



~~SS~~/WS 20.10.../11...

Praktikum: (P1/P2) (Mo/Di/Mi/Do) Gruppe-Nr: 20...

Name: Fops ..... Vorname: Nils .....

Name: Mörtler ..... Vorname: Matthias .....

Versuch: Pendel P1-20, 21 ..... (mit/ohne) Fehlerrechnung

Betreuer: Vanessa Wiedmanns ..... Durchgeführt am: 14.02.2010

Abgabe am: 11.01.2011

Rückgabe am: 18.01.2011

Begründung:

2.1) Steigung  
1.2) Fehlerrechnung sys. Fehler  
→ Probekoll für Webseite?  
↳ Vorbereitung (Kleinigkeiten) + Auswertung  
↳ Messprotokoll scannen.

Vanessa.Wdm@gmx.de

2. Abgabe am: .....

Ergebnis: (+ / 0 / -)

Fehlerrechnung: ja / nein

Datum: 02. FEB. 2011

Handzeichen: VW

Bemerkungen:



**Versuche P1-20, 21:**

**Pendel**

**Raum F1-11**

Schwingungen sind in der Natur sehr häufig auftretende Bewegungsformen und deshalb in der Physik so wichtig. Der Begriff 'Schwingung' zieht sich durch alle Teilgebiete der Physik hindurch. Bei diesem Versuch geht es um mechanische Schwingungen. Er bietet die Gelegenheit, sich mit einer ganzen Reihe von Schwingungsaspekten sowie einigen Problemen der Bewegung starrer Körper zu beschäftigen. Meistens werden die Versuchsbedingungen so gewählt, daß es gestattet ist, das bei den Schwingungen wirkende Kraftgesetz (wirksame Kraft als Funktion des Ortes) der einfacheren Mathematik wegen zu linearisieren. Die mathematischen Lösungen sind dann harmonische Schwingungen. Daß das nur ein Verhalten im Grenzfall ist, von dem auch bei noch recht 'normalen' Verhältnissen schon erhebliche Abweichungen auftreten, wird bei diesen Versuchen deutlich.

**Achtung: Die schwingende Kugel des Fadenpendels ist gefährlich! Aufpassen und die Absperrung beachten!**

**Aufgaben:**

**1.1 Berechnen Sie vorbereitend auf den Versuch die reduzierte Pendellänge  $l_r$  eines physikalischen Pendels**, das aus einem zylindrischen, an einem Ende drehbar aufgehängten Stab der Länge  $L$  besteht. Überzeugen Sie sich rechnerisch davon, daß Massenänderungen im Abstand  $l_r$  vom Drehpunkt die Schwingungsdauer nicht verändern. Die Klauen, mit denen die Schneiden des Pendellagers am Stab befestigt sind, sollten also nur zu geringfügigen Abweichungen des Rechenwerts vom Meßwert führen.

**1.2 Bestimmen Sie die Fallbeschleunigung  $g$  mit Hilfe des Reversionspendels.**

Suchen Sie experimentell jenen Schneidenabstand auf, der der reduzierten Pendellänge entspricht, bei dem also die Schwingungsdauern gleich sind, wenn das Pendel einmal um die eine, dann um die andere Schneide schwingt. Messen Sie dabei ein geeignetes kleines Intervall um den berechneten Wert herum sorgfältig aus. Beschränken Sie sich auf kleine Auslenkungen des Pendels.

*Frage:* Mit welchem systematischen Fehler müssen Sie bei Ihrer Amplitudenwahl noch rechnen?

Tragen Sie nach jeder Messung die Schwingungsdauer in ein Diagramm für beide Schwingungsdauern über dem Schneidenabstand ein. Sie erkennen bald die nähere Umgebung von  $l_r$  und können die weiteren Meßpunkte entsprechend wählen. Entnehmen Sie dem Diagramm  $l_r$  und  $T(l_r)$  und berechnen Sie daraus  $g$ .

Bei ausführlicher Fehlerrechnung ist hier Ausgleichsrechnung nötig. Bei der Messung wird eine Lichtschranke mit Zeitmeßeinrichtung benutzt. Eine Messung kann nur bei offener Schranke (rote Leuchtdiode an der Schranke leuchtet) gestartet werden. Der relative Eichfehler der Zeitmeßeinrichtung beträgt  $\pm 0,2\%$ . Dazu kommt bei Zusammenwirken mit Lichtschranke und Start-Stop-Steuergerät noch ein meßzeitunabhängiger Fehler, der aus einer Meßreihe zu bestimmen ist, bei der nur die einstellbare Anzahl der Schwingungen für die Zeitmessung verändert wird. Bei den Messungen kann es zweckmäßig sein, durch entsprechende Bereichswahl die Anzeigegenauigkeit um eine Dezimale zu steigern und dafür auf die Anzeige der höchsten Zehnerstelle zu verzichten. Die Lichtschranke muß sorgfältig justiert werden so, daß das Schalten sehr nahe beim Nulldurchgang erfolgt.

*Zum Überlegen:* Wie sieht wohl ein Reversionspendel aus, bei dem der Schneidenabstand fest ist, und das dennoch auf gleiche Schwingungsdauern um beide Schneiden eingestellt werden kann? Hat es Vorteile?

**2.1 Bestimmen Sie die Fallbeschleunigung  $g$  mit Hilfe des Fadenpendels bei kleinen Auslenkungen.**

Auch hier kann eine Lichtschranke benutzt werden. (Die Kugel nicht in den Aufhängerdraht fallen lassen. Der Draht reißt sonst.)

**2.2 Untersuchen Sie die Abhängigkeit der Schwingungsdauer des Fadenpendels von der Schwingungsweite.** Messen Sie fortlaufend, beginnend bei großer Auslenkung. Vergleichen Sie die Abhängigkeit mit theoretischen Vorhersagen. Stellen Sie die Ergebnisse in geeigneter Weise graphisch dar.

**3.1 Stellen Sie bei zwei gleichartigen Pendeln (Massen  $m$ ; Abstand  $L_Z$  zwischen Drehpunkt und Zentrum der Pendelscheibe) durch Verschieben einer der Pendelscheiben gleiche Schwingungsdauern  $T_0$  ein.** Verwechseln Sie hier und im weiteren nicht  $L_Z$  mit dem Schwerpunktsabstand.

**3.2 Koppeln Sie die Pendel mittels einer Schraubenfeder (Federkonstante  $D$ ) in jeweils gleichem Abstand  $l$  von den Drehpunkten und messen Sie die Schwingungsdauern  $T_{gl}$  und  $T_{geg}$  der beiden Fundamentalschwingungen.** Das sind die beiden Schwingungsformen, bei denen keine Schwebung auftritt. Wiederholen Sie die Messungen bei veränderter Koppellänge  $l$ , die aber, wie auch im ersten Fall keine sehr feste Kopplung bewirken soll,  $\Delta(T^2) \ll T^2$ . Vergleichen Sie  $T_0$ ,  $T'_{gl}$ ,  $T'_{geg}$ ,  $T''_{gl}$ ,  $T''_{geg}$ . Welche Schwingungsdauern bleiben konstant? Welche Schwingungsdauer ist kopplungsabhängig? Berechnen Sie daraus mit Hilfe der Theorie die Werte von  $mgL/\Theta$  und  $Dl^2/\Theta$  (mit  $L$  ist hier der Abstand vom Drehpunkt zum Schwerpunkt gemeint). Vergleichen Sie das resultierende Trägheitsmoment  $\Theta$  mit dem aus den gegebenen Daten berechneten Wert, und berechnen Sie dann auch die Federkonstante  $D$ . Bestimmen Sie  $D$  auch mit Hilfe einer statischen (eingebaut als Koppelfeder oder auch anders) und einer weiteren dynamischen Methode (nämlich im Federpendel mit verschiedenen Massen).

**3.3 Messen Sie die Schwingungsdauer  $T_{osz}$  und die Schwebungsdauer  $T_{mod}$  bei Anregung der gekoppelten Pendel zu Schwebungen.** Dabei soll eine der Koppellängen von 3.2 benutzt werden. Prüfen Sie den theoretischen Zusammenhang von  $T_{osz}$  und  $T_{mod}$  mit  $T_{gl}$  und  $T_{geg}$ .

#### **Zubehör:**

- Bodenstativ mit Schneidenpfanne für das Reversionspendel. Dieses besteht aus einem zylindrischen Stab (0,962m; 4,96 g/cm), einer festen und einer verschiebbaren Klaue mit Schneide (Klauenmasse ca. 86g; Klauenhöhe 12mm, Schneide 4mm unterhalb der Klauenmitte bzw. 2mm oberhalb der unteren Klauenfläche). Die feste Klaue befindet sich an einem Stabende, die Schneide also 10mm vom Stabende entfernt. Von dieser Schneide ab zählt die in den Stab eingeritzte Teilung, die auf  $\pm 0.2$ mm genau ist.
- 2 Lichtschranken für Aufgaben 1 und 2, justierbar bezüglich des Pendelstabes, mit Start-Stop-Steuergerät und digital anzeigendem Zeitmeßgerät (Info dazu am Versuchsplatz!)
- Fadenpendel: dünner Stahldraht,  $l \cong 2$ m, aktuelle Länge am Versuchsplatz angegeben, Aufhängung mit richtungsstabilisierendem Kugellager, Eisenkugel von 860g Masse) mit Winkelskala an der Wand;
- zwei koppelbare Pendel: Pendelschaft mit einer Masse je Länge von 7,44 g/cm, Pendelscheibe mit der Masse 1221g einschließlich des in ihr steckenden Schaftabschnitts, Entfernung zwischen Drehpunkt und Scheibenzentrum, wenn der Schaft gerade nicht durch die Scheibe hindurchragt, 1020mm, Masse der Koppelfederbefestigung 44g, Durchmesser der Pendelscheibe 100mm;
- verschiedene Schraubenfedern als Koppelfedern - Achtung: nur mäßig dehnen, um plastische Verformung zu vermeiden!
- Maßstab mit mm-Teilung
- weiterer Maßstab, aufstellbar, mit verschiebbaren Marken
- Satz von Hängegewichtsstücken
- zwei Stoppuhren

**Die Versuchsausstattung ist trotz der Doppelbelegung nur einmal vorhanden. Die beiden Praktikantengruppen arbeiten unabhängig an jeweils verschiedenen Teilaufgaben, die in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden können.**

#### **Literatur:**

Alle Lehrbücher der Physik!

Zu Aufg. 1 speziell: Kretschmar et al.; *Praktikum der Physik*, Kap. 3.4

Zu Aufg. 2.2 speziell: Kittel et al.; Berkeley Physics Course, *Mechanics*, Kap.7

Zu Aufg. 3 speziell: Walcher; *Praktikum der Physik*, 2. Aufl., Kap. 2.7, 7.4

## Vorbereitung: Pendel

### 1. Reversionspendel

#### 1.1 Reduzierte Pendellänge

Der Schwerpunkt ( $CM$ ) eines physikalischen Pendels sei um  $s$  vom Aufhängepunkt  $A$  entfernt. Wird das Pendel nun um den Winkel  $\phi$  ausgelenkt gilt für das rücktreibende Drehmoment  $M$ :

$$M = -m \cdot g \cdot s \cdot \sin \phi$$

Mit einer Kleinwinkel-Näherung können wir vereinfachen:

$$M = -m \cdot g \cdot s \cdot \phi$$

Die Beziehung zwischen Drehmoment und Beschleunigung lautet:

$$M = J_A \ddot{\phi} ,$$

mit dem Trägheitsmoment  $J_A$  des um  $A$  pendelnden Körpers.

Setzt man beide Gleichungen gleich erhält man die Bewegungsgleichung des Pendels:

$$\ddot{\phi} + \frac{m \cdot g \cdot s}{J_A} \cdot \phi = 0$$

Nimmt man

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_0 \cdot e^{(i\omega t)} \\ \dot{\phi} &= i\omega \phi_0 \cdot e^{(i\omega t)} \\ \ddot{\phi} &= -\omega^2 \phi_0 \cdot e^{(i\omega t)} \end{aligned}$$

als Ansatz kommt man auf:

$$\begin{aligned} -\omega^2 + \frac{mgs}{J_A} &= 0 \\ \Rightarrow \omega &= \sqrt{\frac{mgs}{J_A}} \end{aligned}$$

Hieraus kann man mit  $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$  auf die Schwingungsdauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_A}{mgs}} \text{ schließen.}$$

Nach Steiner besitzt ein Zylinder der Länge  $l$  das Trägheitsmoment

$$J_A = \frac{1}{3} m l^2 .$$

Setzt man dies in die Beziehung für die Periodendauer ein erhält man

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3} m l^2}{m g s}} .$$

und mit  $s = \frac{l}{2}$  :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{3g}} .$$

Vergleicht man das mit der Schwingdauer eines mathematischen Pendels

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_r}{g}}$$

sieht man, dass für die reduzierte Länge  $l_r$  gilt:

$$l_r = \frac{2}{3} \cdot l .$$

Nun soll untersucht werden, ob eine Massenänderung im Abstand  $l_r$  vom Drehpunkt die Schwingungsdauer beeinflusst. Um dies zu untersuchen bringt man nun die Masse  $m_0$  in diesem Abstand an. Das Trägheitsmoment des Zylinders ändert sich zu:

$$J_{A,0} = \frac{1}{3} m l^2 + m_0 \cdot \left(\frac{2}{3} l\right)^2 .$$

Einsetzen in die Schwingungsdauer ergibt:

$$\begin{aligned} T_0 &= 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3} m l^2 + m_0 \left(\frac{2}{3} l\right)^2}{\left(\frac{1}{2} m + \frac{2}{3} m_0\right) \cdot g \cdot l}} \\ \Leftrightarrow T_0 &= 2\pi \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2} m + \frac{2}{3} m_0\right) \frac{2}{3} l^2}{\left(\frac{1}{2} m + \frac{2}{3} m_0\right) \cdot g \cdot l}} \\ \Rightarrow T_0 &= 2\pi \sqrt{\frac{2}{3} \frac{l}{g}} = T \end{aligned}$$

Man sieht also, dass die zusätzliche Masse sich nicht auf die Periodendauer auswirkt und die Klauen höchstens eine geringe Abweichung herbeiführen

## 1.2 Fallbeschleunigung $g$

Aus der Gleichung für die Schwingungsdauer des mathematischen Pendels erhält man durch Umformen

$$g = l_r \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} .$$

Experimentell soll  $l_r$  bestimmt werden.  $l_r$  ist gleich dem Abstand der Schneiden, bei dem das Pendel um beide Schneiden die gleiche Schwingungsdauer besitzt.

Außerdem muss darauf geachtet werden, dass die Auslenkung des Pendels nicht zu groß wird, da dann zum einen unsere Kleinwinkel-Näherung nicht mehr gültig ist und durch die große Amplitude die Geschwindigkeit des Pendels größer wird und somit Luft-Reibungskräfte stärker greifen.

## 2. Fadenpendel

### 2.1 Fallbeschleunigung $g$

Das Bestimmen der reduzierten Länge entfällt hier, da ein Fadenpendel dem Modell des mathematischen Pendels sehr nahe kommt. Jedoch sollte die Ausdehnung der Kugel mit Radius  $r$  nicht vernachlässigt werden.

Nach Steiner gilt für das Trägheitsmoment des Pendels:

$$J = J_{Kugel} + m(l+r)^2 , \text{ mit } J_{Kugel} = \frac{2}{5} m r^2 .$$

Setzt man das Trägheitsmoment in die Gleichung für die Periodendauer ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgs}} \\ T &= 2\pi \sqrt{\frac{\frac{2}{5} m r^2 + m(l+r)^2}{mg(l+r)}} \\ T &= 2\pi \sqrt{\frac{\frac{2}{5} r^2 + (l+r)^2}{g(l+r)}} . \end{aligned}$$

Löst man nach  $g$  auf, so ergibt sich:

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{\frac{2}{5} r^2 + (l+r)^2}{l+r}$$

## 2.2 Abhängigkeit der Schwingungsdauer von der Schwingungsweite

Aufgrund großer Auslenkungen gilt  $\sin \phi \approx \phi$  nicht mehr, daher muss nun die Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung gefunden werden.

$$J \cdot \ddot{\phi} + m \cdot g \cdot \sin \phi = 0 \quad .$$

Laut Hilfsliteratur führt dies zu einer Schwingungsdauer von

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{2}{5}r^2 + (l+r)^2}{g(l+r)}} \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) + \frac{9}{64}\sin^4\left(\frac{\phi}{2}\right) + \dots\right) \quad .$$

Allerdings sind hier erhebliche Abweichungen zu erwarten, da Reibungskräfte vollkommen vernachlässigt wurden.

## 3. Gekoppelte Oszillatoren

### 3.1 Einstellen gleicher Schwingungsdauer bei gleichartigen Pendeln

Es sollen zwei gleichartige Pendel auf die gleiche Schwingungsdauer abgestimmt werden. Dazu stellt man eins der beiden Pendel fest ein und versucht das zweite durch verschieben des Pendelgewichts ( $L_Z$  wird variiert) mit dem ersten Pendel zu synchronisieren.

### 3.2 Kopplung mittels Schraubenfeder

In diesem Versuch sollen die beiden Schwingungsformen untersucht werden, bei denen keine Schwebungen auftreten, nämlich Schwingungen in Phase, bzw. genau gegenphasig.

Gemessen wird für verschiedene Koppellängen  $l$ , allerdings sollte die Kopplung nicht zu fest sein ( $\Delta T^2 \ll T^2$ ).

Die Bewegungsgleichung für gekoppelte Schwingungen lautet

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}_1 + \omega_0^2 \phi_1 - \Omega(\phi_1 - \phi_2) &= 0 \\ \ddot{\phi}_2 + \omega_0^2 \phi_2 - \Omega(\phi_2 - \phi_1) &= 0 \end{aligned} \quad , \text{ mit } \omega_0 = \sqrt{\frac{mgL}{J}} \quad \text{und} \quad \Omega = \sqrt{\frac{Dl^2}{J}}$$

( $L \rightarrow$  Abstand zum Schwerpunkt)

Mit dem Ansatz

$$\begin{aligned} \phi &= \vec{\phi}_0 \cdot e^{i\omega t} \\ \ddot{\phi} &= -\omega^2 \vec{\phi}_0 \cdot e^{i\omega t} \end{aligned} \quad ,$$

mit  $\vec{\phi}_0 = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad .$

Setzt man ein erhält man:

$$\begin{aligned}(-\omega^2 + \omega_0^2 + \Omega^2)\phi_1 - \Omega\phi_2 &= 0 \\(-\omega^2 + \omega_0^2 + \Omega^2)\phi_2 - \Omega\phi_1 &= 0\end{aligned}$$

Soll dieses LGS eindeutig lösbar sein, so muss

$$-\omega^2 + \omega_0^2 + \Omega^2 = \pm \Omega^2 \text{ sein.}$$

Daraus folgt

$$\omega^2 = \omega_0^2 \text{ (in Phase) und } \omega^2 = \omega_0^2 + 2\Omega^2 \text{ (gegenphasig).}$$

Man sieht, dass die gleichphasigen Schwingung von der Feder unabhängig ist. Dies scheint auch logisch sinnvoll, da die Feder nur „mitschwingt“ und nicht gestaucht oder gestreckt wird.

Die Federkonstante kann man über zwei Wege bestimmen.

#### 1) Statische Bestimmung

Hierzu werden verschiedene Massen  $m$  an die Feder angehängt und die Ausdehnung  $x$  der Feder gemessen. Es gilt:

$$D = \frac{m \cdot g}{x}$$

#### 2) Dynamische Bestimmung

Man hängt eine Masse  $m$  an die Feder, lenkt sie aus und beobachtet die Schwingung, wenn man die Masse loslässt. Wegen

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$$

gilt für die Federkonstante

$$D = 4\pi^2 \frac{m}{T^2}$$

### 3.3 Schwebungen

Im letzten Aufgabenteil werden „Schwebungen“ untersucht. Versetzt man eins der Pendel in eine Schwingung, so beginnt auch das gekoppelte zweite Pendel damit zu schwingen. Die Schwingung des zweiten Pendels wird dabei immer stärker und die des ersten Pendels folglich geringer bis es zur Ruhe kommt. Nun hat Pendel 2 eine maximale Amplitude und der Prozess beginnt von vorne, nur mit vertauschten Rollen.

Treten Schwebungen auf, so lauten die Lösungen der Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \phi_0 \cos\left(\frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} - \omega_0}{2} t\right) \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} + \omega_0}{2} t\right) \\ \phi_2 &= \phi_0 \sin\left(\frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} - \omega_0}{2} t\right) \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} + \omega_0}{2} t\right) .\end{aligned}$$

Man erkennt, dass die Gleichungen zwei Schwingungszustände beschreiben, nämlich  $\omega_{mod} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} - \omega_0}{2}$  und  $\omega_{osz} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} + \omega_0}{2}$ . Aus den Kreisfrequenzen lassen sich  $T_{mod}$  und  $T_{osz}$  ableiten.

$$\begin{aligned}T_{mod} &= \frac{2\pi}{\omega_{mod}} = \frac{2T_{gl} T_{geg}}{T_{gl} - T_{geg}} \\ T_{osz} &= \frac{2\pi}{\omega_{osz}} = \frac{2T_{gl} T_{geg}}{T_{gl} + T_{geg}}\end{aligned}$$

Dies soll experimentell bestätigt werden.

## Pendel

In diesem Versuch betrachten wir mechanische Schwingungen anhand des Pendels. Wird dieses um einen kleinen Winkel  $\varphi$  ausgelenkt und dann losgelassen, schwingt es. Dabei wirkt ein rücktreibendes Drehmoment  $M$ . Es gilt

$$M = -mgs \sin \varphi$$

wobei wir aufgrund des kleinen Winkels folgende Näherung machen:

$$\sin \varphi \approx \varphi$$

$$\Rightarrow M \approx -mgs\varphi \quad (1)$$

Aufgrund des Drehmomentes kommt es zur beschleunigten Drehbewegung, hier gilt:

$$M = J \ddot{\varphi} \quad (2)$$

Mittels (1) und (2) bekommt man nun die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators für Pendel

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgs}{J} \varphi = 0 \quad (3)$$

Dies lässt sich auch schreiben, als:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0, \text{ wobei } \omega = \sqrt{\frac{mgs}{J}}$$

ist. Für die Schwingungsdauer gilt des Weiteren:

$$T = 2\pi \cdot \frac{1}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgs}} \quad (4)$$

Die Lösung unserer Dgl. lautet:

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega t + \beta) \quad (5)$$

## Aufgabe 1

### 1.1

Als Vorbereitung sollen wir die reduzierte Pendellänge  $l_r$  des physikalischen Pendels ausrechnen.

Die reduzierte Pendellänge ist die Pendellänge, die ein mathematisches Pendel haben würde, um mit gleicher Periodendauer  $T$  zu schwingen.

Das Trägheitsmoment des zylindrischen Stabes lautet:

$$J = \frac{1}{3} m l^2 \quad (7)$$

Aus Symmetrie gründen, liegt der Schwerpunkt des Stabes in der Mitte, es gilt also:

$$s = \frac{1}{2} l \quad (8)$$

Diese beiden Gleichungen werden bei (4) eingesetzt und man erhält

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{3} \frac{m l^2}{m g l} \cdot 2} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3} \frac{l}{g}} \quad (9)$$

Für das mathematische Pendel hingegen gilt:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_r}{g}} \quad (10)$$

daraus folgt das für  $l_r$  gelten muss:

$$l_r = \frac{2}{3} l \quad (11)$$

Nun wollen wir prüfen ob sich durch das anbringen einer Zusatzlast  $m'$  in diesem Abstand die Schwingungsdauer beträchtlich nicht verändert.

Für das neue Trägheitsmoment  $J'$  gilt:

$$J' = \frac{1}{3} m l^2 + m' \left(\frac{2}{3} l\right)^2 \quad (12)$$

Berechnen wir nun mittels Formel (4) und (12) die Schwingungsdauer, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 T &= 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3}ml^2 + m' \frac{4}{3}l^2}{\frac{1}{2}mlg + \frac{2}{3}m'gl}} \\
 &= 2\pi \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{3}m + \frac{4}{3}m'\right) l^2}{\left(\frac{1}{2}m + \frac{2}{3}m'\right) g}} \\
 &= 2\pi \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2}m + \frac{2}{3}m'\right)^2 l}{\left(\frac{1}{2}m + \frac{2}{3}m'\right) g}} \\
 &= 2\pi \sqrt{\frac{2}{3} \frac{l}{g}} \quad (13)
 \end{aligned}$$

Das ist die gleiche Schwingungsdauer wie wir schon in (9) berechnet haben, das bedeutet, das ein Zusatzgewicht bei der reduzierten Pendellänge keinen Einfluss auf die Periodendauer hat. ✓

1.2.

Nun wollen wir die Ortskonstante bzw. Fallbeschleunigung  $g$  bestimmen. Die Formel hierfür lautet durch Umformen von (10):

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2} \quad (14)$$

Aus der Formel sieht man ohne Probleme, dass wir sowohl  $l_1$  als auch die dazugehörige Periodendauer bestimmen können.  $l_1$  finden wir in dem wir den 5. Schnittabstand bestimmen, bei dem die Periodendauer gleich ist, wenn das Pendel um die eine, und dann um die andere Schneide schwingt. Dann wird  $T$  bei  $l_1$  bestimmt. Wobei wir auch in der Umgebung von  $l_1$  messen. Es ist wichtig die Amplitude des Pendels klein zu halten, da ansonsten der Fehler aus unserer Näherung  $\sin \varphi \approx \varphi$  zu groß wird. Zudem nimmt die Reibung, aufgrund der höheren Geschwindigkeit zu. ✓

## Aufgabe 2

2.1.

Auch in diesem Versuch bestimmen wir die Fallbeschleunigung  $g$  diesmal jedoch mittels des Fadenpendels, welches näherungsweise auch als mathematisches Pendel angesehen werden kann. Das Trägheitsmoment einer Kugel mit Abstand  $l+r$  vom Auf-

Hängepunkt lautet nach dem Satz von Steiner:

$$J = \frac{2}{5} m r^2 + m (l+r)^2 \quad (15)$$

hier beträgt  $s = (l+r)$ , somit bekommen wir mit Gleichung (4):

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \sqrt{\frac{\frac{2}{5} m r^2 + m (l+r)^2}{m g (l+r)}} \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{\frac{2}{5} r^2 + (l+r)^2}{g(l+r)}} \quad (16) \end{aligned}$$

und somit für  $g$ :

$$g = 4\pi^2 \frac{\frac{2}{5} r^2 + (l+r)^2}{T^2 (l+r)} \quad (17)$$

2.2

Jetzt betrachten wir unsere Schwingungsdauer bei größeren Auslenkungen. Wobei wir die Näherung  $\sin f \approx f$  nicht mehr verwenden können, da der Fehler zu groß ist. Daher gilt für unsere DGL nun:

$$\ddot{\varphi} + \frac{m g l}{J} \sin \varphi = 0$$

Für die Schwingungsdauer gilt:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{2}{3}r^2 + (l+r)^2}{g(l+r)}} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{9}{64} \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right) + \dots\right)$$

Da hier bei jedoch keinerlei Reibungseffekte betrachtet wurden, wird es dennoch zu Abweichungen kommen. ✓

### Aufgabe 3.

#### 3.1

Hier sollen wir zwei gleichartige Pendel untersuchen und beide auf die gleiche Schwingungsdauer  $T_0$  einstellen. Dazu stellen wir zuerst beim ersten Pendel ein festes  $T_0$  ein und ändern dann beim zweiten Pendel die Position des Pendelgewichts  $L_2$  bis wir auch hier die gleiche Schwingungsdauer haben. ✓

#### 3.2.

Bei diesem Teilversuch koppeln wir zwei Pendel mittels einer Schraubenfeder. Dann muss die Schwingungsdauer für gleich- und gegenphasig schwingende Pendel bestimmt werden.

Dies wird dann bei unterschiedlichen Koppellängen wiederholt, wobei jedoch keine ~~starke~~ feste Kopplung vorliegen soll. Für unsere zwei gekoppelten Oszillatoren gilt:

$$J \ddot{f}_1 = -mgL_f f_1 + D l^2 (f_1 - f_2) \quad (18)$$

$$J \ddot{f}_2 = -mgL_f f_2 + D l^2 (f_2 - f_1) \quad (19)$$

↳ Abstand zum Schwerpunkt!

Nun setzen wir

$$\text{Mit } \omega_0^2 = \frac{mgL_f}{J} \quad \text{ sowie}$$

$$\Omega^2 = \frac{D l^2}{J} \quad \text{ bekommen wir}$$

$$\ddot{f}_1 + \omega_0^2 f_1 = -\Omega^2 (f_1 - f_2) \quad (20)$$

$$\ddot{f}_2 + \omega_0^2 f_2 = -\Omega^2 (f_2 - f_1) \quad (21)$$

Unser Lösungsansatz lautet:

$$f_{1,2}(t) = f_{1,2} e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \ddot{f}_{1,2}(t) = -\omega^2 f_{1,2} e^{i\omega t} \quad \checkmark$$

Durch einsetzen die Gleichungen (20) und (21) folgt:

$$(-\omega^2 + \omega_0^2 f + \Omega^2) f_1 - \Omega f_2 = 0 \quad (22) \quad \checkmark$$

$$(-\omega^2 + \omega_0^2 + \Omega^2) f_2 - \Omega^2 f_1 = 0 \quad (23)$$

Da es genau eine eindeutige Lösung geben soll, muss gelten:

$$-\omega^2 + \omega_0^2 + \Omega^2 = \pm \Omega^2 \quad (24)$$

Damit ergibt sich:

$$\omega^2 = \omega_0^2 \quad \text{gleichphasige Schwingung}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\Omega^2 \quad \text{gegenphasige Schwingung} \quad \checkmark$$

Man sieht, dass bei gleichphasiger Schwingung die Bewegungsgleichung unabhängig von der gehoppelten Feder ist.

Jetzt gilt es noch die Federkonstante  $D$  zu bestimmen und dies zwar einmal statisch und einmal dynamisch.

Bei der statischen Berechnung betrachten wir die Auslenkung der senkrecht hängenden Feder zuerst ohne, dann mit einem Gewicht.

Die dabei zu messende Auslenkung  $s$  liefert uns die Federkonstante mittels:

$$F = Ds \quad \Rightarrow \quad D = \frac{F}{s} = \frac{mg}{s} \quad \checkmark$$

Bei der dynamischen Bestimmung nehmen wir ebenfalls ein Gewicht, betrachten hier aber die Periodendauer beim Schwingen der Feder. Es gilt:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}} \quad \Rightarrow \quad D = 4\pi^2 \frac{m}{T^2}$$

3.3.

Im letzten Versuch untersuchen wir die sogenannte Schwebung; wird nur eine der beiden gekoppelten Pendel in Schwingung versetzt so beginnt auch ~~die~~ das zweite Pendel ~~immer stärker~~ zu schwingen. Während die Schwingung des zweiten Pendels immer stärker wird, sinkt sie beim ersten Pendel, bis dieses schließlich zur Ruhe kommt. Dann vollzieht sich der Prozess in umgekehrter Folge. Es liegt ein periodischer Prozess vor, der aber aufgrund der Reibung immer schwächer wird.

Für die Bewegungsgleichungen im Schwebungsfall gilt:

$$f_1(t) = f_0 \cos\left(\frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} - \omega_0}{2} t\right) \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} + \omega_0}{2} t\right)$$

$$f_2(t) = f_0 \sin\left(\frac{\sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2} - \omega_0}{2} t\right) + \sin\left(\frac{\sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2} + \omega_0}{2} t\right)$$

bei der kleineren Frequenz handelt es sich um die Schwebungsfrequenz

$$\omega_{\text{Mod}} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2} - \omega_0}{2}$$

die größere ist die Schwingung des einzelnen Pendels:

$$\omega_{\text{osz}} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2} + \omega_0}{2}$$

Für die Schwingungsdauern folgt damit:

$$T_{\text{Mod}} = \frac{\pi}{\omega_{\text{Mod}}} = \frac{T_{\text{gl}} \cdot T_{\text{geg}}}{T_{\text{gl}} - T_{\text{geg}}}$$

$$T_{\text{osz}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{osz}}} = \frac{2 \cdot T_{\text{gl}} \cdot T_{\text{geg}}}{T_{\text{gl}} + T_{\text{geg}}}$$

Diese Beziehung soll nun überprüft werden.

Messungsgenauigkeit Zeitmesser  $\rightarrow 0,2\%$

# A1 / Reversionspendel Eichmessung

$T/2$	1	2	4	10	20	40	80
gemessene Zeit [s]	0,801	1,608	3,174	7,294	15,746	31,572	62,783

Abstand der Schneiden [cm]		63	63,5	64	64,5	65	65,5	66
$F_R$	obere Schneiden $10 T_1$ [s]	16,026	16,044	16,059	16,063	16,085	16,095	16,091
$F_R$	untere Schneiden $10 T_2$ [s]	16,658	16,549	16,461	16,393	16,314	16,248	16,248

S [cm]	63	63,5	64	64,5	65	65,5	66
$10 T_1$ [s]	16,099	16,109	16,122	16,145	16,150	16,172	16,178
$10 T_2$ [s]	16,194	16,120	16,028	16,046	16,006	15,959	15,949

# A2 / Eichmessung

Federlänge  
 $z_1 36 \pm 3 \text{ mm}$

$\phi$  Kugel

$\rightarrow 6,02 \text{ cm}$

T	1	2	4	10	20	40	80
t [s]	3,101	6,178	11,331	20,735	41,364	123,034	246,179

$\varphi$	$60^\circ$	$55^\circ$	$50^\circ$	$45^\circ$	$40^\circ$	$35^\circ$	$30^\circ$	$25^\circ$	$20^\circ$	$15^\circ$	$10^\circ$	$5^\circ$
T	<del>3,320</del>	3,298	3,251	3,227	3,200	3,180	3,158	3,139	3,120	3,115	3,106	3,103

### 4.3 Statische Bestimmung von l)

$$D = \frac{m \cdot g}{x}$$

m	200g	100g	inch?
x	3,5	1,6	
l	2,3cm	4,06cm	

Dynamisch

$$D = 4\pi^2 \frac{m}{T^2}$$

m	100g	200g	300g	400g
10 T <sub>1</sub>	4,1s	6,4s		
10 T <sub>2</sub>	9,4s	5,6s		
10 T <sub>3</sub>	9,0s	6,6s		
10 T <sub>4</sub>	-	5,9s		
10 T <sub>5</sub>	-	5,8s		

Periodendauer einzelnes Pendel:  $10T = 18,5s$

→ Pendel werden gekoppelt → Koppellänge ~~29,1cm~~ 29,1cm

an ~~Phasen~~

1. Mittelpunktschwerer → Aufhängepunkt: 9,1cm
  2. ————— → ————— 1,6cm
- Länge Stab: 106,4cm

in Phase:

$$\begin{aligned} 10T_1 &= 18,60s \\ 10T_2 &= 18,30s \\ 10T_3 &= 18,40s \end{aligned}$$

gegenphasig

$$\begin{aligned} 10T_1 &= 15,1s \\ 10T_2 &= 15,0s \\ 10T_3 &= 14,93s \end{aligned}$$

Koppellänge 29,1cm

in Phase

$$\begin{aligned} 10T_1 &= 18,46s \\ 10T_2 &= 18,44s \\ 10T_3 &= 18,69s \end{aligned}$$

gegenphasig

$$\begin{aligned} 10T_1 &= 16,14s \\ 10T_2 &= 16,31s \\ 10T_3 &= 16,36s \end{aligned}$$

3.3 Schwebungen Koppellänge 29,1cm

$$\frac{1}{2} T_{\text{mod}} = 14,38s$$

$$\frac{1}{2} T_{\text{mod}} = 14,24s$$

$$\frac{1}{2} T_{\text{mod}} = 14,26s$$

$$5 T_{\text{osz}} = 9,1s$$

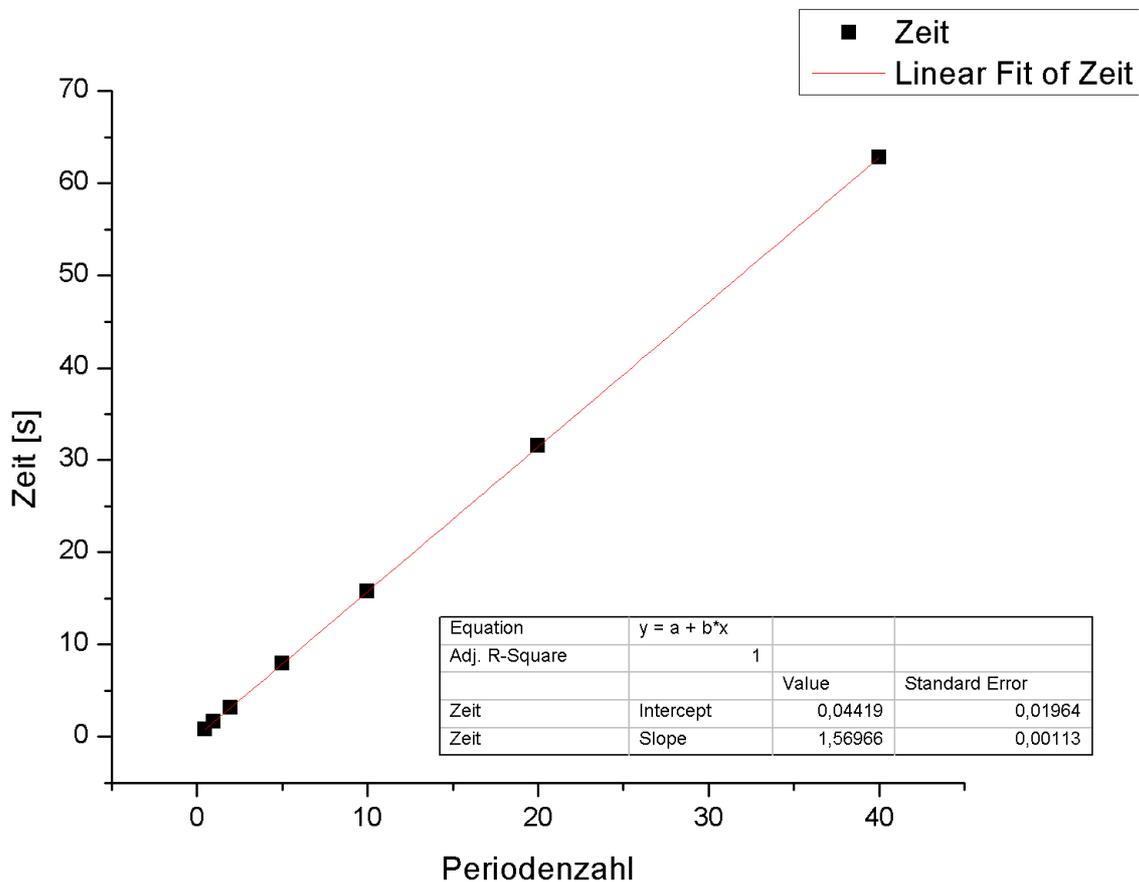
$$5 T_{\text{osz}} = 8,94s$$

$$5 T_{\text{osz}} = 8,78s$$

## Auswertung: Pendel (mit Fehlerrechnung)

### 1. Reversionspendel

Da das Messgerät Messungenauigkeiten besitzt haben wir eine Eichmessung durchgeführt. Trägt man die Zeit über die Anzahl der gemessenen Perioden auf, so erhält man:



Die Geradengleichung der linearen Regression (  $y = 0,04419 s + 1,56966 \cdot x s$  ) zeigt, dass es einen Y-Offset von etwa +0,044s gibt, daher haben wir alle folgenden Messwerte in dieser Aufgabe um den Offset nach unten korrigiert.

#### 1.1 Reduzierte Pendellänge

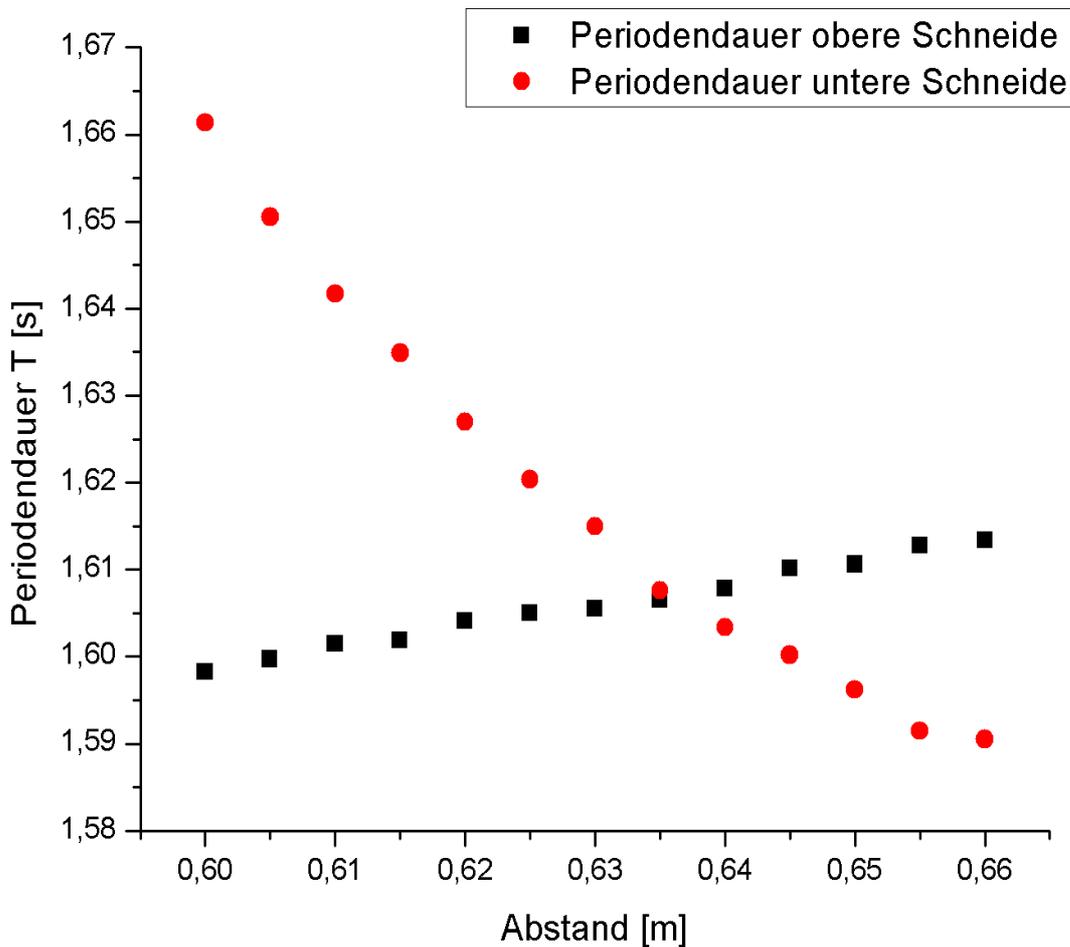
siehe Vorbereitung.

## 1.2 Fallbeschleunigung $g$

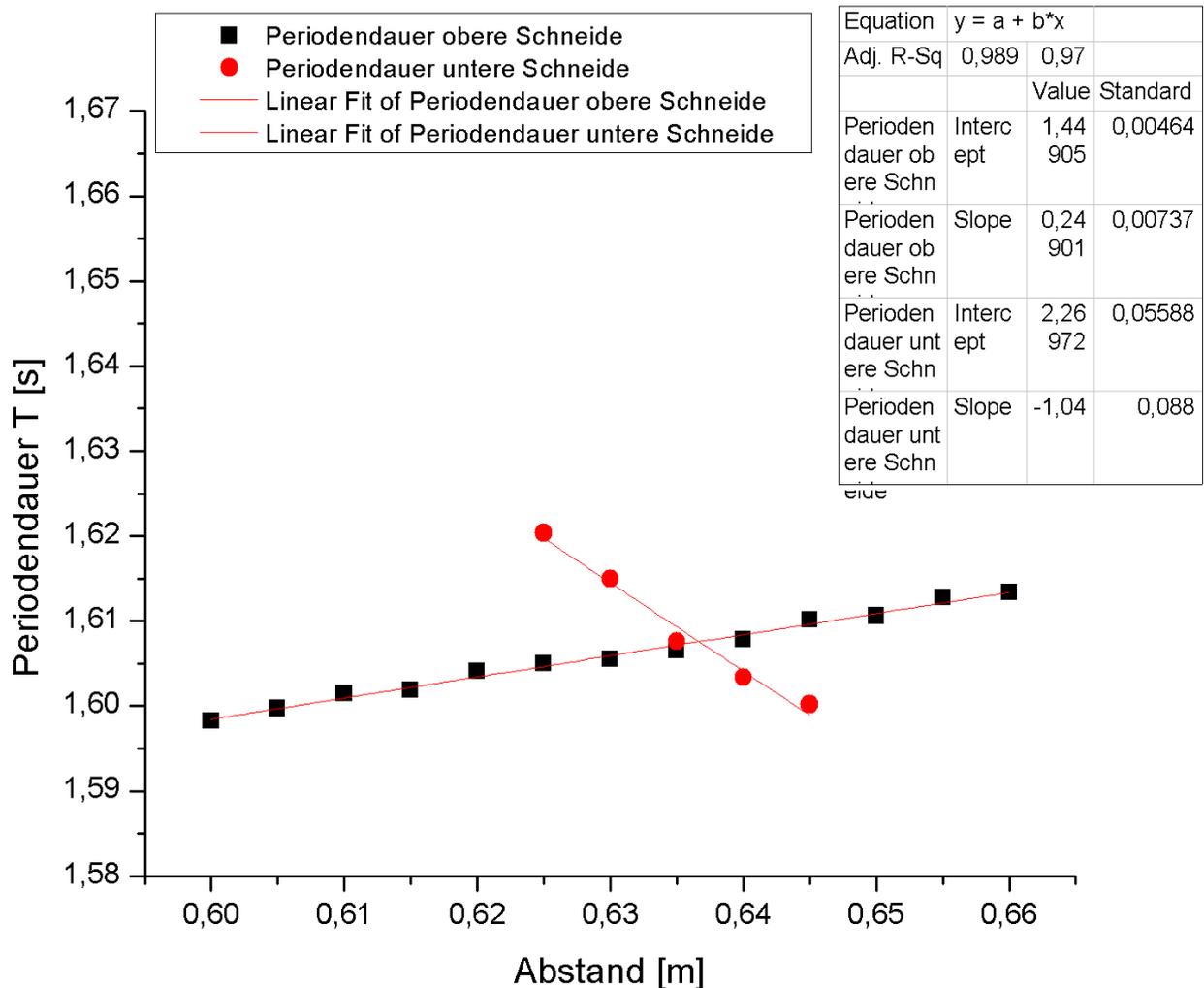
In der Vorbereitung haben wir gezeigt, dass für die Fallbeschleunigung gilt:

$$g = l_r \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} .$$

Um  $l_r$  zu bestimmen haben wir einen Stab an der oberen und an der unteren Schneide Pendeln lassen. Es ergibt sich



Wie man sieht, fällt die Periodendauer des um die untere Schneide pendelnden Stabes nicht linear ab, daher wurde bei der linearen Regression der unteren Schneide nur ein möglichst linearer Abschnitt beachtet.



Die reduzierte Länge  $l_r$  ergibt sich nun aus dem Schnittpunkt der beiden Geraden. Für die Geraden gilt:

$$y = 1,449 \text{ s} + x \cdot 0,249 \frac{\text{s}}{\text{m}} \rightarrow \text{Rotation um obere Schneide}$$

$$y = 2,2697 \text{ s} - x \cdot 1,04 \frac{\text{s}}{\text{m}} \rightarrow \text{Rotation um untere Schneide}$$

Gleichsetzen und nach x auflösen liefert

$$x = l_r = 0,6367 \text{ m}$$

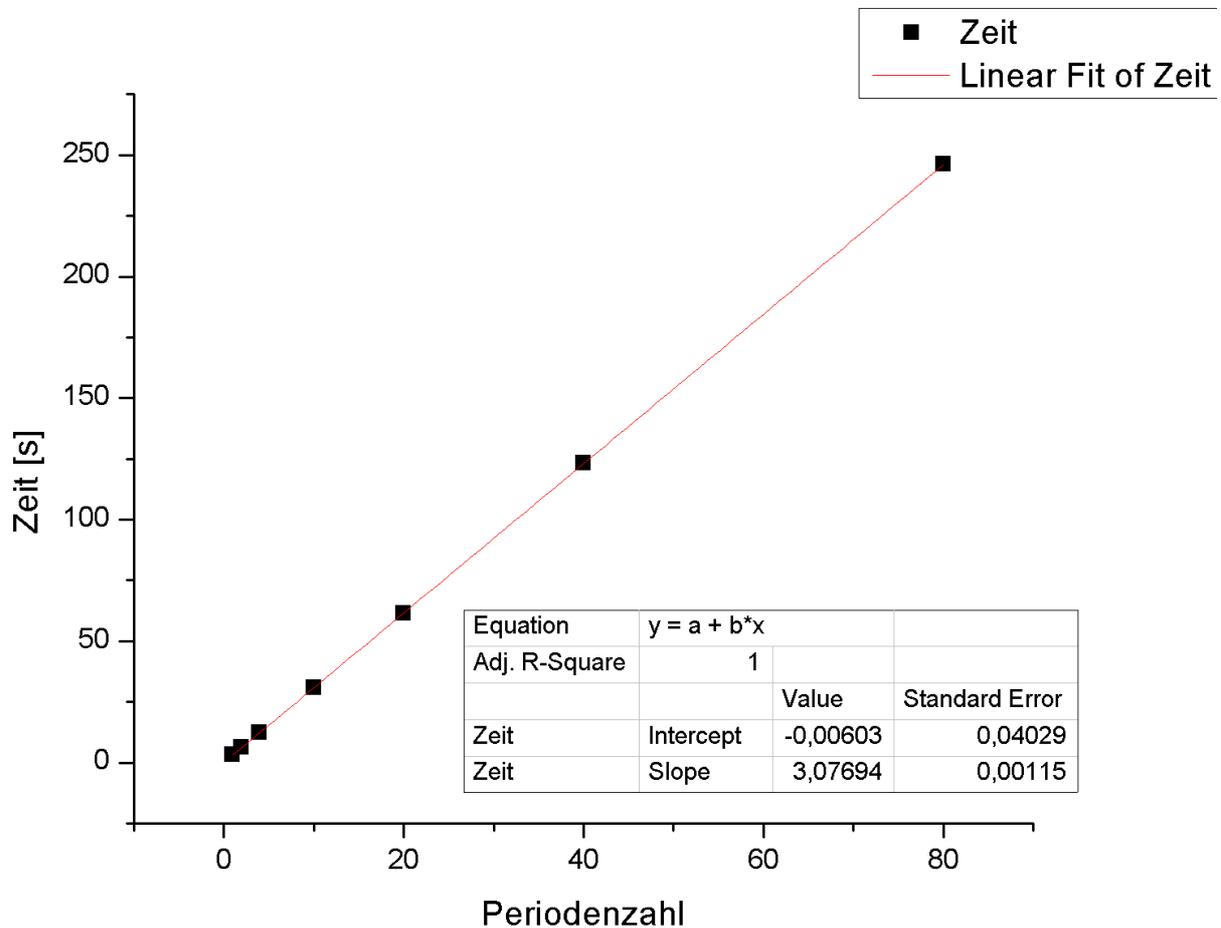
Eingesetzt in eine der Gleichungen erhält man  $T = 1,608 \text{ s}$ . Damit haben wir alles bestimmt, was wir für die Berechnung der Fallbeschleunigung brauchen. Es ergibt sich:

$$g = 9,72 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Der Literaturwert beläuft sich auf  $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ , wir sind also nur 0,92% davon entfernt.

## 2. Fadenpendel

Auch beim Fadenpendel wurde eine Eichmessung durchgeführt.



Für die Regressionsgerade gilt

$$y = 3,077 \cdot x \text{ s} - 0,006 \text{ s}$$

### 2.1 Fallbeschleunigung $g$

Mit Hilfe eines mathematischen Pendels soll hier nochmals die Fallbeschleunigung bestimmt werden.

Nach Steiner gilt für das Trägheitsmoment des Pendels:

$$J = J_{\text{Kugel}} + m(l+r)^2, \text{ mit } J_{\text{Kugel}} = \frac{2}{5} m r^2.$$

Setzt man das Trägheitsmoment in die Gleichung für die Periodendauer ein und löst nach  $g$  auf erhält man:

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{\frac{2}{5}r^2 + (l+r)^2}{l+r}$$

Die Periodendauer ergibt sich aus der Steigung der Eichmessung, mit  $T=3,077\text{ s}$ , einer Pendellänge von  $l=2,36\text{ m}$  und einem Radius der Kugel von  $r=6,09\text{ cm}$  erhalten wir also:

$$g=10,10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

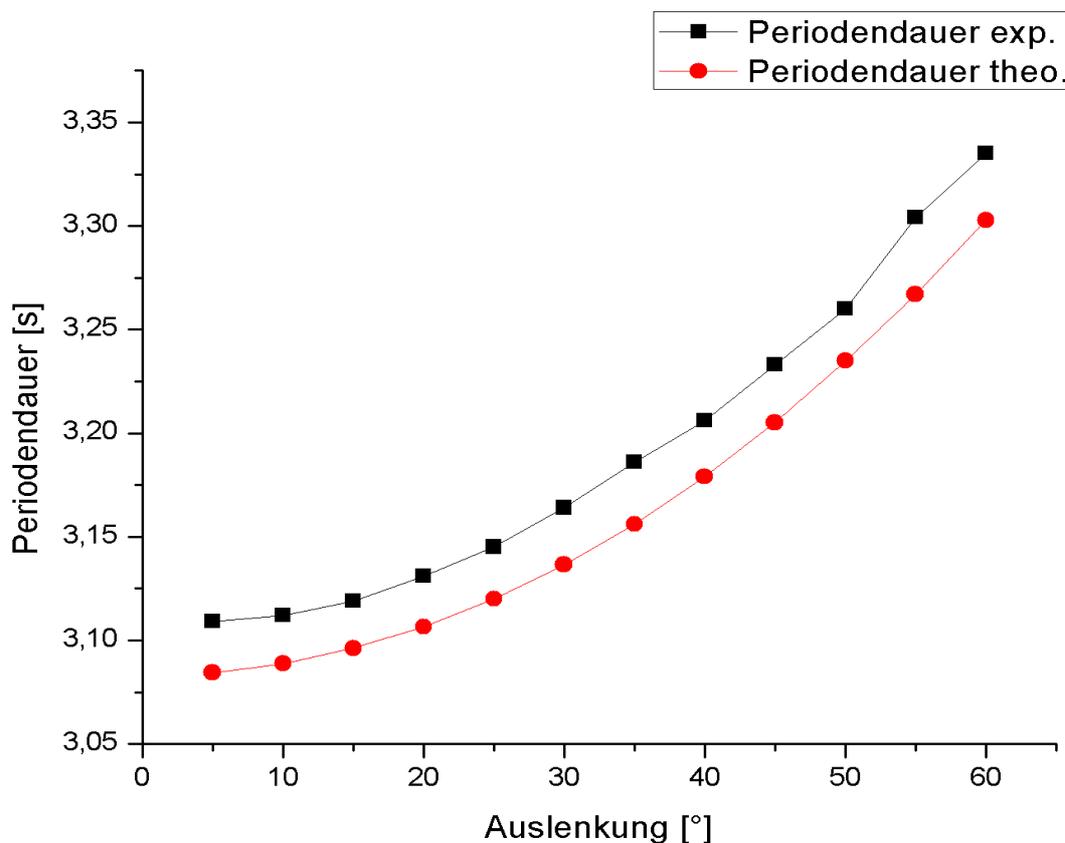
Hier weicht unser Ergebnis um 2,87% vom Literaturwert ab, was wahrscheinlich daran liegt, dass nicht beachtete Faktoren, wie Luftreibung, stärker zur Geltung kommen als beim Reversionspendel.

## 2.2 Abhängigkeit der Schwingungsdauer von der Schwingungsweite

Die Kleinwinkel-Näherung  $\sin\phi\approx\phi$  gilt nun nicht mehr. Wie in der Vorbereitung beschrieben ergibt sich daraus dann eine Periodendauer von etwa

$$T=2\pi\cdot\sqrt{\frac{\frac{2}{5}r^2+(l+r)^2}{g(l+r)}}\cdot\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)+\frac{9}{64}\sin^4\left(\frac{\phi}{2}\right)+\dots\right).$$

Unsere Messungen ergaben folgendes Schaubild



In Tabellenform:

<i>Auslenkung [°]</i>	<i>T<sub>exp.</sub> [s]</i>	<i>T<sub>theo.</sub> [s]</i>	<i>ΔT [s]</i>
60	3,335	3,303	0,032
55	3,304	3,267	0,037
50	3,260	3,235	0,025
45	3,233	3,205	0,028
40	3,206	3,179	0,027
35	3,186	3,156	0,030
30	3,164	3,137	0,027
25	3,145	3,120	0,025
20	3,131	3,107	0,024
15	3,119	3,096	0,023
10	3,112	3,089	0,023
5	3,109	3,085	0,024

An sich scheinen unsere Messungen sehr gut mit der Theorie übereinstimmen, nur scheint eine relativ konstante Verschiebung von  $\Delta T = 0,025 \text{ s}$  unsere Messungen zu verfälschen.

Man sieht jedoch schön, dass bei kleinerem Winkel auch die Abweichung vom theoretischen Wert kleiner wird, was daran liegt, dass die Luftreibung unser Experiment bei kleinen Winkeln weniger beeinflusst als bei großen Winkeln.

### 3. Gekoppelte Oszillatoren

#### 3.1 Einstellen gleicher Schwingungsdauer bei gleichartigen Pendeln

Wie in der Aufgabe gefordert haben wir die Schwingungen aneinander angepasst. Bei einer Entfernung von Scheibemittelpunkt zur Aufhängung erhielten wir dabei eine Periodendauer von  $T = 1,85 \text{ s}$

#### 3.2 Kopplung mittels Schraubenfeder

Nachdem die beiden Pendel synchronisiert wurden haben wir sie bei zwei verschiedenen Koppellängen mit einer Schraubenfeder gekoppelt. Anschließend ließen wir die Pendel in Phase und gegenphasig schwingen und haben über drei Messreihen die Periodendauer der jeweiligen Schwingung bestimmt. Der Abstand zwischen Mittelpunkt der Gewichtsscheibe und des Aufhängepunkts betrug dabei  $L_z = 92,1 \text{ cm}$ .

Die Periodendauer eines einzelnen Pendels betrug dabei  $T_0 = 1,85 \text{ s}$ .

Koppellänge  $l_1 = 39,1 \text{ cm}$

Messreihe	Periodendauer T (in Phase)	Periodendauer T (gegenphasig)
1	1,86 s	1,51s
2	1,83 s	1,5 s
3	1,84 s	1,493 s
Durchschnitt	1,843 s	1,5 s

Koppellänge  $l_2 = 29,1 \text{ cm}$

Messreihe	Periodendauer T (in Phase)	Periodendauer T (gegenphasig)
1	1,846 s	1,611s
2	1,841 s	1,631 s
3	1,869 s	1,636 s
Durchschnitt	1,852 s	1,626 s

Wie zu erwarten war sieht man, dass die Periodendauer der in Phase schwingenden Kopplung ziemlich genau der Periodendauer eines einzelnen Pendels entspricht. Dies ist nicht weiter verwunderlich, da die Feder bei dieser Schwingart weder gestreckt, noch gestaucht wird und damit keinen Beitrag zur Schwingung leistet.

Bei der gegenphasigen Schwingung sieht man jedoch, dass die Periodendauer stark von der Kopplung abhängt.

Nun sollen zwei Größen berechnet werden. Zum einen  $\frac{mgL}{J} = \omega_0^2$  und  $\frac{Dl^2}{J} = \Omega^2$

Es gilt:

$$\omega_{gl}^2 = \omega_0^2 \text{ (in Phase) und } \omega_{geg}^2 = \omega_0^2 + 2\Omega^2 \text{ (gegenphasig), sowie } \omega = \frac{2\pi}{T} .$$

Damit ergibt sich:

	Kopplung $l_1 = 39,1 \text{ cm}$	Kopplung $l_2 = 29,1 \text{ cm}$
$\omega_{gl}$	$3,41 \text{ s}^{-1}$	$3,39 \text{ s}^{-1}$
$\omega_{geg}$	$4,19 \text{ s}^{-1}$	$3,86 \text{ s}^{-1}$
$\Omega$	$1,72 \text{ s}^{-1}$	$1,31 \text{ s}^{-1}$
J	$1,30 \text{ kgm}^2$	$1,33 \text{ kgm}^2$
D	$25,15 \text{ N/m}$	$26,95 \text{ N/m}$

Verwendet wurde eine Gesamtmasse des Pendels von  $m = 2,056\text{kg}$ , sowie ein Abstand zwischen Schwerpunkt des Pendels und Aufhängung von  $L_1 = 0,760\text{m}$ , bzw.  $L_2 = 0,758\text{m}$ , je nachdem in welcher Höhe die Aufhängung für die Feder angebracht wurde.

Der Schwerpunkt des Aufbaus wurde über

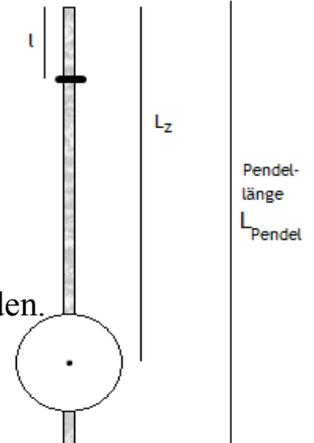
$$L_i = \frac{1}{M_{Ges}} ((m_{Scheibe} \cdot L_z) + (m_{Aufh.} \cdot l_i) + (m_{pendel} \cdot \frac{L_{Pendel}}{2})) ,$$

also über die Schwerpunkte der einzelnen Bauelemente, berechnet.

Diese experimentell ermittelten Werte sollen nun noch verglichen werden.

### 1. Federkonstante $D$

Die Federkonstante kann man abgesehen von der obigen Möglichkeit noch über einen statischen und über einen dynamischen Versuch bestimmen.



a) statisch

Ein Gewicht  $m$  wird an die Feder gehängt und danach die Auslenkung  $x$  der Feder gemessen. Es gilt  $D = \frac{m \cdot g}{x}$ .

Gemessen wurde für zwei Gewichte:

$m = 100\text{g}$	$m = 200\text{g}$
$x = 4,06\text{cm}$	$x = 8,89\text{cm}$
$D = 21,32\text{ N/m}$	$D = 22,07\text{ N/m}$

b) dynamisch

Man hängt eine Masse  $m$  an die Feder, lenkt sie aus und beobachtet die Schwingung, wenn man die Masse loslässt. Wegen

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$$

gilt für die Federkonstante

$$D = 4\pi^2 \frac{m}{T^2}$$

Gemessen wurde wieder für zwei Gewichte:

$m = 100\text{g}$	$m = 200\text{g}$
$T = 0,41\text{s}$	$T = 0,6\text{s}$
$D = 23,49\text{ N/m}$	$D = 21,93\text{ N/m}$

*Fazit:* Die zwei alternativen Bestimmungsmöglichkeiten liefern ähnliche Ergebnisse, bestimmt man  $D$  über das gekoppelte Pendel tritt eine etwa 10%-ige Abweichung zu den restlichen Werten auf.

## 2. Trägheitsmoment $J$

Das Trägheitsmoment kann über die Trägheitsmomente der einzelnen Komponenten des Pendels berechnet werden. Die Aufhängung der Feder wird dabei als näherungsweise punktförmig betrachtet. Es gilt:

$$\begin{aligned}
 J_{ges} &= J_{Scheibe} + J_{Stab, oben} + J_{Stab, unten} + J_{Aufh.} \\
 J_{Scheibe} &= \frac{1}{2} \cdot m_{Scheibe} \cdot R^2 + m_{Scheibe} \cdot (L_Z^2 + R^2) \\
 J_{Stab, oben} &= \frac{1}{3} \cdot m_{Stab, oben} \cdot L_Z^2 \\
 J_{Stab, unten} &= \frac{1}{3} \cdot m_{Stab, unten} \cdot (L_{Pendel} - L_Z)^2 + m_{Stab, unten} \cdot (L_Z + 2R)^2 \\
 J_{Aufh.} &= m_{Aufh.} \cdot l^2
 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir, je nach Koppellänge :

$$J_{ges,1} = 1,35 \text{ kgm}^2 \quad \text{bzw.} \quad J_{ges,2} = 1,34 \text{ kgm}^2$$

*Fazit:* Die hier berechneten Werte stimmen sehr gut mit den experimentell bestimmten Werten überein, wir hätten eine größere Abweichung erwartet.

### 3.3 Schwebungen

Gemessen wurde bei einer Koppellänge von  $29,1 \text{ cm}$ .

Es soll der in der Vorbereitung hergeleitete Zusammenhang

$$T_{mod} = \frac{2\pi}{\omega_{mod}} = \frac{2T_{gl}T_{geg}}{T_{gl} - T_{geg}} \quad \text{und} \quad T_{osz} = \frac{2\pi}{\omega_{osz}} = \frac{2T_{gl}T_{geg}}{T_{gl} + T_{geg}} \quad \text{überprüft werden.}$$

Das Experiment ergab

$$T_{mod} = 28,57 \text{ s} \quad \text{und} \quad T_{osz} = 1,79 \text{ s} .$$

Setzt man die oben ermittelten Werte in die Gleichung ein, so erhält man

$$T_{mod} = 26,06 \text{ s} \quad \text{und} \quad T_{osz} = 1,73 \text{ s}$$

Die Werte stimmen sehr gut überein, und man kann die beiden Zusammenhänge als bestätigt erachten.

## 4. Fehlerrechnung

### 1.2

Unser Plotter (Origin) gibt uns direkt an:

$$\sigma(m_1) = 0,00737 \frac{s}{m} \quad \sigma(m_2) = 0,088 \frac{s}{m}$$

$$\sigma(c_1) = 0,00464 s \quad \sigma(c_2) = 0,05588 s$$

Für den Fehler von  $l_r = \frac{c_2 - c_1}{m_1 - m_2}$  ergibt sich nun mit Hilfe der Fehlerfortpflanzung:

$$\sigma_{stat}(l_r) = \sqrt{\sum_{i=1}^2 ((\partial_{c_i} l_r \cdot \sigma(c_i))^2 + (\partial_{m_i} l_r \cdot \sigma(m_i))^2)}$$

Zudem kommt noch der in der Aufgabe angegebene systematische Fehler

$$\sigma_{sys}(l_r) = \pm 0,02 \text{ cm}$$

Also

$$l_r = (63,672 \pm 6,163 \pm 0,020) \text{ cm} .$$

Zudem muss noch der Fehler für die Periodendauer berechnet werden, hier gilt:

$$T_r = \frac{c_2 m_1 - c_1 m_2}{m_1 - m_2} ,$$

$$\sigma_{stat}(T_r) = \sqrt{\sum_{i=1}^2 ((\partial_{c_i} T_r \cdot \sigma(c_i))^2 + (\partial_{m_i} T_r \cdot \sigma(m_i))^2) = 0,016 s$$

und aus der 0,2%-igen Messgenauigkeit des Messgeräts folgt

$$\sigma_{sys}(T_r) = 0,002 \cdot T_r = 0,003 s .$$

Also

$$T_r = (1,608 \pm 0,016 \pm 0,003) s .$$

Schließlich muss nun noch der Fehler für die Fallbeschleunigung  $g$  errechnet werden. Es gilt:

$$g = 4 \pi^2 \frac{l_r}{T_r^2} ,$$

$$\sigma_{stat}(g) = \sqrt{(\partial_{l_r} g \cdot \sigma_{stat}(l_r))^2 + (\partial_{T_r} g \cdot \sigma_{stat}(T_r))^2} = 0,78 \frac{m}{s^2}$$

$$\sigma_{sys}(g) = |\partial_{T_r} g| \cdot \sigma_{sys}(T_r) + |\partial_{l_r} g| \cdot \sigma_{sys}(l_r) = 0,042 \frac{m}{s^2}$$

Also

$$g = (9,724 \pm 0,778 \pm 0,042) m s^{-2} .$$

Der Literaturwert von  $g = 9,81 m s^{-2}$  liegt also im berechneten Bereich.

## 2.1

Hier hat uns Origin direkt den statistischen Fehler auf die Zeit ausgegeben, dieser beträgt  $\sigma_{stat}(T)=0,001 s$ , der systematische Fehler folgt wieder aus der Messungenauigkeit von 0,2% des Messgeräts, also  $\sigma_{sys}(T)=0,002 \cdot 3,077 s=0,006 s$ . Das ergibt für die Zeit:

$$T=(3,077 \pm 0,001 \pm 0,006) s$$

Die Länge des Fadens wurde angegeben mit  $l=(2,36 \pm 0,003) m$ .

Außerdem ist der Radius der Pendelkugel auch noch mit einem Fehler behaftet. Diesen haben wir auf  $\pm 0,1 cm$  abgeschätzt. Daraus folgt:  $r=(6,09 \pm 0,1) cm$ .

Für  $g = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{\frac{2}{5}r^2 + (l+r)^2}{l+r}$  folgt daraus:

Systematischer Fehler:

$$\sigma_{sys}(g) = |\partial_T g \cdot \sigma_{sys}(T)| = 0,042 ms^{-2}$$

Statistischer Fehler:

$$\sigma_{stat}(g) = \sqrt{(\partial_l g \cdot \sigma_{stat}(l))^2 + (\partial_T g \cdot \sigma_{stat}(T))^2 + (\partial_r g \cdot \sigma_{stat}(r))^2} = 0,063 \frac{m}{s^2}$$

Also erhalten wir zusammengefasst

$$g = (10,098 \pm 0,042 \pm 0,063) ms^{-2}$$

Hier liegt der Literaturwert nicht im berechneten Bereich, es muss also noch andere, nicht berücksichtigte Fehlerquellen, wie zum Beispiel die Luftreibung geben.