Karlsruhe Institute of Technology

FAKULTÄT FÜR PHYSIK
Praktikum Klassische Physik

Prak.: P1 (P1/P2) Semester: WS 19/20 (z.B. „WS14/15" oder „SS15") Wochentag: Di (Mo/Di/Mi/Do) Gruppennr.: 09 (##)

Name: Gut Vorname: Laura

Name: Lamprecht Vorname: Helena

Emailadresse(n): laura.gut@web.de , lamprecht.helena@web.de (Optional)

Versuch: Kreisel (P1-71) (z.B. „Galvanometer (P1-13)" oder „Mikrowellenoptik (P2-15)") Fehlerrech.: Nein (Ja/Nein)

Betreuer: Julian Schaber Durchgeführt am: 03.12.19 (TT.MM.JJ)

Wird vom Betreuer ausgefüllt.

1. Abgabe am: 10.12.19

Rückgabe am: ______ Begründung:

2. Abgabe am: ______

Ergebnis: + / 0 / - Fehlerrechnung: Ja / Nein

Datum: 17.12.19 Handzeichen: J. Schaber

Bemerkungen:

Sehr schönes Protokoll!

KREISEL

3. Nutation

f [Hz]	f_N [Hz]
17	9,01029
16,5	8,72734
16	8,33001
15,5	8,19068
15	7,92750
14,5	7,64829
14	7,34301
13,5	7,07...
13	6,85875
12,5	6,68510
→ 12	~~6~~ 6,34722
11,5	6,19837 (10517)
11	5,85666
10,5	5,55775
10	5,31600
9,5	5,04209
9	4,75934
→ 8,5	4,57740
8	4,315889
7,5	3,937965
7	3,790344
6,5	3,536195
6	3,149420
5,5	2,941219
5	2,530587

mit Zusatzgewichten:

f [Hz]	f_N [Hz]
17	5,25755
16,5	5,083868
16	4,90988
15,5	4,72242
15,0	4,57704
14,5	4,50775
14	4,282353
13,5	4,113559
13	3,994769
12,5	3,831998
12	3,736606
11,5	3,542537
11	3,390150
10,5	3,219963
10	3,105782
9,5	2,944905
9	2,791961
8,5	2,587851
8	2,519343
7,5	2,308181
→ 7	2,128456
6,5	1,995675
→ 6	1,851652
5,5	1,708805
5	1,444373

4. Dämpfung start 33 Hz

t [s]	f [Hz]
0	
30	
60	
90	
120	
150	
180	
210	
240	
270	
300	
330	
360	
390	
420	
450	
480	
510	
540	
570	
600	
630	
660	
690	
720	
750	
780	
810	
840	
870	
900	
930	
960	
990	
1020	
1050	
1080	
1110	
1140	
1170	
1200	
1230	
1260	
1290	
1320	
1350	
1380	
1410	
1440	
1470	
1500	

03.12.19
J. S.

4. Dämpfung

0	33	8:30	20,09269	16:30	12,47361
0:30	32,0638	9:00	19,53815	17:00	12,09286
1:00	31,1392	9:30	19,00374	17:30	11,71575
1:30	30,2510	10:00	18,47186	18:00	11,34132
2:00	29,3696	10:30	17,95016	18:30	10,95757
2:30	28,5139	11:00	17,44153	19:00	10,59579
3:00	27,7136	11:30	16,91545	19:30	10,23693
3:30	26,9128	12:00	16,40782	20:00	9,88497
4:00	26,1349	12:30	15,91021	20:30	9,55121
4:30	25,3331	13:00	15,42619	21:00	9,22261
5:00	24,5722	13:30	14,96046	21:30	8,90448
5:30	23,84311	14:00	14,52013	22:00	8,58124
6:00	23,12044	14:30	14,07948	22:30	8,27544
6:30	22,45320	15:00	13,5768	23:00	7,98619
7:00	21,81813	15:30	13,25828	23:30	7,69526
7:30	21,21895	16:00	12,86440	24:00	7,40443
8:00	20,64510				

24:30	7,13191	32:30	3,050838	40:30
25:00	6,85049	33:00	2,839958	41:00
25:30	6,57029	33:30	2,621724	41:30
26:00	6,30735	34:00	2,399346	42:00
26:30	6,04479	34:30	2,188647	42:30
27:00	5,77957	35:00	1,978110	43:00
27:30	5,53073	35:30	1,765195	43:30
28:00	5,26757	36:00	1,537932	44:00
28:30	5,01297	36:30	1,279882	44:30
29:00	4,75318	37:00	1,0361793	45:00
29:30	4,49921	37:30	0,8079186	45:30
30:00	4,239172	38:00	0,5900745	46:00
30:30	3,984552	38:30	0,40369270	46:30
31:00	3,732217	39:00	0,25944546	47:00
31:30	3,504596	39:30	0,09731188	47:30
32:00	3,280833	40:00	0	48:00

5. Präzession

f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	T_p [s]
~~23,3341~~		
25,4987	24,9239	11
23,59332	23,17946	10
26,5560	24,6516	11,25
24,08936	23,47568	10:50
23,31846	23,01605	10:65
23,01605	2	10:34
21.8150		
21.36965	21.02280	9:41

f_1	f_2	T_p
20,89736	20,50796	09:03
20.42044		
19,98481	19,63041	8:72
19,53431	19,17738	8:38
~~19,01322~~		
18,74390	18,42667	07:95
18,32999	18,02726	08:31
17,93078	17,65281	08:28
17,56125	17,30678	07:84
17,15801	16,85712	07:81
16,69721	16,39381	07:50
16,34284	16,06381	07:34

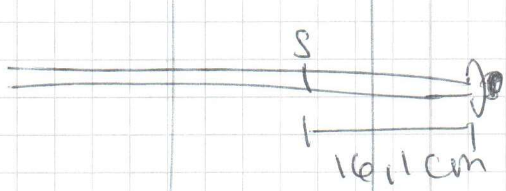
5

f_1	f_2	T
27,1717	26,49577	11:63
25,9662	25,4571	11:92
25,2460	24,7865	11:32
24,5132	24,0885	10:96
23,44105	23,04777	10:46
22,81233	22,41411	10:26
22,20113	21,79263	9:71
21,11814	20,75764	9:32
20,36445	20,02480	9:20
19,76221	19,38159	9:01
19,15969	18,82115	8:71
18,68575	18,31485	8:39
18,01801	17,68007	8:17
17,55083	17,28648	8:12
17,12289	16,84485	7:76
~~16,70333~~		
16,56766	16:32005	7:47
15,99758	15,70307	7:37
15,50622	15,29422	7:26
15,05303	14,79990	6:95
14,53231	14,21404	6:89
14,06087	13,83346	6:53
13,49822	13,28942	6:24
13,01667	12,78416	6:02
12,48483	12,28938	5:76
11,91573	11,71607	5:
11,42940	11,22739	5:31

f_1	f_2	T
11,03209	10,86207	5:10
10,38113	10,18327	4:81
09,66969	9,45758	4:54
9,07292	8,87471	4:25
8,54708	8,38414	4:18
8,06098	7,86063	4:06

32

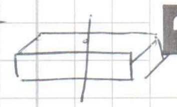
16



03.11.15
J.S.

2.

Drehung um mittl. Achse → Drehung um Achse mit kürzester Länge



Drehung um längste Achse → Drehung um kürzeste Achse (da nicht 100% gerade)

Drehung um kürzeste Achse → bleibt

---

(7) 30° → Ausrichtung nach Nord

0° → keine Ausrichtun

03.12.15

J.S.

P1 Versuchsprotokoll: Kreisel

Laura Gut und Helena Lamprecht, Gruppe Di - 09

03. Dezember 2019

Inhaltsverzeichnis

Alle im Protokoll angezeigten Abbildungen sind, sofern nicht anderweitig verzeichnet, selbst erstellt.

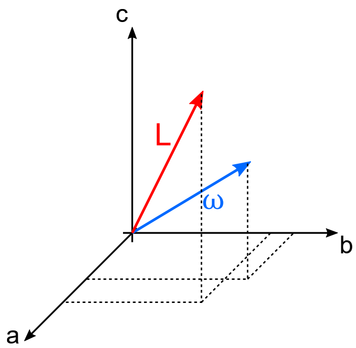


Abbildung 1: Drehimpuls und Drehachse in Beziehung zu den Hauptträgheitsachsen a, b und c

0 Theoretische Grundlagen

Ziel dieser Versuchsreihe ist es, das Verhalten eines Kreisels, welcher allgemein als starrer Körper mit Fixpunkt, der seine Bewegung festlegt, jedoch keiner festgelegten Achse definiert ist, unter verschiedenen Umständen zu untersuchen. Die für den Kreisel betrachtete Bewegungsform ist also die Rotation.
Unterteilt man einen starren Körper in infinitisimale Massenelemente $\mathrm{d}m_i$ mit Ortsvektor $\vec{r}_i$, so lässt sich deren Geschwindigkeit durch

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i \,, \tag{1}$$

berechnen. Hierbei bezeichnet $\omega = |\vec{\omega}|$ die Winkelgeschwindigkeit um die Rotationsachse, welche durch die Richtung von $\vec{\omega}$ bestimmt ist. Der zugehörige Drehimpuls der Rotation ist durch

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i \,, \tag{2}$$

mit Impuls $\vec{p}_i$ gegeben. Für den Gesamtdrehimpuls des starren Körpers ergibt sich

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i \longrightarrow \int \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \, \mathrm{d}m \,, \tag{3}$$

durch Summation über alle Massenelemente, welche zu einem Integral überführt werden kann. Wirken keine äußeren Kräfte auf das System ein, so gibt es kein externes Drehmoment. Das Drehmoment ist allgemein als

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{r} \times \vec{F} \,, \tag{4}$$

definiert. Demnach ist der Drehimpuls $\vec{L}$ ohne Krafteinwirkungen auf die Anordnung eine Erhaltungsgröße.
Der integrale Ausdruck für $\vec{L}$ (Glg. 3) kann durch die Form

$$\vec{L} = \underline{\underline{\Theta}} \cdot \vec{\omega} \,, \tag{5}$$

ersetzt werden. $\underline{\underline{\Theta}}$ ist eine 3×3-Matrix bzw. ein Tensor zweiter Stufe und wird Trägheitstensor genannt, wodurch Rotationen um jede beliebige Achse beschrieben werden können und dessen Elemente im kartesischen Koordinatensystem von der Form

$$\Theta_{ij} = \int (\vec{r}^{\,2} \, \delta_{ij} - x_i \, x_j) \, \mathrm{d}m \,, \tag{6}$$

$$= \int (\vec{r}^{\,2} \, \delta_{ij} - x_i \, x_j) \, \rho(\vec{r}) \, \mathrm{d}V \,, \tag{7}$$

mit der Massendichte $\rho(\vec{r})$ sind. Der Drehimpuls $\vec{L}$ ist also im Allgemeinen nicht parallel zu $\vec{\omega}$ (vgl. Abbildung 1). Aus der Rotationsenergie

$$E_{\mathrm{rot}} = \int \frac{1}{2} \, \vec{v}^{\,2} \, \mathrm{d}m = \frac{1}{2} \, \vec{\omega}^{\mathrm{T}} \, \underline{\underline{\Theta}} \, \vec{\omega} = \frac{1}{2} \, \vec{L} \, \vec{\omega} \,, \tag{8}$$

kann das skalare Trägheitsmoment Θ_{skal} abgeleitet werden, mit dem sich die Rotationsenergie als

$$E_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2} \, \Theta_{skal} \, \omega^2 \,, \tag{9}$$

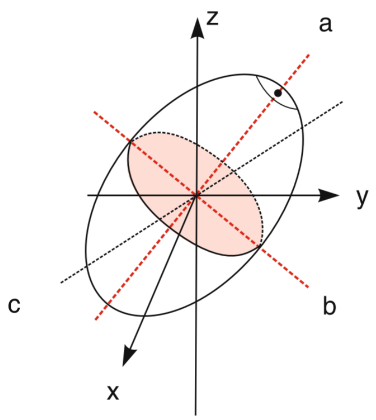


Abbildung 2: Trägheitsellipsoid mit Hauptträgheitsachsen a, b und c [1]

schreiben lässt. Die Flächen gleichen skalaren Trägheitsmoments im Raum bilden Ellipsoide. Es ergibt sich das sogenannte Trägheitsellipsoid (vgl. Abbildung 2), dessen Hauptachsen gerade die Hauptträgheitsachsen des betrachteten starren Körpers darstellen. Fallen diese mit den Koordinatenachsen zusammen, was einer Diagonalisierung des Trägheitstensors entspricht, beschreiben die Diagonalelemente gerade die Trägheitsmomente für die Rotation um die entsprechende Hauptträgheitsachse, a, b oder c (vgl. Abbildung 1, 3, 4) und werden als Hauptträgheitsmomente Θ_a, Θ_b, Θ_c bezeichnet. Ein Kreisel heißt symmetrisch, falls zwei der Hauptträgheitsmomente identisch sind. Der Drehimpuls setzt sich aus den Komponenten $\vec{L} = \vec{L}_\mathrm{a} + \vec{L}_\mathrm{b} + \vec{L}_\mathrm{c}$ zusammen, die sich genauso durch die Winkelgeschwindigkeit und Hauptträgheitsmomente ausdrücken lassen (vgl. Abbildung 1).

$$\vec{L} = \Theta_\mathrm{a}\,\vec{\omega}_\mathrm{a} + \Theta_\mathrm{b}\,\vec{\omega}_\mathrm{b} + \Theta_\mathrm{c}\,\vec{\omega}_\mathrm{c}\,. \tag{10}$$

Der Drehimpuls ist also genau dann parallel zur Drehachse, falls die Rotation um eine der Haupttägheitsachsen erfolgt.
Dabei ist anzumerken, dass für unterschiedliche Hauptträgheitsmomente die Rotation um die Achse des mittleren Hauptträgeitsmoments nicht stabil ist. Lediglich um die Achsen des größten und des kleinsten Hauptträgheitsmoments kommt kein Torkeln bei der Rotation zustande. Die stabilen Drehachsen werden **freie Achsen** genannt. Allerdings ergibt sich für die längste Achse, welche gerade dem kleinsten Hauptträgheitsmoment entspricht, nur dann eine stabile Rotation, solange äußere Störfaktoren ausreichend gering sind, wie in Abschnitt 2 untersucht wird. Somit stellt die Rotation um die kürzeste Achse (größtes Trägheitsmoment) den stabilsten Zustand dar.

1 Drehimpulserhaltung

Mit Hilfe eines Drehschemels und eines Fahrradkreisels lässt sich die Drehimpulserhaltung sehr anschaulich demonstrieren. Der Kreisel besteht aus einem Fahrradrad, an welchem an beiden Seiten der Achse Handgriffe angebracht sind.
Im ersten Experiment sitzt der Experimentierende auf dem ruhenden Drehschemel und erhält von einer außenstehenden Person den in Rotation versetzten Fahrradkreisel. Der Experimentierende nimmt den Kreisel mit horizontaler Radachse, die der Drehachse und in diesem Fall der Richtung des Drehimpulses entspricht, in Empfang. Der Drehschemel verbleibt in Ruhe. Wenn kein äußeres Drehmoment wirkt, ist der Drehimpuls $\vec{L}$ in dem System mit Drehschemel und experimentierender Person eine Erhaltungsgröße. Da der Drehschemel nur eine mögliche Drehachse (in z-Richtung) besitzt, ist nur die z-Komponente des Drehimpulses für die Betrachtung relevant. Diese ist für eine horizontale Radachse jedoch $L_z = 0$.
Nun kippt die experimentierende Person den Fahrradkreisel, sodass die ursprünglich horizontal verlaufende Achse des Rades nun in der Vertikalen liegt. Der Drehschemel beginnt eine Drehbewegung in die entgegengesetzte Richtung auszuführen. Durch die Neigung des Fahrradkreisels, erhöht sich die z-Komponente des Drehimpulses. Damit der Drehimpuls des Systemes dennoch erhalten bleibt, beginnt der Drehschemel also eine Ausgleichsbewegung auszuführen. Wird die Achse des Fahrradkreisels wieder in die Horizontale zurück geneigt, kommt der Drehschemel zur Ruhe. Wird der Fahrradkreisel auf die andere Seite geneigt, dreht sich auch der Drehschemel in die andere Richtung.
Würde die Person auf dem ruhenden Drehschemel den rotierenden Fahrradkreisel mit vertikaler Drehachse in Empfang nehmen, würde ein Kippen des Rades dazu führen, dass sich der Drehschemel im Drehsinn des Rades bewegt, da sonst die z-Komponente des Drehimpulses aufgrund der Dämpfung abnimmt.
Bei dem zweiten durchgeführten Versuch sitzt der Experimentierende auf dem in Rotation gebrachten Drehschemel. Während der Rotation hat er erst die Arme ausgestreckt und zieht sie dann nah an den Körper. Es kann beobachtet werden, dass sich in Folge dieses Armeanziehens die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ des Drehschemels erhöht hat. Durch das Armeanziehen wird das Trägheitsmoment Θ verringert. An Gleichung 5 wird deutlich, dass bei konstanten Drehimpuls $\vec{L}$ aber mit verringertem Trägheitsmoment Θ die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ zunehmen muss, damit der Drehimpuls als Gesamtes erhalten bleibt.

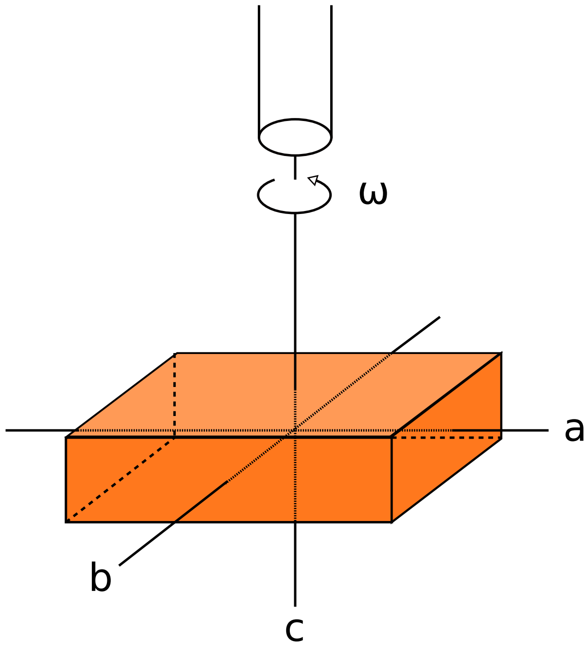


Abbildung 3: Rotation um Hauptträgheitsachsen

2 Freie Achsen

In diesem Versuchsteil wird eine quaderförmige "Zigarrenkiste" (vgl. Abbildung 3) an einem Draht an der Achse eines Elektromotors befestigt und in Rotation versetzt. Der Draht kann an drei Mittelpunkten der verschiedenen Seitenflächen der Kiste einghängt werden, sodass er in der Verlängerung der drei Hauptträgheitsachsen angebracht werden kann. Nun soll das Verhalten der rotierenden Kiste an den drei Aufhängungspunkten beobachtet und gedeutet werden.
Wie auch der Skizze (Abb. 3) zu entnehmen ist, gilt $\Theta_a < \Theta_b < \Theta_c$. Theoretisch (vgl. Abschnitt 0) sollte der Körper also das Bestreben zeigen, um die c-Achse zu rotieren.

Zuerst wird die Rotation des Quaders um die Hauptachse b untersucht, also die Achse des mittleren Hauptträgheitsmoments Θ_b. Bei einer geringen Abweichung von der Drehachse entstehen störende Drehmomente, welche den Körper zum Taumeln bringen. Es lässt sich beobachten, dass der Quader erst torkelt, dann seinen eigenen Schwerpunkt anhebt, um schließlich stabil um die Achse des größten Trägheitsmoment (c) zu rotieren. Die Rotation um die Achse des mittleren Trägheitsmoment ist instabil, weshalb die Rotationsachse zu der stabilen c-Achse wechselt.
Nun wird die Rotationsachse a beobachtet. Diese Achse besitzt die längste Figurenachse, also das kleinste Hauptträgheitsmoment Θ_a. Bei geringer Rotationsfrequenz ist zunächst eine stabile Rotation zu erkennen. Wird diese Frequenz jedoch erhöht, beginnt die Kiste zu taumeln und auch hier letztlich wieder um die Achse des größten Trägheitsmomentes (c) zu rotieren. Dass diese Rotation um die theoretisch stabile Achse (vgl. Abschnitt 0) in der Praxis keinen stabilen Zustand darstellt, liegt daran, dass der Aufhängungsdraht nicht ideal gerade ist, sondern bereits Verbiegungen aufweist und damit große Störfaktoren einbringt, die sich für schnelle Rotationen stärker auswirken.
Zuletzt wird die Rotation um die c-Achse betrachtet (vgl. Abbildung 3). Diese Achse zeichnet sich dadurch aus, dass sie die kürzeste Achse durch den Schwerpunkt des Quaders ist und das größte Hauptträgheitsmoment Θ_c besitzt. Trotz des krummen Drahtes ist die Rotation um diese Achse ein stabiler Zustand, das heißt im Allgemeinen ist der Körper bestrebt, um die Achse größten Trägheitsmoments zu rotieren, wie es auch durch die Theorie (vgl. Abschnitt 0) vorhergesagt wird.

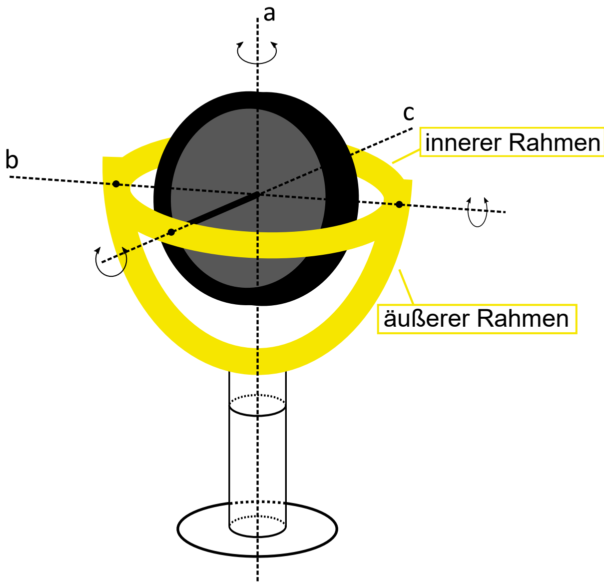


Abbildung 4: Skizze Kardankreisel

3 Kräftefreier Kreisel

Der ab diesem Versuch verwendete Kreisel ist ein Kardankreisel (vgl. Abbildung 4). Dieser besteht aus äußerem und innerem Kardanrahmen, sowie der eigentlichen Kreiselscheibe, welche im inneren Rahmen gelagert ist. Letzterer ist wiederum im äußeren Rahmen gelagert, der über den Sockel selbst drehbar ist. Die Drehachse der Kreiselscheibe (c) ist demnach immer senkrecht zu der des inneren Kardanrahmens (b), sowie die des äußeren Rahmens (a) immer zu b. Alle Achsen schneiden sich im Schwerpunkt der Anordnung.

Zuerst soll das Verhalten für den kräftefreien symmetrischen Kreisel untersucht werden. Kräftefrei bedeutet dabei, dass der Kreisel im Schwerpunkt unterstützt wird und keine externen Drehmomente wirken. Außerdem folgt damit, dass der Drehimpuls in dieser Anordnung erhalten ist.
Dreht sich der Kreisel um seine Figurenachse, so zeigen die Vektoren von Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit in dieselbe Richtung. Fallen Drehimpuls und Drehachse jedoch nicht zusammen, führt der Kreisel eine sogenannte **Nutationsbewegung** aus. Der Drehimpuls $\vec{L}$ ist zeitlich konstant ($L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = const.$) und muss gleichzeitig die Energieerhaltung, aus der wie für das skalare Trägheitsmoment (vgl. Abschnitt 0 das sogenannte Energieellipsoid, welches Flächen gleichen Energiewertes darstellt, folgt, erfüllen. Das bedeutet die Spitze von $\vec{L}$ kann sich lediglich auf der Schnittkurze der Kugel (Drehimpulserhaltung) und des Energieellipsoids liegen. Da sich das Energieellipsoid mit dem Kreisel mitrotiert, muss der Kreisel eine derartige Rotation ausführen, dass der raumfeste Drehimpuls ständig auf der Schnittkurve bleibt. So rotieren die Figurenachse und die Drehachse um die raumfeste Drehimpulsachse auf Kegeln. Für die Frequenz dieser Rotation, die Nutationsfrequenz ω_N, wird in der Literaturmappe anhand der Geometrie der Vektoren für kleine Winkel zwischen $\vec{\omega}$ und $\vec{L}$ der Zusammenhang

$$\omega_\mathrm{N} = \frac{\Theta_\mathrm{c}}{\Theta_\mathrm{a}} \cdot \omega\,, \tag{11}$$

zur Kreiselfrequenz ω hergeleitet, falls der stark idealisierte Fall angenommen, wird, dass die Massen und die daraus resultierenden Trägheitsmomente der Kardanrahmen vernachlässigbar sind. Dies trifft für die im Praktikum verwendete sehr schwere Versuchsanordnung jedoch nicht zu. Unter Berücksichtigung der Rahmen, ergibt sich für die Hauptträgheitsmomente Θ_a und Θ_b

$$\Theta_\mathrm{a} = \Theta_\mathrm{a}^\mathrm{Rotor} + \Theta_\mathrm{a}^\mathrm{Innenkardan} + \Theta_\mathrm{a}^\mathrm{Außenkardan}\,, \tag{12}$$
$$\Theta_\mathrm{b} = \Theta_\mathrm{b}^\mathrm{Rotor} + \Theta_\mathrm{b}^\mathrm{Innenkardan}\,, \tag{13}$$

sowie für die Nutationsfrequenz

$$\omega_\mathrm{N} = \frac{\Theta_\mathrm{c}}{\sqrt{\Theta_\mathrm{a}\,\Theta_\mathrm{b}}} \cdot \omega\,. \tag{14}$$

Diese theoretische Beziehung der beiden Frequenzen wird im Praktikum überprüft, indem der Kreisel vorerst mit einem Elektromotor auf eine Frequenz von ca. $f = 17\,\text{Hz}$ gebracht. Der Frequenzwert wird dabei mit einem Schwanenhals gemessen, der ein Reflektorplättchen auf dem Kreisel registriert und so die Umdrehungen pro Sekunde aufzeichnen kann. Anschließend sorgt ein Fauststoß senkrecht zur Drehachse dafür, dass sich letztere nicht mehr mit der Richtung des Drehimpulses deckt, wodurch der Effekt der Nutation beobachtbar ist. Die Nutationsfrequenz wird mithilfe eines zweiten Schwanenhalses ermittelt, der auf den Rand des Reflektorstreifens zeigt, welcher am inneren Rahmen angebracht ist, und so dessen Kreisbewegung registrieren kann.
Diese Messung wird mit zwei zylindrischen, symmetrisch am Außenkardan befestigten Zusatzmassen wiederholt, welche sich nicht mit dem inneren Rahmen mitdrehen können. Daraus ergeben sich die Messwerte in Tabelle 1.

Tabelle 1: Messwerte Nutationsfrequenz f_N (mit Zusatzgewicht f_N2) in Abhängigkeit der Drehfrequenz f

f [Hz]	f_N [Hz]	f_N2 [Hz]
17,0	9,010	5,258
16,5	8,727	5,084
16,0	8,330	4,910
15,5	8,190	4,722
15,0	7,928	4,577
14,5	7,648	4,508
14,0	7,343	4,282
13,5	7,070	4,114
13,0	6,859	3,995
12,5	6,685	3,832
12,0	6,347	3,737
11,5	6,198	3,543
11,0	5,857	3,390
10,5	5,558	3,220
10,0	5,316	3,106
9,5	5,042	2,945
9,0	4,759	2,792
8,5	4,577	2,588
8,0	4,316	2,519
7,5	3,938	2,308
7,0	3,790	2,128
6,5	3,536	1,996
6,0	3,149	1,852
5,5	2,941	1,709
5,0	2,531	1,444

Wird die Nutationsfrequenz f_N bzw f_N2 (mit Zusatzgewicht) nun in Abhängigkeit von der Drehfrequenz f mit Hilfe eines Python Skriptes in einem Diagramm dargestellt und eine lineare Regression durchgeführt, zeigt sich der theoretisch hergeleitete lineare Zusammenhang deutlich (vgl. Abbildung 5). Für die erste Frequenzmessung f_N ohne Zusatzgewicht ergibt sich eine Geradensteigung von $m_1 = 0,524 \pm 0,003$.
Die Messung mit Zusatzgewicht liefert die Steigung $m_2 = 0,308 \pm 0,002$. Durch die zwei zylindrischen Zusatzgewichte, die am Außenkardan angebacht werden, steigt das Trägheitsmoment.

$$\bar{\Theta}_\text{a} = \Theta_\text{a}^\text{Rotor} + \Theta_\text{a}^\text{Innenkardan} + \Theta_\text{a}^\text{Außenkardan} + \Theta_\text{z}\,, \tag{15}$$

wobei sich das zusätzliche Trägheitsmoment mit dem Steinerschen Satz zu

$$\Theta_\text{z} = 2\,\Theta_\text{Zylinder} + 2\,m_\text{Zylinder}\,d^2\,, \tag{16}$$

mit der Zylindermasse m_Zylinder und dem Abstand d zwischen Drehachse und Zylniderschwerpunkt, was der Länge zwischen Zylinderschwerounkt und dem Mittelpunkt der Anordnung entspricht, sich mit dem Zylinder- und Innenkardanradius also zu

$$d = r_\text{Zylinder} + r_\text{Innenkardan}\,, \tag{17}$$

ergibt.
Demnach wird der Proportionalitätsfaktor in Glg. 14 kleiner, wie auch in Abb. 5 erkenntlich wird.

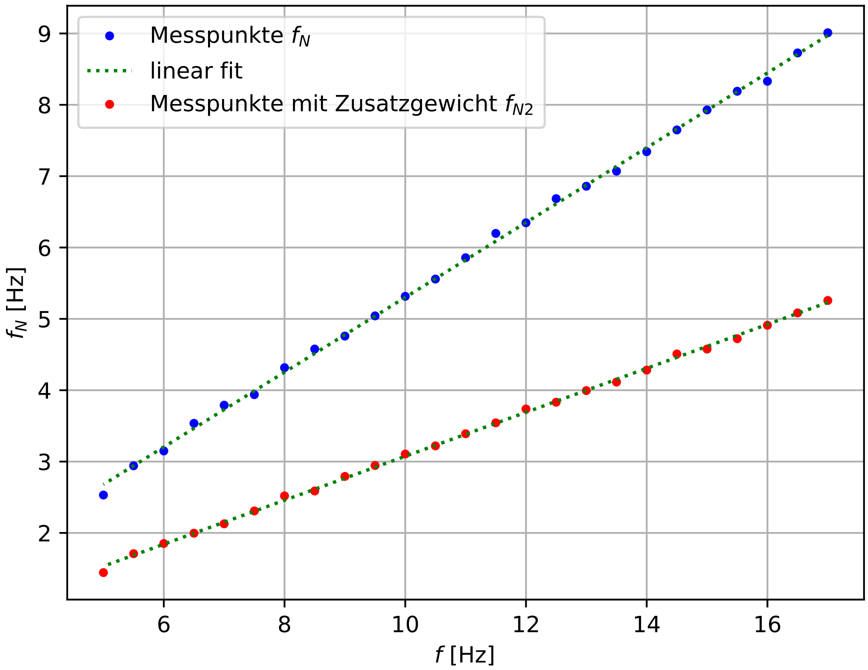


Abbildung 5: Nutationsfrequenz f_{N} bzw. f_{N2} (mit Zusatzgewicht) in Abhängigkeit von der Drehfrequenz f

4 Dämpfung des Kreisels

In diesem Teil des Versuchs wird der zeitliche Verlauf der Kreiselfrequenz des Kardankreisels beobachtet. Dazu wird eine Startfrequenz von ca. $f_0 = 33\,\mathrm{Hz}$ eingestellt und anschließend im Abstand von 30 Sekunden die momentane Frequenz des Kreisels aufgezeichnet, die wie in Abschnitt 3 durch einen Schwanenhals, welcher den Reflektordurchgang der Kreiselscheibe registriert, gemessen wird. Die Messung wird bis zum Stillstand des Kreisels durchgeführt. Die daraus resultierenden Messwerte sind in Tabelle 2 dargestellt.
Wie zu erwarten, wird die Frequenz durch Reibungswiderstände gedämpft und nimmt mit der Zeit ab, bis sie schließlich bei $t = 40$ min zu 0 geht. Für gedämpfte Vorgänge kann ein exponentieller Abfall als Ansatz für die Fitfunktion gewählt werden, der von der Annahme rührt, die Reibungskraft sei proportional zur Geschwindigkeit. Besteht ein exponentieller Zusammenhang der Art

$$f(t) = f_0\, e^{-\lambda\, t}\,, \tag{18}$$

zwischen Frequenz f und Zeit t, so gilt

$$\ln(f) = \ln(f_0) - \lambda\, t\,. \tag{19}$$

Demnach sollte sich eine Gerade ergeben, wenn die logarithmierte Frequenz über der Zeit aufgetragen wird. Werden die Messwerte für die Frequenz also logarithmiert in ein Diagramm eingetragen (vgl. Abbildung 6), so ist für die Zeiten bis ca. $t = 27$ min ein näherungsweise linearer Zusammenhang erkennbar. Fallen also nur die Messwerte bis $t = 27$ min in die Betrachtung für den exponentiellen Fit, können die Messwerte gut mit der Fitkurve in Übereinstimmung gebracht werden (vgl. Abbildung 7). Dann hat die Fitfunktion der Form aus Glg. 18 den Dämpfungsfaktor $\lambda = (6{,}29 \pm 0{,}05) \cdot 10^{-2}\,\frac{1}{\mathrm{s}}$.
Die Messpunkte für Zeiten nach $t = 27$ min können demnach nicht mit einer Reibung der Art $F_{\mathrm{R}} = \alpha \cdot v$ modelliert werden, hier müssen weitere Reibungsterme, die von anderen Potenzen der Geschwindigkeit abhängen können, eine Rolle spielen. Dazu kommt, dass beobachtet werden kann, wie sich der Kreisel nach dem Stillstand leicht in die entgegengesetzte Drehrichtung bewegt. Dies weist darauf hin, dass der Kreisel nicht exakt im Schwerpunkt gelagert ist, was für geringere Geschwindigkeiten größere abbremsende Einwirkungen hat.
Im Allgemeinen kommen Abweichungen und Unsicherheiten dadurch zustande, dass sowohl die Zeitmessung, als auch das Festhalten der Frequenzanzeige durch Öffnen der Verbindung zum Anzeigegerät durch die menschliche Reaktionszeit fehlerbehaftet ist. Auch Unexaktheiten, wie bei der bereits erwähnten Lagerung des Kreisels, führen zu Fehlern.

Tabelle 2: Messwerte Kreiselfrequenz im zeitlichen Verlauf

t [min:s]	f [Hz]	t [min:s]	f [Hz]	t [min:s]	f [Hz]
0:00	33,000	13:30	14,960	27:00	5,780
0:30	32,064	14:00	14,520	27:30	5,531
1:00	31,139	14:30	14,079	28:00	5,268
1:30	30,251	15:00	13,577	28:30	5,013
2:00	29,370	15:30	13:258	29:00	4,753
2:30	28,514	16:00	12,864	29:30	4,499
3:00	27,714	16:30	12,474	30:00	4,239
3:30	26,913	17:00	12,092	30:30	3,985
4:00	26,135	17:30	11,716	31:00	3,732
4:30	25,333	18:00	11,341	31:30	3,505
5:00	24,572	18:30	10,958	32:00	3,281
5:30	23,843	19:00	10,596	32:30	3,051
6:00	23,120	19:30	10,237	33:00	2,840
6:30	22,453	20:00	9,885	33:30	2,622
7:00	21,818	20:30	9,551	34:00	2,399
7:30	21,219	21:00	9,223	34:30	2,189
8:00	20,645	21:30	8,904	35:00	1,978
8:30	20,093	22:00	8,581	35:30	1,765
9:00	19,538	22:30	8,275	36:00	1,538
9:30	19,004	23:00	7,986	36:30	1,280
10:00	18,472	23:30	7,695	37:00	1,036
10:30	17,950	24:00	7,404	37:30	0,808
11:00	17,442	24:30	7,132	38:00	0,590
11:30	16,915	25:00	6,850	38:30	0,404
12:00	16,408	25:30	6,570	39:00	0,259
12:30	15,910	26:00	6,307	39:30	0,097
13:00	15,426	26:30	6,045	40:00	0,000

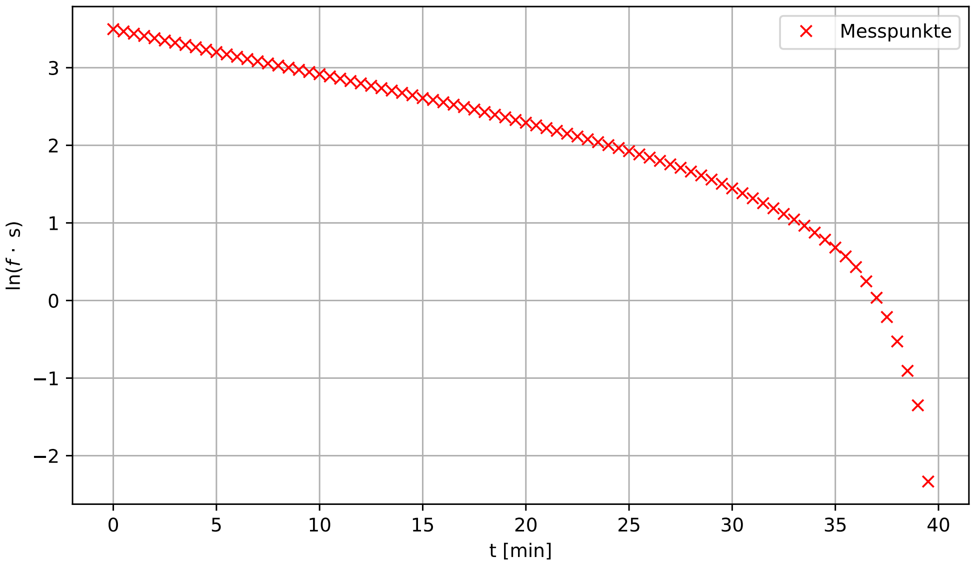


Abbildung 6: Logarithmierte Messwerte für die Frequenz $\ln(f)$ über Zeit t

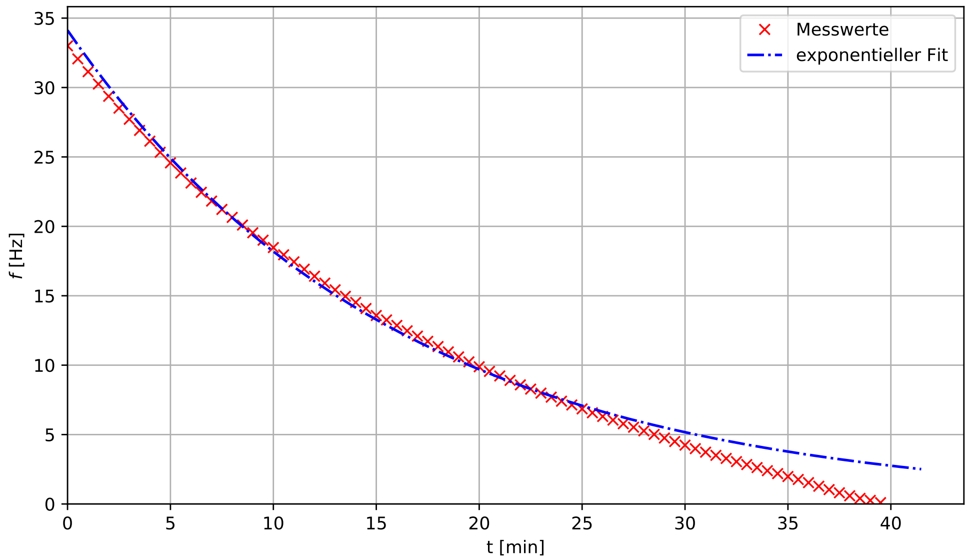


Abbildung 7: Zeitlicher Verlauf Frequenz f in Abhängigkeit von der Zeit t mit exponentiellem Fit

5 Kreisel unter Einwirkung externer Drehmomente

Nun soll das Verhalten des Kreisels unter Einfluss externer Drehmomente untersucht werden. Dabei gilt es die Fälle des zum Drehimpuls parallelen bzw. senkrechten Drehmomentes zu betrachten. Mit $\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$ ergibt sich für den parallelen Fall keine Richtungsänderung, sondern eine Zunahme (bzw. Abnahme für den antiparallelen Fall) des Drehimpulsbetrags, wie es für das Andrehen des Kreisels durch den Elektromotor passiert.
Wirkt das Drehmoment senkrecht zum Drehimpuls, so findet auch die Richtungsänderung des Drehimpulses in diese Richtung statt. Diese Drehung des Drehimpulsvektors wird als **Präzession** bezeichnet.
In diesem Versuch wird das Drehmoment durch die Gewichtskraft eines am inneren Kardanrahmen des Kardankreisels (vgl. Abbildung 8) befestigten Stabes der Länge l und Masse m_S hervorgerufen. Für ein Koordinatensystem, in dem die z-Achse mit der Hauptachse a in Abb. 8 zusammenfällt, wirkt die Gewichtskraft am Schwerpunkt des Stabes in negative z-Richtung. Für das Drehmoment gilt dann

$$\vec{M} = \vec{r}_\mathrm{s} \times m_\mathrm{s}\, g\, \vec{e}_z\,, \tag{20}$$

wobei $\vec{r}_\mathrm{s}$ den Vektor vom Kreiselmittelpunkt zum Schwerpunkt des Stabes, also den Hebelarm, bezeichnet. Da $\vec{F}_\mathrm{G}$ parallel zu $\vec{e}_z$ ist, hat $\vec{M}$ lediglich x- und y-Komponente, was gleichzeitig bedeutetet das L_z konstant ist. Zusätzlich gilt wegen $\vec{M} \perp \vec{L}$, dass $L^2 = const.$. Da $|M|$ konstant ist und unter der Annahme, dass der Winkel zwischen Figuren- und z-Achse klein bleibt sowie, dass die Präzessionsfrequenz ω_P im Vergleich zu ω sehr klein ist, kann hergeleitet werden, dass

$$\vec{M} = \vec{\omega}_\mathrm{P} \times \vec{L}\,, \tag{21}$$

woraus für den Betrag der Präzessionswinkelgeschwindigkeit

$$\omega_\mathrm{P} = \frac{r_\mathrm{s} \cdot m_\mathrm{s} \cdot g}{\Theta_\mathrm{c}} \frac{1}{\omega} = \gamma \frac{1}{\omega}\,, \tag{22}$$

mit dem Hauptträgheitsmoment Θ_c folgt.
Es ist zu beachten, dass einige Vereinfachungen vorgenommen werden, um diesen Ausdruck zu erhalten. Einer der unbeachteten Faktoren, stellt die durch das anfängliche Fallen des Stabes, welches sich vor dem Einstellen des Drehmoments ereignet, verursachte Nutation. Diese klingt in der Praxis durch die auftretende Reibung recht schnell wieder ab und lässt die Präzession dann als regulär erscheinen. Aufgrund dieses Effekts wird die Präzession in diesem Versuch auch als **pseudoreguläre Präzession** bezeichnet.

Im Praktikumsversuch wird die Periodendauer der Präzession in Abhängigkeit von der Kreiselfrequenz gemessen. Da diese beiden Größen aufgrund des langen Stabes, der sonst mit dem Schwanenhals kollidieren würde,

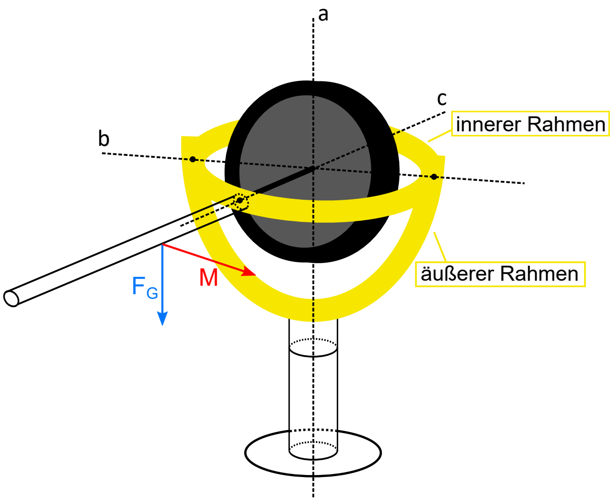


Abbildung 8: Skizze Kardankreisel mit externem Drehmoment durch Stab

nicht gleichzeitig gemessen werden können, wird die Kreiselfrequenz jeweils vor (f_1) und nach einem Präzessionsumlauf (f_2) gemessen. Aus diesen Werten kann durch Bildung deren Mittelwertes f näherungsweise die Kreiselfrequenz während der Präzession bestimmt werden. Die so erhaltenen Messwerte sind in Tabelle 3 zu sehen.

Tabelle 3: Präzessionsdauer T in Abhängigkeit von der Drehfrequenz f

f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f [Hz]	T [s:ms]	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f [Hz]	T [s:ms]
27,172	26,496	26,834	11:63	15,998	15,703	15,851	7:37
25,966	25,457	25,712	11:92	15,506	15,294	15,400	7:26
25,246	24,787	25,017	11:32	15,053	14,800	14,927	6:95
24,513	24,089	24,301	10:96	14,532	14,214	14,373	6:89
23,441	23,048	23,245	10:46	14,061	13,833	13,947	6:53
22,812	22,414	22,613	10:26	13,498	13,289	13,394	6:24
22,201	21,793	21,997	9:71	13,017	12,784	12,901	6:02
21,118	20,758	20,938	9:32	12,485	12,289	12,387	5:76
20,364	20,025	20,195	9:20	11,429	11,227	11,328	5:31
19,762	19,382	19,572	9:01	11,032	10,862	10,947	5:10
19,160	18,821	18,991	8:71	10,381	10,183	10,282	4:81
18,686	18,315	18,501	8:39	9,670	9,458	9,564	4:54
18,018	17,680	17,849	8:17	9,073	8,875	8,974	4:25
17,551	17,286	17,419	8:12	8,547	8,384	8,466	4:18
17,123	16,845	16,984	7:76	8,061	7,861	7,961	4:06
16,568	16,320	16,444	7:47				

Aus den Werten für T lassen sich mit

$$T = \frac{1}{f_\mathrm{P}} = \frac{2\pi}{\omega_\mathrm{P}}\,, \tag{23}$$

die Präzessionsfrequenz bzw. -winkelgeschwindigkeit berechnen, die anschließend über der Kreiselfrequenz aufgetragen werden (vgl. Abbildung 9). Das Diagramm erfüllt den theoretisch hergeleiteten antiproportionalen Zusammenhang. Um den Vorfaktor γ (vgl. Glg. 22) zu bestimmen, wird mittels eines Python Skriptes eine lineare Regression für $x = \frac{1}{\omega}$, $y = \omega_\mathrm{P}$ durchgeführt (vgl. Abbildung 10).
Daraus ergibt sich eine Steigung von $\gamma = (77,39 \pm 1,01)\,\frac{1}{\mathrm{s}^2}$.
Die Abweichungen vom antiproportionalen Zusammenhang, die insbesondere in Abb. 9 deutlich erkennbar sind, können zu einem großen Teil auf die Kreiselfrequenzbestimmung zurückgeführt werden. Denn die zeitlichen Abstände, die zwischen der Messung von f_1 bzw. f_2 und dem tatsächlichen Zeitraum der Präzession liegen, können schnell unterschiedlich ausfallen, sodass der Mittelwert f bezüglich des Zeitpunktes nicht zwingend mit dem Präzessionszeitraum korreliert. Auch die Messung der Präzessionsdauer mithilfe der Stoppuhr, ist aufgrund

der Verzögerungen durch die menschliche Reaktionszeit fehlerbehaftet. Hier sind ebenfalls Ungenauigkeiten im Versuchsaufbau als Fehlerquelle anzusehen.

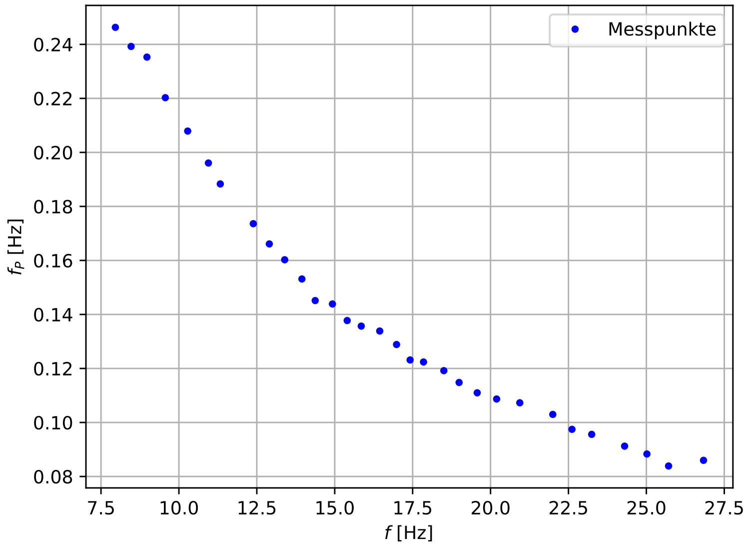


Abbildung 9: Präzessionsfrequenz f_{P} in Abhängigkeit von der Kreiselfrequenz f

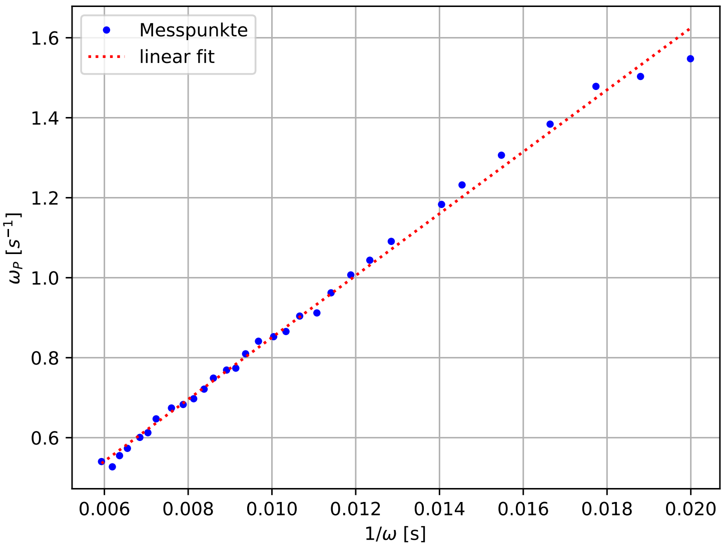


Abbildung 10: Präzessionkreisfrequent ω_{P} in Abhängigkeit von der inversen Kreisfrequenz ω

6 Hauptträgheitsmomente

In Abschnitt 3 und 5 ergeben sich jeweils aus den Fitfunktionen Steigungen (vgl. Tabelle ref), die von den Hauptträgheitsmomenten der Anordnung abhängen. Wie bereits in den jeweiligen Abschnitten erklärt, bestehen die Zusammenänge

$$m_1 = \frac{\Theta_\mathrm{c}}{\sqrt{\Theta_\mathrm{a}\,\Theta_\mathrm{b}}}\,, \tag{24}$$

$$m_2 = \frac{\Theta_\mathrm{c}}{\sqrt{(\Theta_\mathrm{a} + \Theta_\mathrm{z})\,\Theta_\mathrm{b}}}\,, \tag{25}$$

$$\gamma = \frac{m_\mathrm{s}\,g\,r_\mathrm{s}}{\Theta_\mathrm{c}} \tag{26}$$

$$\tag{27}$$

aus denen sich die Werte der Trägheitsmomente Θ_a, Θ_b und Θ_c berechnen lassen.

6.1 Trägheitsmoment Θ_a

Durch Bilden des Verhältnisses zwischen m_1 und m_2 ergibt sich aus den Gleichungen 24 und 25

$$\frac{m_1}{m_2} = \sqrt{\frac{\Theta_\mathrm{a} + \Theta_\mathrm{z}}{\Theta_\mathrm{a}}}\,. \tag{28}$$

Für Θ_z wird der in Gleichung 16 dargestellte Ausdruck eingesetzt, wobei $\Theta_\mathrm{Zylinder} = \frac{1}{2}\,m_\mathrm{Zylinder}\,r^2_\mathrm{Zylinder}$. Mithilfe der angegebenen bzw. gemessenen Abständen sowie der gegebenen Zylindermasse berechnet sich das zusätzliche Trägheitsmoment zu $\Theta_\mathrm{z} = 5,75 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$.
Umstellen von Gleichung 28 und Einsetzen der Werte liefert

$$\Theta_\mathrm{a} = \frac{\Theta_\mathrm{z}}{\frac{m_1^2}{m_2^2} - 1} = 3,036 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\,. \tag{29}$$

6.2 Trägheitsmoment Θ_c

Es ist offensichtlich die einfachste Möglichkeit, Θ_c direkt aus dem Faktor γ durch Umstellen nach

$$\Theta_\mathrm{c} = \frac{m_\mathrm{s}\,g\,r_\mathrm{s}}{\gamma}\,, \tag{30}$$

mit dem Abstand r_s vom Kreiselmittelpunkt zum Stabschwerpunkt, der sich aus dem angegebenen Abstand zwischen Mittelpunkt zu äußerem Rand des Innenkardans $r_\mathrm{I} = 10,91\,\mathrm{cm}$ sowie der Ausmessung des Stabschwerpunktes, der sich bei $s = 16,1\,\mathrm{cm}$ bezüglich dem Rahmen befindet. Zur Messung des Stabschwerpunkts wird dieser an die Kante eines Tisches gelegt und solange von der Tischkante weggezogen, bis der Stab geradeso nicht herunterfällt. Dieser Punkt ist dann gerade der Schwerpunkt.
Mit der gegebenen Stabmasse $m_\mathrm{s} = 330\,\mathrm{g}$, der Erdbeschleunigung $g = 9,81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ und dem Abstand r_s ergibt sich dann

$$\Theta_\mathrm{c} = 1,129 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\,. \tag{31}$$

6.3 Trägheitsmoment Θ_b

Aus $m_1 = \frac{\Theta_\mathrm{c}}{\sqrt{\Theta_\mathrm{a}\,\Theta_\mathrm{b}}}$ folgt der Zusammenhang

$$\Theta_\mathrm{b} = \frac{\Theta_\mathrm{c}^2}{\Theta_\mathrm{a}\,m_1^2}\,, \tag{32}$$

für das Trägheitsmoment Θ_b. Einsetzen des bereits berechneten Trägheitsmoments Θ_c und der Geradensteigung m_1 ergibt das Ergebnis

$$\Theta_\mathrm{b} = 1,530 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\,. \tag{33}$$

Die Ergebnisse für die Trägheitsmomente sind, was die Größenreihenfolge betrifft, sinnvoll. Das größte Trägheitsmoment ist Θ_a, da sich um die a-Achse am meisten »mitdreht« und damit zum Trägheitsmoment beiträgt (vgl. Abschnitt 3). Demnach ist es logisch, dass Θ_c den kleinsten Wert aufweist. Denn um die c-Achse dreht sich lediglich der Kreisel, jedoch keiner der beiden Rahmen.

In diesem Aufgabenteil sollte außerdem die Masse M des Kreisels (Radius $R = 6,75\,\mathrm{cm}$) ermittelt werden. Θ_c lässt sich als Trägheitsmoment eines Kreisel, der näherungsweise die Form des platten Zylinders ausfweist, im Allgemeinen schreiben als

$$\Theta_c = \frac{1}{2} M R^2 \,. \tag{34}$$

Daraus folgt für die Masse M, dass

$$M = \frac{2\,\Theta_c}{R^2} = 4,96\,\mathrm{kg}\,, \tag{35}$$

was bezüglich der Größenordnung ein passender Wert sein sollte, jedoch nicht viel genauer beurteilt werden kann, da der Kreisel in den Rahmen des Kardans gelagert ist und beim Anheben oder Verschieben des Kreisel daher seine Gesamtmasse zu spüren ist, nicht nur die des inneren Kreisels. Daher ist auch ein Wiegen zur Überprüfung nicht möglich.

Unsicherheiten der Trägheitsmomente setzen sich hier naütrlich aus all den Fehlerquellen der Versuche 3 und 5 zusammen.

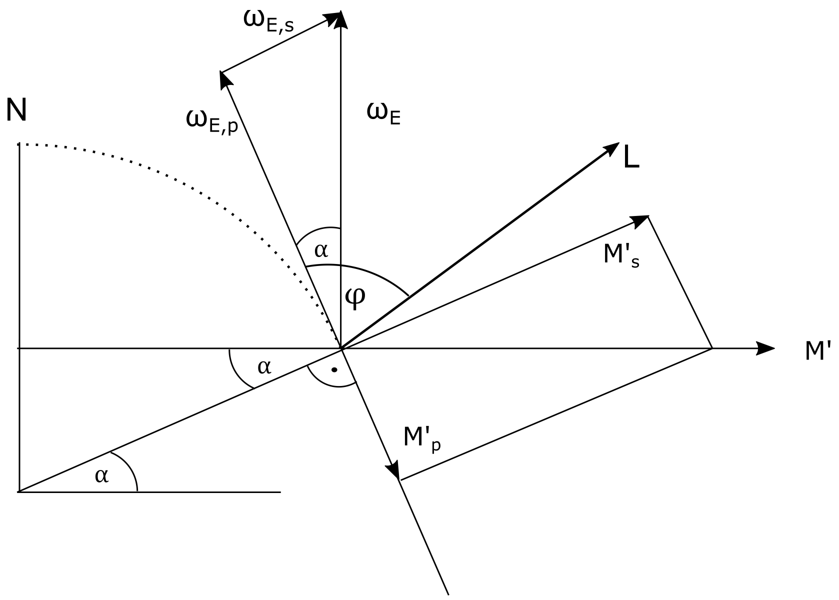


Abbildung 11: Skizze Drehmoment und Drehimpuls im beschleunigten Bezugssystem

7 Kreisel im beschleunigtem Bezugssystem

Im letzten Versuch dieser Reihe ist der Kreisel auf einer kippbaren Standfläche befestigt, die sich auf die Kippung α (vgl. Abbildung 11) einstellen lässt, während sie in der Horizontalen rotiert. Dadurch lässt sich die Erde mit ihrer Umdrehung um die eigene Achse und die daraus resultierenden Vorgänge eines Kreisels an der geographischen Breite α modellieren. Denn für die langsame Erdrotation müsste die Drehung des Kreisels sehr schnell sein, um die Lagerreibung zu überwinden und den gewünschten Effekt zu zeigen. Daher wird diese Anordnung, bei der ω_E erhöht werden kann und die Kreiselrotation daher nicht so schnell sein muss, genutzt. Diese Rotation stellt eine Zwangsdrehung für den Kreisel dar und bewirkt das Drehmoment $\vec{M}'$ auf die Befestigung.

$$\vec{M}' = \vec{\omega}_\mathrm{E} \times \vec{L}\,. \tag{36}$$

Das Drehmoment $\vec{M}$, welches auf den Kreisel wirkt, ist $\vec{M}'$ gerade entgegengesetzt und verursacht eine Ausrichtung des Drehimpulses des Kreisels in der festen horizontalen Ebene nach Norden, wie in Abb. 11 nachzuvollziehen ist . Dann gilt $|\vec{M}| = 0$.

Auch die praktischen Durchführung bestätigt diese theoretische Vorhersage und der Drehimpuls des Kreisels taumelt sich in Nordrichtung ein, wird er zuvor händisch etwas angedreht.

Literatur

[1] Wolfgang Demtröder, Experimentalphysik 1, 5. Auflage

[2] Inhalte aus der Praktikumsliteraturmappe