunehmen, dass die Bewegung des Elektrons um das Proton viel schneller ist als die Bewegung des Protons und das Proton, der Kern des H-Atoms, daher vernachlässigt werden kann, ebenso soll das H-Atom zur Rechnung als stationär betrachtet werden. Nun ist der Hamilton-Operator \hat{H} zu spezifizieren, welcher in der Form

$$\hat{H} = -\frac{\hbar}{2m_e}\nabla_e^2 + V_e(r) \quad (36)$$

geschrieben werden kann. Für das Potential $V_e(r)$ wird ein Coulomb-Potential angesetzt, sodass

$$V_e(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \stackrel{Z=1}{=} -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (37)$$

ist, da die Kernladungszahl Z für Wasserstoff 1 beträgt. Die hier stationäre Schrödingergleichung lautet somit

$$\left[-\frac{\hbar}{2m_e}\nabla_e^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right] \Psi = E\Psi . \quad (38)$$

Nun lässt sich, da der stationäre Fall betrachtet wird, die Wellenfunktion Ψ in einen Radialteil $A(r)$, welcher nur von dem Abstand von Elektron und Proton abhängt, und in einen winkelabhängigen Teil $Y(\vartheta, \varphi)$ zerlegen. Das Problem ist somit in Kugelkoordinaten zu lösen, wobei alle radiusunabhängigen Teile des Nabla-Operators auf $Y(\vartheta, \varphi)$ wirkend ein Problem äquivalent eines starren Rotators darstellen, dessen Lösung über Kugelflächenfunktionen zu erhalten ist (dies wird hier nicht explizit gezeigt). Weitere Rechnungen, welche den Radialteil unter anderem in die Form einer assoziierte Laguerre-Differentialgleichung überführen, führen letztendlich zu einer Lösung für die Energie E , welche

$$E = -\frac{Z^2}{n^2} \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0 h^2} \text{ mit } n \in \mathbb{N} \quad (39)$$

lautet. Hierbei ist n die so genannte Hauptquantenzahl, welche das Energieniveau des Elektrons definiert, des weiteren ist die Energie bezüglich n entartet.. Eine Aufspaltung der Energiezustände und damit der emittierten Strahlung ist derart gering, dass sie hier vernachlässigt werden kann. Der hier erhaltene Ausdruck für die Energie ermöglicht nun jedoch die Diskussion der beobachteten Emission:

Tabelle 7: Wellenlängen der sichtbaren Emissionen des Wasserstoffs für die Balmer-Serie mit $m = 2$.

| n | λ in nm | Farbe |
|---|-----------------|--------------|
| 3 | 656 | Rot |
| 4 | 486 | Türkis |
| 5 | 434 | Blau |
| 6 | 410 | Blau |
| 7 | 397 | Ultraviolett |

Bei Stößen zwischen Elektronen und Wasserstoffatomen werden die Elektronen des Wasserstoffs auf ein höheres Energieniveau gehoben, welches durch eine Erhöhung ihrer Hauptquantenzahl n beschrieben wird. Geht dieses angeregte Elektron des Wasserstoffs nun wieder in einen Zustand niedrigerer Energie über, so nimmt die Hauptquantenzahl n ab, daher lässt sich die Wellenlänge des emittierten Lichts aus der Differenz der beiden Energieniveaus berechnen. Bezeichne nun m den Zustand niedrigerer und n den Zustand höherer Energie, so gilt:

$$\Delta E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \quad (40)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 c h^3} \left[\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right]. \quad (41)$$

Hierbei werden verschiedene Energieübergänge nach ihrem Endzustand m kategorisiert, wobei die Übergänge für $m = 1$ als Lyman-, für $m = 2$ als Balmer- und für $m = 3$ als Paschen-Serie bezeichnet werden. Über Gleichung (40) lassen sich nun die Wellenlängen für bestimmte Übergänge berechnen, wobei, da hier der reziproke Wert der Wellenlänge betrachtet wird, die Wellenlänge mit m zu und die Energie des abgestrahlten Photons daher abnimmt. Von all diesen Serien wird hier nun lediglich die Balmer-Serie mit $m = 2$ betrachtet, da nur für diese die emittierten Photonen Wellenlängen innerhalb des sichtbaren Spektrums besitzen. Es folgt daher nach Rechnung mit Gleichung (40), dass für die unteren Übergänge die in Tabelle 7 aufgelisteten Emissionen zu sehen sind. Diese Werte zeigen, weshalb der Elektronenstrahl im Fadenstrahlrohr bläulich leuchtet: Die durch ihn angeregte Emission besteht aus einem als rot und mehreren als blau erscheinenden Photonen, deren Vermischung letztendlich die beobachtete Farbe hervorbringt.

Literatur

- [1] Wolfgang Demtröder: Experimentalphysik 2, 7. Auflage, 2017, Springer Spektrum
- [2] Gerthsen Physik, Dieter Meschede, Springer Berlin, 4. Auflage
- [3] Wolfgang Demtröder: Experimentalphysik 1, 8. Auflage, 2018, Springer Spektrum
- [4] Vorlesung Physikalische Chemie II, SoSe 2021
- [5] <http://etpwww.etp.kit.edu/~simonis/praktikum/p1/p1-versuchsanleitungen/EdurchM-Bestimmung.pdf>
- [6] <http://cms-ka.fzk.de/praktikum-restricted/Physiker-Literatur/P1/Lit-EdurchM-Bestimmung.pdf>
- [7] https://de.wikipedia.org/wiki/Spezifische_Ladung
- [8] Wilhelm Walcher: Praktikum der Physik, 9. Auflage, 1985, Teubner Studienbücher Physik