



SS/WS 20¹⁰./.....

Praktikum: (P1/P2) (Mo/Di/Mi/Do) Gruppe-Nr: 22

Name: Müller Vorname: Patrick

Name: Dothensch Vorname: Stephan

Versuch: Kreisel (mit/ohne) Fehlerrechnung

Betreuer: Simon Fink Durchgeführt am: 25.04.10

Abgabe am: 22.04.10

Rückgabe am:

Begründung:

2. Abgabe am:

Ergebnis: (+) / 0 / -

Fehlerrechnung: ja / nein

Datum: 29.04.10

Handzeichen: SF

Bemerkungen:



Dieser Versuch soll Ihnen ein Verständnis für die Bewegungsformen rotierender starrer Körper vermitteln. Im ersten Teil des Versuchs haben Sie die Gelegenheit, sich eingehend mit dem Erhaltungssatz für den Drehimpuls auseinanderzusetzen. Im zweiten Teil beobachten Sie anhand eines kardanischn gelagerten Kreisels die unterschiedlichen Bewegungsformen des starren Körpers und deuten diese mit Hilfe der Theorie. Als wichtige technische Anwendung der Kreiselgesetze wird Ihnen der Kreiselkompaß im Modell vorgestellt.

Eine Zusammenfassung des notwendigen theoretischen Hintergrundes zu diesem Versuch sowie besondere Hinweise zur Durchführung der folgenden Aufgaben werden Ihnen in einer Vorbereitungshilfe zu diesem Versuch gegeben.

Beachten Sie die Gefährlichkeit des Kreisels, insbesondere für langhaarige!

Hinweise:

Den Antriebsmotor für den Kreisel immer im Rechtslauf und im Drehzahlbereich $0-3500 \text{ min}^{-1}$ betreiben und vor jedem Kreiselanwurf die Drehzahl auf Null zurückstellen! Vergewissern Sie sich vor jedem Kreiselanwurf, daß die biegsame Welle am Motorflansch fest aufsitzt und daß sie möglichst wenig gebogen ist. Sorgen Sie durch geeignetes Andrücken für einen guten mechanischen Kontakt der Sägezahnkupplung. Wenn Sie die biegsame Welle nicht benötigen, lagern Sie diese bitte in gestreckter Haltung. Der Kreisel ist sehr teuer und empfindlich - behandeln Sie ihn mit Sorgfalt.

Aufgaben:

- 1. Die Drehimpulserhaltung.** Überlegen Sie sich Versuche zur Demonstration der Drehimpulserhaltung anhand eines Drehschemels und eines Fahrradkreisels (Fahrradfelge mit Bleieinlage und Handgriffen an der Achse). Führen Sie diese Versuche durch.
- 2. Freie Achsen.** In den Mittelpunkten der Seitenflächen einer 'Zigarrenkiste' sind Ösen angebracht. Hängen Sie die Kiste an jeweils einer dieser Ösen mit einem Draht an die Achse eines Elektromotors. Beobachten Sie das Verhalten der Kiste, wenn sie in Rotation versetzt wird. Deuten Sie Ihre Beobachtungen.
- 3. Der kräftefreie Kreisel.** Messen Sie die Nutationsfrequenz des symmetrischen Kreisels in Abhängigkeit von der Drehfrequenz um die Figurenachse. Wiederholen Sie diese Messung nach Anbringen der zylindrischen Zusatzgewichte an den äußeren Kardanrahmen. Tragen Sie die gemessenen Werte in einem Diagramm auf.
- 4. Die Dämpfung des Kreisels.** Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit des Kreisels um die Figurenachse als Funktion der Zeit. Tragen Sie die gemessenen Werte in einem Diagramm auf.
- 5. Der Kreisel unter dem Einfluß äußerer Drehmomente.** Messen Sie beim nutationsfreien, symmetrischen Kreisel die Präzessionsfrequenz in Abhängigkeit von der Drehfrequenz um die Figurenachse. Tragen Sie die gemessenen Werte in einem Diagramm auf.
- 6. Die Hauptträgheitsmomente.** Berechnen Sie aus den gemessenen Präzessions- und Nutationsfrequenzen die Hauptträgheitsmomente des symmetrischen Kreisels unter Berücksichtigung der zusätzlichen Trägheitsmomente der Kardanrahmen. Geben Sie eine Abschätzung für die Masse des Rotors an.
- 7. Der Kreisel im beschleunigten Bezugssystem.** Fesseln Sie den inneren Kardanrahmen mittels der Arretiervorrichtungen an die Horizontalebene. Stellen Sie den Holzkeil auf den Drehtisch und plazieren Sie den Kreisel darauf. Weshalb der Holzkeil? Beobachten und deuten Sie die Bewegung der Figurenachse nach Handanwurf des Kreisels und anschließendem Einschalten der Drehtischrotation.

Angaben:**Massen:**

m (zyl. Gewicht) = (1024 ± 1) g pro Stück

m (Magnet) = (106 ± 1) g zusammen

aufschraubbarer Stab (330 ± 1) g mit verschiebbarem Gewicht (375 ± 1) g

Strecken:

Kreiselschwerpunkt - aufgeschraubtes zylindrisches Gewicht: (14.9 ± 0.1) cm

Durchmesser des zylindrischen Gewichtes: (4.00 ± 0.01) cm

Kreiselschwerpunkt - äußerer Rand des inneren Kardanrahmens: (10.91 ± 0.03) cm

Dicke des Magneten: (1.83 ± 0.02) cm

Durchmesser des Rotors: (13.50 ± 0.01) cm

Fehlerrechnung:

Zu Aufgabe 6 kann im Rahmen der obligatorischen Fehlerrechnungen im P2 und nach Absprache mit dem Betreuer eine ausführliche Fehlerrechnung durchgeführt werden.

Zubehör:

Drehstuhl und Fahrradkreisel

Körper in Form einer Zigarrenkiste mit Ösen zum Aufhängen an den drei verschiedenen Seiten und Antriebsmotor dazu

Kreisel in kardanischer Aufhängung mit diversen Zusatzteilen

Antriebsmotor für den Kreisel mit biegsamer Welle und Motorsteuerung

Drehtisch mit Antriebsmotor

Holzkeil für den geeigneten Aufbau des Kreisels auf dem Drehtisch

Optische Bank (Zeiß-Schiene mit Reitern)

2 Halogenleuchten (Betrieb mit 12V~) mit Kondensoren und gemeinsames Netzteil

2 Phototransistorschaltungen (Betrieb mit 9 bis 15V=) mit Steckernetzteil

2 Frequenzzähler mit externer Mess-Stopp-Vorrichtung

2 Linsen ($f_1=15$ cm, $f_2=5,6$ cm bzw. 20 m)

Stoppuhr

Literatur:

Budo: *Theoretische Mechanik*, Par. 51, 58

Müller-Pouillet: *Mechanik punktförmiger Massen*, 1929, Bd. 1, Teil 1, Kap. 6, Par. 5--7, 9

Falk-Ruppel: *Mechanik Relativität Gravitation*, Par. 27

Bergmann-Schäfer: *Lehrbuch der Experimentalphysik*, Bd. 1, Par. 39

Pohl: *Mechanik, Akustik und Wärmelehre*, Par. 51, 52, 55, 56

Magnus: *Kreisel, Theorie und Anwendungen*

Grammel: *Der Kreisel, seine Theorie und seine Anwendungen*, 1950, Bd. 1 & 2

Goldstein: *Klassische Mechanik*, Kap. 5

Vorbereitung zu P2-71 Kreisel

Stephan Dottermusch, Patrick Müller

Gruppe Do-22

15. April 2010

1 Drehimpulserhaltung

Zunächst sollen einige Versuche mit einem Drehschemel und einem Fahrradkreisel durchgeführt werden und dabei die Drehimpulserhaltung untersucht werden.

Für ein drehmomentfreies System bleibt der Drehimpuls \vec{L} erhalten. Eine Person, die auf dem Drehschemel sitzt, hat nur eine mögliche Drehachse, weshalb sich die Betrachtung auf eine Komponente (z) des Drehimpulses reduziert.

Hält die Person das Rad horizontal (Achse vertikal) und beginnt es in Drehung zu versetzen, so wird sich der Schemel in die entgegengesetzte Richtung zu drehen beginnen, damit der Gesamtdrehimpuls des Systems Person + Rad erhalten bleibt.

Versetzt man den Kreisel schon im Voraus in Bewegung und reicht ihn dann der Person passiert zunächst nichts. Beginnt die Person nun jedoch die Kreiselachse zu drehen, ändert sich die z -Komponente des Drehimpulses und die Person beginnt sich zu drehen. Der Drehsinn hängt hier von der Ausgangsposition des Kreiselrads ab: Bei vertikalem Rad bewirkt ein Kippen der Achse eine Erhöhung der z -Komponente des Drehimpulses, die Person beginnt in entgegengesetzte Richtung zu rotieren, damit der Gesamtimpuls konstant bleibt. Bei anfangs horizontal ausgerichtetem Rad bewirkt ein Kippen hingegen, dass die z -Komponente abnimmt und folglich die Person im Drehsinn des Rads zu rotieren beginnen muss.

2 Freie Achsen

Nun soll ein quaderförmiger Körper mit einem Draht an einen Elektromotor angeschlossen und damit in Drehung versetzt werden. Der Quader kann dabei an verschiedenen Stellen angehängt werden, wodurch dann jeweils die Rotationsachse festgelegt ist. Die Rotation wird nun für die drei Hauptträgheitsachsen untersucht. Man wird nun beobachten, dass die Rotation um zwei der drei möglichen Achsen stabil ist, während bei der dritten Achse Störungen auftreten. Diese zwei Achsen bezeichnet man als freie Achsen der Rotation.

Mathematisch entspringt dieser Zusammenhang aus den Eulerschen Gleichungen:

$$M_1 = \Theta_1 \dot{\omega}_1 + (\Theta_3 - \Theta_2) \omega_2 \omega_3$$

$$M_2 = \Theta_2 \dot{\omega}_2 + (\Theta_1 - \Theta_3) \omega_1 \omega_3$$

$$M_3 = \Theta_3 \dot{\omega}_3 + (\Theta_2 - \Theta_1) \omega_1 \omega_2$$

Rotiert der Körper mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit um eine der Achsen, so ist für eine Komponente $\dot{\omega} = 0$. Hieraus ergeben sich für die zwei anderen Achsen die Differentialgleichungen $\ddot{\omega}_i + K \cdot \omega_i = 0$, mit einem von den Trägheitsmomenten abhängigen Faktor K . Die Lösung dieser DGLen hängt von dem Faktor K ab:

$K > 0$: Als Lösung ergeben sich harmonische Schwingungen. Die Rotation bleibt also stabil.

$K < 0$: Es ergibt sich eine exponentiell ansteigende Funktion. Die Rotation ist instabil.

Für die Achse mit dem kleinsten und dem größten Trägheitsmoment ergibt sich $K > 0$, für diese zwei Achsen ist die Rotation somit stabil.

3 Kräftefreier Kreisel

Wir messen hier nun die Nutationsfrequenz eines kräftefreien Kreisels. Hierzu verwenden wir einen Kardankreisel, bei dem eine Kreisscheibe drehbar in einem Kardanrahmen gelagert ist. Der Versuchsaufbau wird so eingestellt, dass der Kreisel möglichst kräftefrei ist, also so, dass keine Drehmomente auf den Kreisel wirken.

Nutation tritt auf, wenn die Drehachse nicht auf der Drehimpulsachse liegt. Die Drehachse rotiert dann um die Drehimpulsachse. Dies erreichen wir im Versuch, indem wir eine kurze Störung senkrecht zur Dreh(impuls)achse erzeugen, beispielsweise durch einen kurzen Stoß.

Wir messen nun die Nutationsfrequenz in Abhängigkeit von der Rotationsfrequenz des Kreisels. Letztere messen wir, indem wir mit einem Phototransistor die Reflexion eines Lichtstrahls auf der Kreisscheibe beobachten. Diese ist schwarz gefärbt, hat aber einen weißen Streifen. Fällt der Strahl auf diesen, so zeigt der Phototransistor eine rechteckförmige Spannungsspitze. Da solch ein Ausschlag somit ein Mal pro Umlauf auftritt, kann man über einen angeschlossenen Frequenzzähler direkt die Rotationsfrequenz ablesen. Für die Messung der Nutationsfrequenz wird der Kardankreisel so angeordnet, dass der innere Kardanrahmen genau im Strahl einer zweiten Lichtquelle liegt. Wenn dieser nun durch die Nutationsbewegung hin und her wippt, entstehen ebenfalls rechteckförmige Spannungsspitzen in einem zweiten Phototransistor, die auch an einen Frequenzzähler weitergeleitet werden.

Diese Messungen werden nun jeweils ohne und mit Zusatzgewichten am äußeren Kardanrahmen ausgeführt. Durch die Gewichte ändert sich das Trägheitsmoment des Kreisels um die entsprechende Achse.

Wie in der Vorbereitungshilfe hergeleitet, muss für kleine Auslenkungswinkel für die Nutationsfrequenz ω_N eines mit der Kreisfrequenz ω rotierenden Kreisels gelten:

$$\omega_N = \frac{\Theta_z}{\Theta_{x,y}} \cdot \omega$$

gelten, wobei Θ_z bzw. $\Theta_{x,y}$ das Trägheitsmoment um die Rotationsachse des Kreisels bzw. um die anderen Hauptachsen bezeichnen. Da die Kreiselbewegung jedoch noch durch den Kardanrahmen gehindert wird, müssen die Trägheitsmomente der Aufhängungen ebenfalls mit einberechnet werden. Damit ergibt sich laut Vorbereitungshilfe:

$$\omega_N = \frac{\Theta_z}{\sqrt{\Theta_x^{korr} \cdot \Theta_y^{korr}}}$$

mit den korrigierten Trägheitsmomenten:

$$\begin{aligned} \Theta_x^{korr} &= \Theta_{Kreisel} + \Theta_{Innenkardan} + \Theta_{Aussenkardan} \\ \Theta_y^{korr} &= \Theta_{Kreisel} + \Theta_{Innenkardan} \end{aligned}$$

4 Dämpfung des Kreisels

Nun soll noch die Winkelgeschwindigkeit des Kreisels in Abhängigkeit von der Zeit aufgezeichnet werden. Hierzu wird der Kreisel zunächst mit Hilfe eines Elektromotors auf eine gewisse

Rotationsfrequenz gebracht und anschließend mit dem bereits in Aufgabe 3 beschriebenen Verfahrens die Rotationsfrequenz gemessen. Ein Messpunkt ist alle 30 Sekunden aufzunehmen. Wir erwarten, dass der Kreisel aufgrund der Dämpfung durch die Reibung irgendwann zum Stillstand kommen wird. Die Winkelgeschwindigkeit sollte dabei exponentiell abfallen, da es sich hier quasi um einen konstant gedämpften harmonischen Oszillator handelt.

5 Äußeres Drehmoment

Es geht nun darum die Präzessionsbewegung des Kreisels zu dokumentieren. Die Präzession eines rotierenden Körpers kommt zustande wenn auf den Körper oder genauer gesagt auf den Schwerpunkt des Körpers eine Kraft wirkt, er sich also in der Ruhelage nicht im Kräftegleichgewicht befindet. Durch anbringen eines Magneten am inneren Kardanrahmen, ruft die Schwerkraft nun eine Drehmoment hervor.

Stehen Drehmoment (D) und Drehimpuls (P) senkrecht aufeinander (d.h. der Drehimpulsvektor steht parallel zur Erdoberfläche) kommt es zur Präzessionsbewegung. Anders als bei der Nutation bleiben Drehimpuls und Figurenachse bei der nun folgenden Bewegung parallel. Stattdessen rotieren sie zusammen um eine Achse parallel zum wirkenden Drehmoment.

Für die Messung wird der Kreisel auf ca $17 \frac{\text{Drehungen}}{\text{s}}$ beschleunigt, und der Drehzahlmesser für die Präzession auf 2s eingestellt. Misst man nun die Präzessionsfrequenz (ω_p), ist zu beachten, dass der äußere Kardanrahmen während einer Periode den Lichtkegel zweimal durchbricht. Außerdem müssen eventuell auftretende Nutationsbewegungen gedämpft werden. Rechnerisch ergibt sich für die Abhängigkeit der Präzessionsfrequenz von der Drehfrequenz folgende Gleichung:

$$\omega_p = \frac{d\vec{L}}{dt} \cdot \frac{1}{\|\vec{L}\|} = \frac{D}{L} = \frac{r \cdot m \cdot g}{\Theta_C \cdot \omega}$$

r : Abstand Gewicht-Schwerpunkt, m : Masse Magnet ($106 \pm 1\text{g}$), Θ_C : Trägheitsmoment Kreisel, ω : Drehfrequenz Kreisel

6 Hauptträgheitsmomente

Es sollen nun die Ergebnisse aus den vorherigen Aufgaben dazu verwendet werden, die Hauptträgheitsmomente des Kreisels zu bestimmen.

Zunächst lässt sich mittels einer Ausgleichsgeraden Θ_z aus Aufgabe 5 ermitteln:

$$\Theta_z = D \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{\omega_p}$$

Aufgabe 3 liefert dann die anderen beiden Hauptträgheitsmomente ($\Theta_y = \Theta_x$)

$$\omega_N = \frac{\Theta_z}{\Theta_{x,y}} \cdot \omega$$

Es sind einerseits Zusatzgewichte wie der Magnet zu beachten. Diese können mit dem Satz von Steiner herausgerechnet werden. Zum anderen sind bei der Bestimmung der Rotorträgheitsmomente die Trägheitsmomente der Kardanrahmen zu beachten. In der Vorbereitungshilfe findet sich:

$$\Theta_x = \Theta_x^{\text{Rotor}} + \Theta_x^{\text{Innenkardan}} + \Theta_x^{\text{Außenkardan}}$$

$$\Theta_y = \Theta_y^{Rotor} + \Theta_y^{Innenkardan}$$

Die Masse (M) des Rotors lässt sich mit folgender Beziehung abschätzen:

$$\Theta_z = \frac{1}{2}MR^2$$

7 Kreisel im beschleunigten Bezugssystem

Der letzte Versuchsaufbau stellt den so genannten Kreiselkompass dar. Der Kreiselkompass kann sich entlang von zwei Achsen frei bewegen; Er wird allerdings in der Horizontalen festgehalten. Daher erfährt der Kreisel ein Drehmoment, verursacht von der Erdrotation.

$$\vec{M} = \vec{L} \times \vec{\omega}_E$$

Der aus dem Drehmoment resultierende Drehimpuls zwingt den Kreisel dazu sich nach Norden auszurichten.

Soweit zur Theorie. In der Praxis rotiert die Erde zu langsam, bzw der Kreisel nicht schnell genug um die wirkenden Reibungskräfte zu überwinden. Somit simulieren wir die Erdrotation mit einem Drehtisch und einen Breitengrad mit einem Keil. Ohne Keil wäre es so, als befände sich der Kreisel am Nordpol. Nun reicht anschubsen des Kreisels mit der Hand um den gewünschten Effekt beobachten zu können.

15.04.20

Messprotokoll - P2 Kreisel

Aufgabe 3

Anfangs-Drehzahl $\omega = 7000 \text{ min}^{-1}$

Drehzahl	(Hz) Nutationfrequenz	Df.	(Hz) NF.	(Hz) Df.	(Hz) NF.
77,0 Hz	8,78	11 Hz		5	2,57
76,5 Hz	9,52	10,5 Hz	5,49	4,5	2,1
76,0 Hz	8,27	70 Hz	5,76	4	2,1
75,5 Hz	8,02	9,5 Hz	4,96	3,5	
75,0 Hz		9,0	4,68	3	
74,5 Hz	7,52	8,5	4,44	2,5	$\sim 7,23$
74,0 Hz	7,25	8,0	4,16	2	$\sim 7,02$
73,5 Hz	7,01	7,5	4,05	1,5	/
73,0 Hz	6,83	7,0	3,65	1	/
72,5 Hz	6,65	6,5	3,34	0,5	/
72,0 Hz	6,26	6	3,16		
71,5 Hz		5,5	2,86		

ohne Gewichte

(Hz)		(Hz)		(Hz)	
Df.	Nf.	Df.	Nf.	Df.	Nf.
76,95	5,07	70,45	3,12	3,30	7,27
76,46	4,90	9,23	2,1	3,67	7,77
(75,94)	(3,90)	9,47	2,84		
75,48		8,98	2,85		
75,07	4,57	8,45	2,62		
74,48	4,35	7,76	2,50		
73,87	4,15	7,32	2,20		
73,35	4,02	6,93	2,16		
72,47	3,73	(6,21)	(7,28)		
71,92	3,60	5,50	7,78		
71,42	3,42	5,42	7,67		
71,00	3,39	4,67	7,54		

mit Gewichten

7504.10

Aufgabe 4Anfangsdrehzahl ω 2000 min^{-1} (0s)

Zeit (s)	Frequenz (Hz)	t	f	ϵ	f
30s					
30	37,62	600	13,42 2000/6	1170	8,79
60	30,33	630	12,74	1200	3,13
90	29,08	660	12,09	1230	2,75
# 120	27,88	690	11,44	1260	2,40
150	26,72	720	10,82	1290	2,07
180	25,61	750	10,22	1320	1,76
210	24,53	780	9,65	1350	1,48
240	23,48	810	9,08	1380	1,20
270	22,46	840	8,53	1410	0,97
300	21,54	870	8,01	1440	0,75
330	20,60	900	7,49	1470	0,55
360	19,63	930	6,99	1500	0,40
390	18,83	960	6,51	1530	0,25
420	17,99	990	6,05	1560	0,12
450	17,11	1020	5,59	1590	0 Stillstand
480	16,37	1050	5,16		
510	15,59	1080	4,73		
540	14,85	1110	4,31		
570	14,12	1140	3,92		

Aufgabe 5

(Hz) Frequenz	22,5 Hz	Zeit für halbe Umdrehung	(s)
22,5	Hz	5,53 s	/
27,5	Hz	5,00 s	/
20,5		4,65 s	/
20		4,84 s	3,02 2,79
19		4,54 s	3,11 2,50
18		4,78	2,90 2,45
17		4,00	2,82 2,33
16		3,67	2,91 2,24
15		3,60	2,48 2,32
14		3,25	2,34 /
13		3,36	2,94 /
12		3,75	2,03 /
11		(Boden) /	/
		ohne Gewicht	
26		6,74	3,96 3,76
25		5,79	3,68 3,06
24		5,76	3,90 2,90
23		5,38	/ 2,73
22		5,07	3,59 2,66
21		4,92	3,70 2,67

Schwerpunkt Stab
17,5 cm vom Rahmen

Schwerpunkt Gewicht
Gewicht 3,5 cm entfernt vom Rahmen
15,5 cm

Auswertung zu P2-71 Kreisel

Stephan Dottermusch, Patrick Müller

Gruppe Do-22

22. April 2010

Inhaltsverzeichnis

1	Drehimpulserhaltung	3
2	Freie Achsen	3
3	Kräftefreier Kreisel	3
4	Dämpfung des Kreisels	5
5	Äußeres Drehmoment	6
6	Hauptträgheitsmomente	8
6.1	Berechnung von Θ_x	9
6.2	Berechnung von Θ_z	10
6.2.1	Messung ohne Gewicht	10
6.2.2	Messung mit Gewicht (1)	10
6.2.3	Messung mit Gewicht (2)	11
6.3	Berechnung von Θ_y	11
7	Der Kreisel im beschleunigten Bezugssystem	13

Fehlerbetrachtung

Systematische Fehler

Ein systematischer Fehler ist ein grundsätzlicher, durch das Messverfahren und die verwendeten Geräte hervorgerufener Fehler. Er lässt sich nicht durch mehrfaches Messen eliminieren. In diesem Versuch traten folgende systematische Fehlergrößen auf:

Massen:

Gegenstand	Masse (g)
Zylindergewichte (m_{Zyl})	1024 ± 1
Stab (m_S)	330 ± 1
verschiebbares Gewicht (m_{SG})	375 ± 1

Abstände/Längen:

Gegenstand	Abstand (mm)
Durchmesser Zylindergewichte (d)	$40 \pm 0,1$
Schwerpunkt Kreisel - äußerer Rahmen ($r_{\ddot{a}R}$)	149 ± 1
Schwerpunkt Kreisel - innerer Rahmen (r_{iR})	$109,1 \pm 0,3$
Schwerpunkt Stab - Rahmen (r_S)	175 ± 1
Durchmesser der Kreiselscheibe (d_{Rotor})	$135 \pm 0,1$
verschiebbares Gewicht - Rahmen 1 (r_1)	35 ± 1
verschiebbares Gewicht - Rahmen 2 (r_2)	155 ± 1

Die Fehlerangaben haben wir dem Aufgabenblatt entnommen. Den Schwerpunkt des Stabs haben wir selbst von Hand gemessen und dabei einen Fehler von 1mm angenommen.

Die Fortpflanzung von systematischen Fehlern lässt sich mit dem arithmetischen Fehlerfortpflanzungsgesetz berechnen:

$$\Delta q = \sum_i \left| \frac{\partial q}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta x_i$$

Statistischer Fehler

Hierunter versteht man einen zufällig auftretenden Fehler im Messverfahren. Da dieser statistisch um den wahren Wert gestreut auftritt, lässt er sich durch Aufnehmen langer Messreihen ausgleichen. Beim Ermitteln einer Ausgleichsgeraden haben wir uns von dem verwendeten Programm (Scidavis 0.2.3) den jeweiligen Fehler (Standardabweichung) für die Geradensteigung mit ausrechnen lassen.

Zur Berechnung der Fehlerfortpflanzung benutzt man bei statistischen Fehlern das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$\sigma = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial q}{\partial x_i} \right)^2 \cdot \sigma_{X_i}^2}$$

Die Fehlerrechnung führen wir, wie auf der Homepage des P2-Praktikums angegeben für die Aufgaben 6 (damit auch 3 und 5) durch.

1 Drehimpulserhaltung

Wir haben den Versuch den Beschreibungen in unserer Vorbereitung entsprechend ausgeführt. Im Wesentlichen haben die Vorhersagen für das Experiment zugetroffen. Allerdings war es teilweise schwierig, das Gewicht von Körper und Rad einigermaßen gleichmäßig um die Drehachse zu verteilen. Auch musste darauf geachtet, dass der Drehschemel exakt eben ausgerichtet ist, da sonst stets ein Drehmoment gewirkt hat, dass besonders bei langsamen Raddrehungen (wenn das Rad von der Person auf dem Schemel selbst angestoßen wurde) zu Verfälschung führte.

Der Drehimpuls im geschlossenen System Person+Rad blieb stets erhalten.

2 Freie Achsen

Hier haben wir den Holz-Quader wie in der Vorbereitung beschrieben an einen Draht angehängt, der, mit einem Elektromotor verbunden, um die vertikale Achse rotiert. Wie erwartet konnten wir feststellen, dass die Rotation um die Achse des größten Trägheitsmoments stabil ist. Die Rotation um die Achse des kleinsten Trägheitsmoments allerdings war relativ instabil, der Quader rotierte nach kurzer Zeit wieder um die Achse des größten Trägheitsmoments. Bei der Rotation um die mittlere Achse kam es zu unkontrollierten Schwankungen, bis sich auch hier schließlich tendenziell eine Rotation um die größte Achse einstellte, aber mit starken Pendelbewegungen. Die Rotation um die kleinste Achse wäre theoretisch stabil, allerdings kam es durch den Versuchsaufbau zu starken Störungen, da beispielsweise der Draht verbogen war. So stellte sich als Drehachse nach kurzer Zeit wieder die größte Achse ein. Allgemein war der Versuch leider sehr ungenau, da wie bereits erwähnt, der Versuchsaufbau Unwuchten und zusätzliche Drehmomente begünstigte.

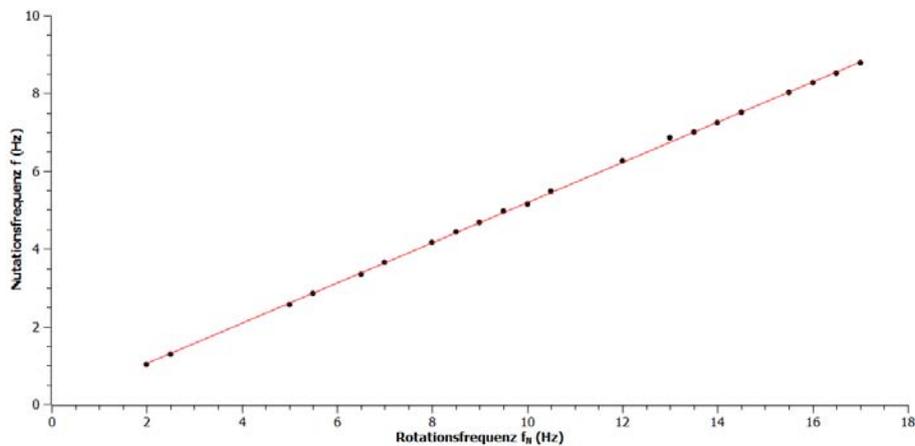
3 Kräftefreier Kreisel

Um mit dem Versuchsaufbau vertraut zu werden, haben wir zunächst eine Probemessung durchgeführt. Hierbei konnten wir feststellen, dass die korrekte Ausrichtung des Kreisels durch die regelmäßigen Schläge auf den Kardanrahmen (die nötig waren, um eine Nutationsschwingung zu erzeugen) sehr leicht gestört wurde. Besonders wenn der Kreisel nur noch langsam rotierte, war dies ein Problem. Ein weiteres Problem war, dass die Nutation sehr schnell abgedämpft wurde. Bei langsamen Rotationsgeschwindigkeiten war eine gute Messung kaum mehr möglich, da der Kardanrahmen dann nur noch wenige (1-2) Durchgänge vollführte, die groß genug für unsere Messvorrichtung waren. Problematisch war auch, dass der Kreisel bei langsamer Rotation durch zu starke Schwingungen bei der Nutationsmessung zwei Signale pro Durchgang erzeugte, was den Messwert unbrauchbar gemacht hat.

Für die eigentliche Messung drehten wir den Kreisel auf 17Hz auf und versuchten bei der Messung die Werte zunächst möglichst genau in Abständen von 0,5Hz zu nehmen. Wir erhielten folgende Messergebnisse:

Drehfrequenz f (Hz)	Nutationsfrequenz f_N (Hz)	f (Hz)	f_N (Hz)
17	8,78	9,5	4,96
16,5	8,52	9	4,68
16	8,27	8,5	4,44
15,5	8,02	8	4,16
14,5	7,52	7	3,65
14	7,25	6,5	3,34
13,5	7,01	5,5	2,86
13	6,85	5	2,57
12	6,26	2,5	1,29
10,5	5,48	2	1,02
10	5,16		

Wir tragen diese Messwerte in einem Diagramm auf:



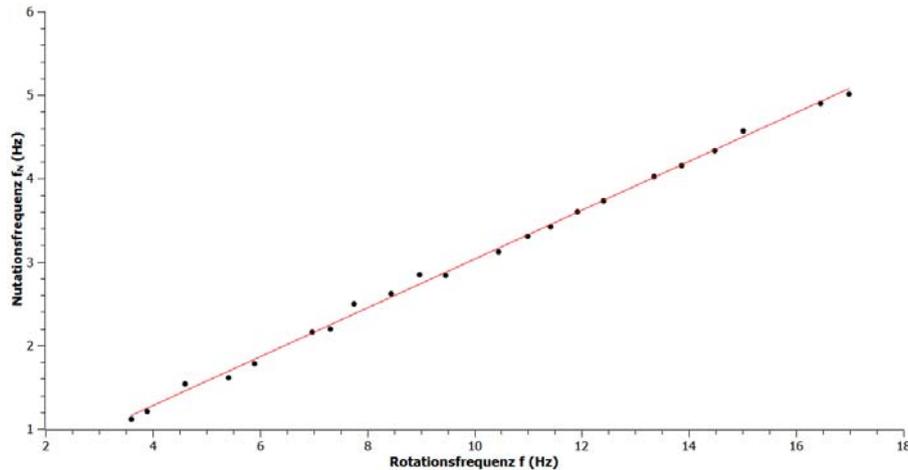
Wir sehen einen deutlichen den erwarteten, linearen Zusammenhang und erhalten eine Ausgleichsgerade mit der Steigung:

$$m_{N,ohne} = 0,518 \pm 0,002$$

In einer zweiten Messreihe haben wir nun an den äußeren Kardanrahmen Zusatzgewichte angebracht, die das Trägheitsmoment des Kreisels für die Drehung um die Achse der Nutation erhöhen. Aufgrund von Schwierigkeiten bei der ersten Messung, die Werte genau in 0,5 Hz-Abständen zu messen, haben wir hier nur noch grob im Abstand von 0,5 Hz gemessen und stets beide Werte aufgenommen. Es ergaben sich folgende Messwerte:

Drehfrequenz f (Hz)	Nutationsfrequenz f_N (Hz)	f (Hz)	f_N (Hz)
16,99	5,01	9,47	2,84
16,46	4,9	8,98	2,85
15,01	4,57	8,45	2,62
14,48	4,33	7,76	2,5
13,87	4,15	7,32	2,2
13,35	4,02	6,98	2,16
12,41	3,73	5,9	1,78
11,92	3,6	5,42	1,61
11,42	3,42	4,61	1,54
11	3,31	3,9	1,21
10,45	9,47	3,61	1,11

Das zugehörige Diagramm:



Auch hier erkennen wir deutlich den erwarteten linearen Zusammenhang. Die Streuung der Messwerte liegt allerdings höher als im ersten Versuch. Dies liegt daran, dass eine präzise Messung hier nun schwieriger war, da die Nutation noch schneller abgedämpft wurde als zuvor. Zusätzlich mussten wir stärker auf den Kardanrahmen schlagen, um die Nutation auszulösen, dies sorgte dafür, dass sich die Aufhängung schneller verschob und die Messung gestört wurden.

Für die Proportionalitätskonstante ermitteln wir:

$$m_{N,mit} = 0,292 \pm 0,003$$

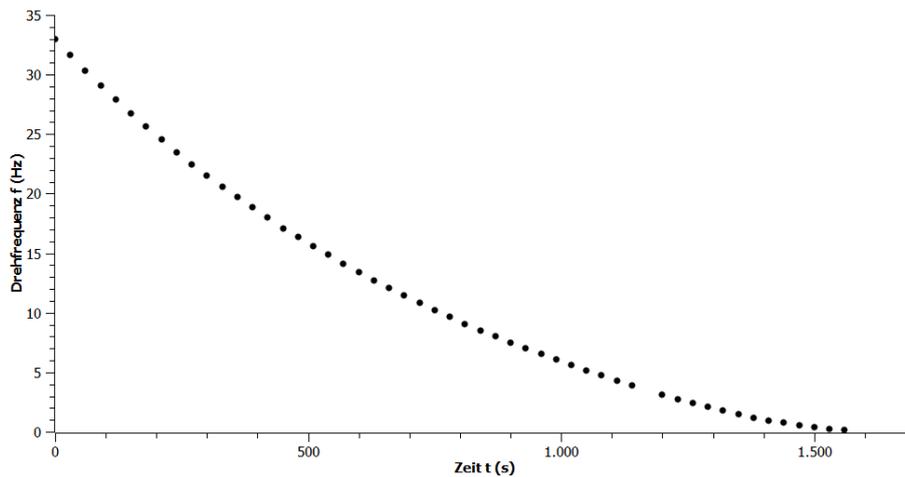
Aus diesen Proportionalitätskonstanten, werden wir in Aufgabe 6 die Trägheitsmomente bestimmen, doch schon hier sehen wir, dass ein höheres Trägheitsmoment die Nutation, welche i.A. als Störung der Kreiselbewegung gilt, minimiert.

4 Dämpfung des Kreisels

Bei diesem höchst spannenden Versuch, beschleunigten wir zunächst den Kreisel auf etwas über 34 Hz und ließen den Kreisel dann bis zum Stillstand frei drehen. Alle 30 Sekunden haben wir dabei die momentane Drehfrequenz f , beginnend bei 33Hz abgelesen. Wir erhielten folgende Messwerte:

t (s)	f (Hz)						
0	33,00	390	18,83	780	9,65	1200	3,13
30	31,62	420	17,99	810	9,08	1230	2,75
60	30,33	450	17,11	840	8,53	1260	2,40
90	29,08	480	16,37	870	8,01	1290	2,07
120	27,88	510	15,59	900	7,49	1320	1,76
150	26,72	540	14,85	930	6,99	1350	1,48
180	25,61	570	14,12	960	6,51	1380	1,20
210	24,53	600	13,42	990	6,05	1410	0,97
240	23,48	630	12,74	1020	5,59	1440	0,75
270	22,46	660	12,09	1050	5,16	1470	0,55
300	21,54	690	11,44	1080	4,73	1500	0,40
330	20,60	720	10,82	1110	4,31	1530	0,25
360	19,69	750	10,22	1140	3,92	1560	0,12

Wir tragen diese Messwerte in ein Schaubild ein:



Man erkennt deutlich, dass hier eine exponentielle Dämpfung vorliegt. Da man die Drehbewegung auch als zweidimensionalen harmonischen Oszillator betrachten kann, ist eine solche Dämpfung typisch für Drehbewegungen.

5 Äußeres Drehmoment

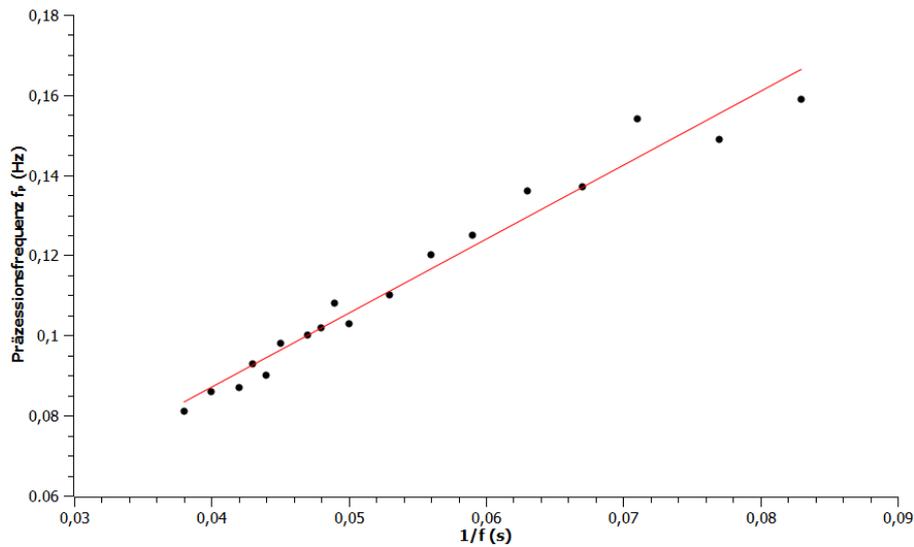
Entgegen den Angaben in der Vorbereitungshilfe und dementsprechend auch in unserer Vorbereitung hatten wir statt der Magnetgewichte einen Stab mit darauf verschiebbarem Gewicht zur Verfügung. Wir haben insgesamt drei Messungen durchgeführt, zunächst nur mit dem Stab, ohne Gewicht, dann zwei Messungen mit dem Gewicht in unterschiedlichen Abständen. Dabei haben wir den Kreisel jeweils eine halbe Umdrehung ausführen lassen und die Zeit gemessen, die er dafür gebraucht hat. Aus diesem Wert können wir dann die Präzessionsfrequenz berechnen.

Es stellte sich schnell heraus, dass die Messung recht ungenaue Ergebnisse liefern würde: Zunächst war es schwierig genau zu sagen, wann der Kreisel eine halbe Umdrehung vollendet hatte und vor allem die Stoppuhr im richtigen Moment zu drücken. Außerdem war der Kreisel nicht nutationsfrei, da wir ihn vor allem bei geringen Drehfrequenzen aus einem Winkel größer als 90° zur Tischoberfläche starten lassen mussten, da er gleich zu Beginn ein wenig absackte. Diese ruckartige Bewegung führte zu einer Nutation. Zudem änderte sich die Frequenz während des Umlaufs bis zu 0,2 Hz, wodurch die Messwerte nicht mehr unbedingt als punktiert angenommen werden können.

Zunächst hier die Messreihe ohne Zusatzgewicht:

Drehfrequenz f (Hz)	Zeit $t / \frac{\text{Umdrehung}}{2}$ (s)	Präzessionsfrequenz f_P (Hz)	f	t	f_P
26	6,14	0,08	20	4,84	0,10
25	5,79	0,09	19	4,54	0,11
24	5,76	0,09	18	4,18	0,12
23	5,38	0,09	17	4,00	0,13
22,5	5,53	0,09	16	3,67	0,14
22	5,08	0,10	15	3,66	0,14
21,5	5,00	0,10	14	3,25	0,15
21	4,92	0,10	13	3,36	0,15
20,5	4,65	0,11	12	3,15	0,16

Wir tragen nun f_P über dem Kehrwert der Drehfrequenz, $1/f$, ab, da wir (wie in der Vorbereitung erwähnt) eine umgekehrte Proportionalität erwarten.



Wir erkennen auch hier den erwarteten linearen Zusammenhang, wenn auch, wie ebenfalls erwartet, mit relativ starker Streuung. Für die Geradensteigung ergibt sich ein Wert von

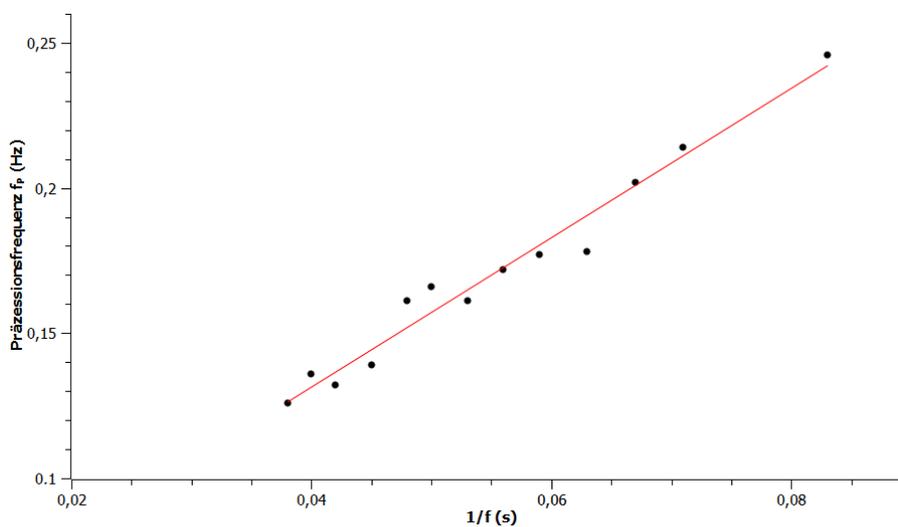
$$m_{P,1} = 1,84 \pm 0,08$$

Nun die Messreihe mit dem Gewicht bei einem Abstand von 3,5cm zum Kardanrahmen:

Drehfrequenz f (Hz)	Zeit $t / \frac{\text{Umdrehung}}{2}$ (s)	Präzessionsfrequenz f_P (Hz)	f	t	f_P
26	3,96	0,13	18	2,9	0,17
25	3,68	0,14	17	2,82	0,18
24	3,8	0,13	16	2,81	0,18
22	3,59	0,14	15	2,48	0,20
21	3,1	0,16	14	2,34	0,21
20	3,02	0,17	13	1,94	0,26
19	3,11	0,16	12	2,03	0,25

Wie erwartet, ist die Präzessionsfrequenz höher, da das Drehmoment auf den Kreisel größer ist als zuvor.

Das zugehörige Diagramm (Der Wert für $f=13$ Hz wurde als Ausreißer vernachlässigt):



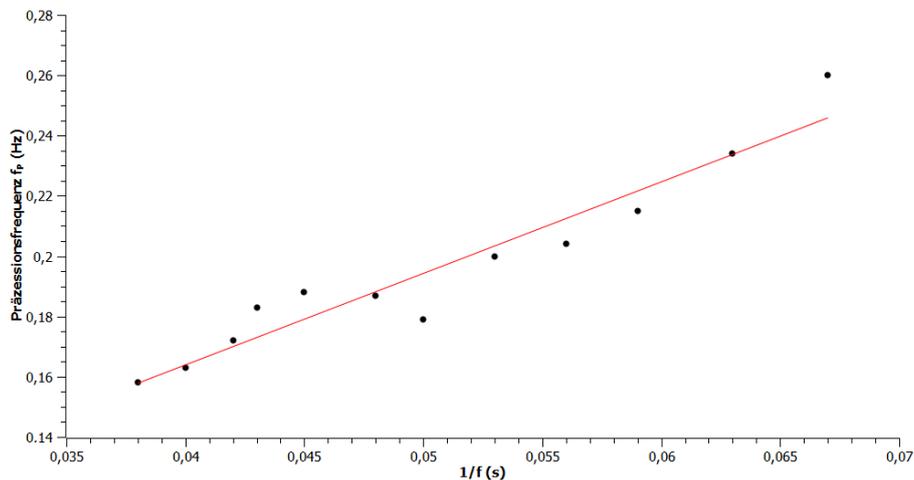
Auch hier ist der lineare Zusammenhang zu erkennen, allerdings mit noch größerer Streuung. Für die Geradensteigung ergibt sich:

$$m_{P,2} = 2,57 \pm 0,14$$

Ein letzter Durchgang mit dem Gewicht nun 15,5cm vom Rahmen entfernt ergab folgende Messwerte:

Drehfrequenz f (Hz)	Zeit $t / \frac{\text{Umdrehung}}{2}$ (s)	Präzessionsfrequenz f_P (Hz)	f	t	f_P
26	3,16	0,16	20	2,79	0,18
25	3,06	0,16	19	2,5	0,20
24	2,9	0,17	18	2,45	0,20
23	2,73	0,18	17	2,33	0,21
22	2,66	0,19	16	2,14	0,23
21	2,67	0,19	15	1,92	0,26

Wie zu erwarten ist, liegen hier die Präzessionsfrequenzen nochmals höher. Es ergibt sich folgendes Diagramm:



Hier zeigen sich nun sehr deutliche Abweichungen. Dies liegt daran, dass die durch den Anfangsabbruch des Gewichts hervorgerufene Nutation bei dieser Konfiguration in unserer Versuchsreihe am größten ist. Durch die Schaukelnde Nutationsbewegung wurde die Messung stark verzerrt. Als Geradensteigung aus dem Schaubild finden wir:

$$m_{P,3} = 3,04 \pm 0,27$$

6 Hauptträgheitsmomente

Es sollen nun die Ergebnisse aus den vorherigen Aufgaben dazu verwendet werden, die Hauptträgheitsmomente des Kreisels zu bestimmen.

Hier nochmals die Ergebnisse zusammengefasst (Genauigkeiten auf eine signifikante Stelle gerundet):

$m_{N,ohne} = 0,518 \pm 0,002$
$m_{N,mit} = 0,292 \pm 0,003$
$m_{P,1} = 1,84 \pm 0,08$
$m_{P,2} = 2,6 \pm 0,1$
$m_{P,3} = 3,0 \pm 0,3$

Die restlichen verwendeten Größen sind samt ihrer Ungenauigkeiten in der Vorbemerkung zur Fehlerrechnung verzeichnet.

6.1 Berechnung von Θ_x

Zunächst nutzen wir die Ergebnisse aus Aufgabe 3, um aus den Proportionalitätskonstanten das Trägheitsmoment Θ_x zu berechnen. Hierzu nutzen wir die bereits in der Vorbereitung genannte Beziehung:

$$f_N = \frac{\Theta_z}{\underbrace{\sqrt{\Theta_x \Theta_y}}_{m_{N,ohne}}} \cdot f \quad \text{bzw. mit Gewichten: } f_N = \frac{\Theta_z}{\underbrace{\sqrt{(\Theta_x + \Theta_{Gew}) \cdot \Theta_y}}_{m_{N,mit}}} \cdot f$$

Um weiterrechnen zu können, müssen wir noch $\Theta_{Gew.}$ bestimmen, also das Trägheitsmoment der Zusatzgewichte (Maßangaben siehe Vorbemerkung):

$$\Theta_{Gew.} = \underbrace{2}_{2 \text{ Massen}} \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{2} m_{Zyl} \left(\frac{d}{2}\right)^2}_{\text{Trägheitsmoment Zylinder}} + \underbrace{m_{Zyl} \left(r_{\ddot{a}R} + \frac{d}{2}\right)^2}_{\text{Steiner'scher Satz}} \right) = 2m_{Zyl} \cdot (r_{\ddot{a}R}^2 + r_{\ddot{a}R}d + \frac{3}{8}d^2)$$

Wir erhalten: $\Theta_{Gew.} = 0,0589 \text{ kgm}^2$

Nun müssen wir für diese Größe noch den systematischen Fehler berechnen. Hierzu benutzen wir das arithmetische Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$\begin{aligned} \Delta\Theta_{Gew.} &= \left| \frac{\partial\Theta_{Gew.}}{\partial m_{Zyl}} \right| \Delta m_{Zyl} + \left| \frac{\partial\Theta_{Gew.}}{\partial d} \right| \Delta d + \left| \frac{\partial\Theta_{Gew.}}{\partial r_{\ddot{a}R}} \right| \Delta r_{\ddot{a}R} \\ &= 0,00078 \text{ kgm}^2 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die Zusatzgewichte: $\Theta_{Gew.} = 0,0589 \pm 0,0008 \text{ kgm}^2$

Nun fahren wir mit der Berechnung von Θ_x fort und teilen zunächst die beiden obigen Gleichungen durcheinander und erhalten:

$$\frac{m_{N,ohne}}{m_{N,mit}} = \frac{\sqrt{\Theta_x + \Theta_{Gew.}}}{\Theta_x} \quad \Rightarrow \quad \Theta_x = \frac{\Theta_{Gew.}}{\frac{m_{N,ohne}^2}{m_{N,mit}^2} - 1}$$

Wir erhalten $\Theta_x = 0,0274 \text{ kgm}^2$.

Nun betrachten wir die Fehlerfortpflanzung in dieser Berechnung:

Systematischer Fehler:

$$\begin{aligned} \Delta\Theta_x &= \left| \frac{\partial\Theta_x}{\partial\Theta_{Gew.}} \right| \Delta\Theta_{Gew.} \\ &= 0,00037 \text{ kgm}^2 \end{aligned}$$

Statistischer Fehler:

$$\begin{aligned} \sigma_{\Theta_x} &= \sqrt{\left(\frac{\partial\Theta_x}{\partial m_{N,ohne}} \right)^2 \cdot \sigma_{m_{N,ohne}}^2 + \left(\frac{\partial\Theta_x}{\partial m_{N,mit}} \right)^2 \cdot \sigma_{m_{N,mit}}^2} \\ &= 0,00088 \text{ kgm}^2 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir als endgültigen Wert für $\Theta_x = (0,0274 \pm 0,0009 \pm 0,0004) \text{ kgm}^2$

6.2 Berechnung von Θ_z

Nun benutzen wir die Ergebnisse von Aufgabe 5, um Θ_z , also das Trägheitsmoment um die Figurenachse des Kreisels, zu bestimmen. Hierzu benutzen wir die in der Vorbereitung bereits gezeigte Beziehung für die Präzessionsfrequenz:

$$\omega_P = \underbrace{\frac{r \cdot m \cdot g}{\Theta_z}}_{m_P} \cdot \frac{1}{\omega} \quad \text{bzw.} \quad f_P = \underbrace{\frac{1}{4\pi^2} \frac{r \cdot m \cdot g}{\Theta_z}}_{m_P} \cdot f$$

6.2.1 Messung ohne Gewicht

Aus der Messung nur mit dem Stab, ohne das verschiebbare Zusatzgewicht erhalten wir:

$$\Theta_{z,1} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{(r_{iR} + r_S) \cdot m_S \cdot g}{m_{P,1}} = 0,0127 \text{ kgm}^2$$

Fehlerbetrachtung:

Systematischer Fehler:

$$\begin{aligned} \Delta\Theta_{z,1} &= \left| \frac{\partial\Theta_{z,1}}{\partial m_S} \right| \Delta m_S + \left| \frac{\partial\Theta_{z,1}}{\partial r_S} \right| \Delta r_S + \left| \frac{\partial\Theta_{z,1}}{\partial r_{iR}} \right| \Delta r_{iR} \\ &= 0,0001 \text{ kgm}^2 \end{aligned}$$

Statistischer Fehler:

$$\begin{aligned} \sigma_{\Theta_{z,1}} &= \sqrt{\left(\frac{\partial\Theta_{z,1}}{\partial m_{P,1}} \right)^2 \cdot \sigma_{m_{P,1}}^2} \\ &= 0,0006 \text{ kgm}^2 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir $\Theta_{z,1} = (0,0127 \pm 0,0006 \pm 0,0001) \text{ kgm}^2$.

6.2.2 Messung mit Gewicht (1)

Aus der Messung mit dem verschiebbaren Zusatzgewicht bei $r_1 = (3,5 \pm 0,1) \text{ cm}$ Abstand vom Rahmen erhalten wir:

$$\Theta_{z,2} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{(r_{iR} + r_S) \cdot m_S \cdot g + (r_{iR} + r_1) \cdot m_{SG} \cdot g}{m_{P,2}} = 0,0141 \text{ kgm}^2$$

Fehlerbetrachtung:

Systematischer Fehler:

$$\begin{aligned} \Delta\Theta_{z,2} &= \left| \frac{\partial\Theta_{z,2}}{\partial m_S} \right| \Delta m_S + \left| \frac{\partial\Theta_{z,2}}{\partial r_S} \right| \Delta r_S + \left| \frac{\partial\Theta_{z,2}}{\partial r_{iR}} \right| \Delta r_{iR} + \left| \frac{\partial\Theta_{z,2}}{\partial r_1} \right| \Delta r_1 + \left| \frac{\partial\Theta_{z,2}}{\partial m_{SG}} \right| \Delta m_{SG} \\ &= 0,0001 \text{ kgm}^2 \end{aligned}$$

Statistischer Fehler:

$$\begin{aligned}\sigma_{\Theta_{z,2}} &= \sqrt{\left(\frac{\partial\Theta_{z,2}}{\partial m_{P,2}}\right)^2 \cdot \sigma_{m_{P,2}}^2} \\ &= 0,0005 \text{ kgm}^2\end{aligned}$$

Damit erhalten wir $\Theta_{z,2} = (0,0141 \pm 0,0005 \pm 0,0001) \text{ kgm}^2$.

6.2.3 Messung mit Gewicht (2)

Aus der Messung mit dem verschiebbaren Zusatzgewicht bei $r_2 = (15,5 \pm 0,1) \text{ cm}$ Abstand vom Rahmen erhalten wir:

$$\Theta_{z,3} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{(r_{iR} + r_S) \cdot m_S \cdot g + (r_{iR} + r_2) \cdot m_{SG} \cdot g}{m_{P,3}} = 0,0160 \text{ kgm}^2$$

Fehlerbetrachtung:

Systematischer Fehler:

$$\begin{aligned}\Delta\Theta_{z,3} &= \left|\frac{\partial\Theta_{z,3}}{\partial m_S}\right| \Delta m_S + \left|\frac{\partial\Theta_{z,3}}{\partial r_S}\right| \Delta r_S + \left|\frac{\partial\Theta_{z,3}}{\partial r_{iR}}\right| \Delta r_{iR} + \left|\frac{\partial\Theta_{z,3}}{\partial r_2}\right| \Delta r_2 + \left|\frac{\partial\Theta_{z,3}}{\partial m_{SG}}\right| \Delta m_{SG} \\ &= 0,0001 \text{ kgm}^2\end{aligned}$$

Statistischer Fehler:

$$\begin{aligned}\sigma_{\Theta_{z,3}} &= \sqrt{\left(\frac{\partial\Theta_{z,3}}{\partial m_{P,3}}\right)^2 \cdot \sigma_{m_{P,3}}^2} \\ &= 0,002 \text{ kgm}^2\end{aligned}$$

Damit erhalten wir $\Theta_{z,3} = (0,016 \pm 0,002 \pm 0,0001) \text{ kgm}^2$.

Der Durchschnittswert aus den drei Messungen lautet:

$$\Theta_z = (0,0143 \pm 0,001 \pm 0,0001) \text{ kgm}^2$$

6.3 Berechnung von Θ_y

Nun nutzen wir nochmals die Beziehung, die wir zur Berechnung von Θ_x bereits genutzt hatten:

$$f_N = \frac{\Theta_z}{\underbrace{\sqrt{\Theta_x \Theta_y}}_{m_{N,ohne}}} \cdot f \quad \Rightarrow \quad \Theta_y = \frac{\Theta_z^2}{m_{N,ohne}^2 \cdot \Theta_x}$$

Damit erhalten wir $\Theta_y = 0,0278 \text{ kgm}^2$.

Fehlerbetrachtung:

Systematischer Fehler:

$$\begin{aligned}\Delta\Theta_y &= \left| \frac{\partial\Theta_y}{\partial\Theta_x} \right| \Delta\Theta_x + \left| \frac{\partial\Theta_y}{\partial\Theta_z} \right| \Delta\Theta_z \\ &= 0,0008 \text{ kgm}^2\end{aligned}$$

Statistischer Fehler:

$$\begin{aligned}\sigma_{\Theta_y} &= \sqrt{\left(\frac{\partial\Theta_y}{\partial m_{N,ohne}} \right)^2 \cdot \sigma_{m_{N,ohne}}^2 + \left(\frac{\partial\Theta_y}{\partial\Theta_x} \right)^2 \cdot \sigma_{\Theta_x}^2 + \left(\frac{\partial\Theta_y}{\partial\Theta_z} \right)^2 \cdot \sigma_{\Theta_z}^2} \\ &= 0,004 \text{ kgm}^2\end{aligned}$$

Damit erhalten wir als Endergebnisse für die drei Trägheitsmomente:

$$\begin{aligned}\Theta_x &= (0,0274 \pm 0,0009 \pm 0,0004) \text{ kgm}^2 \\ \Theta_y &= (0,0278 \pm 0,004 \pm 0,0008) \text{ kgm}^2 \\ \Theta_z &= (0,0143 \pm 0,001 \pm 0,0001) \text{ kgm}^2\end{aligned}$$

Wie man nun deutlich sieht, stimmen die Trägheitsmomente Θ_x und Θ_y relativ gut miteinander überein. Dies ist auch das, was man für einen derartigen Kreisel erwarten würde. Außerdem gilt $\Theta_x \approx \Theta_y > \Theta_z$, es handelt sich also offensichtlich um einen verlängerten Kreisel. Die Messunsicherheiten stellten sich rechnerisch doch als relativ klein heraus (nur zw. 0,1 und 2%), was besonders bei der Präzessionsmessung verwundert. Diese war nämlich durch die starke Nutation und andere, oben bereits benannte Faktoren, recht stark gestört, ins Besondere da die Berechnung von einem nutationsfreien Kreisel ausgeht. Dieser Fehler wurde von uns jedoch nicht quantitativ erfasst. Da die drei Einzelergebnisse aus der Präzessionsmessung jedoch relativ gut übereinstimmen, vermuten wir, dass der Fehler durch die Nutation systematischer Natur sein muss. Möglicherweise hätten wir bessere Messergebnisse erzielen können, wenn wir die Nutation vorher besser ausgependelt hätten.

Abschließend wollen wir nun noch aus dem Wert für Θ_z auf die Masse des Rotors schließen. Hierzu nutzen wir die Formel für das Trägheitsmoment einer Zylinderscheibe und stellen diese nach der Masse um:

$$\begin{aligned}\Theta_z &= \frac{1}{2} m \left(\frac{d_{Rotor}}{2} \right)^2 \\ \Leftrightarrow m &= \frac{8 \cdot \Theta_z}{d_{Rotor}^2} = 6,28 \text{ kg}\end{aligned}$$

Systematischer Fehler:

$$\begin{aligned}\Delta m &= \left| \frac{\partial m}{\partial r_{Rotor}} \right| \Delta r_{Rotor} + \left| \frac{\partial m}{\partial \Theta_z} \right| \Delta \Theta_z \\ &= 0,053 \text{ kg}\end{aligned}$$

Statistischer Fehler:

$$\begin{aligned}\sigma_m &= \sqrt{\left(\frac{\partial m}{\partial \Theta_z}\right)^2 \cdot \sigma_{\Theta_z}^2} \\ &= 0,44 \text{ kg}\end{aligned}$$

Somit ergibt sich für die Masse der Kreiselscheibe:

$$m = (6,3 \pm 0,4 \pm 0,05) \text{ kg}$$

Die Fehler liegt hier im Bereich von maximal ca. 6%. Der Wert stellt daher eine recht gute Näherung dar. Dennoch ist es gut möglich, dass er doch signifikanter von dem realen Wert abweicht, da, wie bereits erwähnt, bei der Bestimmung des Werts für Θ_z einige Messungenauigkeiten nicht quantitativ erfasst worden sind.

7 Der Kreisel im beschleunigten Bezugssystem

Wie in der Vorbereitung beschrieben haben wir nun noch den Kreisel, mit fixiertem innerem Kardanrahmen, auf einem rotierenden Keil platziert. Den Kreisel haben wir vor einschalten des Motors noch per Hand angeworfen. Er richtete sich wie erwartet in die simulierte Nord-Süd-Richtung, also die Steigung des Keils hinauf. Allerdings war diese Ausrichtung nicht perfekt, dies lag vermutlich daran, dass sein Schwerpunkt nicht exakt über der stabilisierenden Achse lag, und somit der Kreisel ein Drehmoment erfuhr.