



SS/WS 20...11./12.....

Praktikum: (P1/P2) (Mo/Di/Mi/Do) Gruppe-Nr: 4.....

Name: Günther..... Vorname: Martin.....

Name: Braun..... Vorname: Nils.....

Versuch: P1-12 Resonanz..... (mit/ohne) Fehlerrechnung

Betreuer: Nina Dollmann..... Durchgeführt am: 13.12.11.....

Abgabe am: 20.12.2011.....

Rückgabe am:

Begründung:

2. Abgabe am: 10.01.2012.....

Ergebnis: (+ / 0 / -)

Fehlerrechnung: ja / nein

Datum: 10.01.2012.....

Handzeichen: Dal.....

Bemerkungen:

sehr saubere Auswertung
tolles Protokoll !
Homepage



Bei diesem Versuch geht es um freie und erzwungene Schwingungen, um das Resonanzverhalten bezüglich Amplitude und Phase, sowie Charakteristika wie Resonanzschärfe bzw. Güte und Dämpfungen verschiedenen Ursprungs. Dabei werden sowohl mechanische als auch elektrische Schwingungen untersucht. Alle wichtigen Zusammenhänge sind in einer Vorbereitungshilfe zu diesem Versuch erläutert.

Hier arbeiten Sie mit dem Messwerterfassungssystem „CASSY“, das im Praktikum an verschiedenen Versuchen eingesetzt wird. *Details zu der Funktionsweise des Interfaces finden Sie in der Vorbereitungshilfe sowie auf den ersten 30 Seiten des CASSY Handbuchs, die sich in den Literaturmappen sowie auf der Praktikumshomepage befinden.*

Hinweis: Bitte USB-Stick zur Datensicherung mitbringen.

Aufgaben:

1. Drehpendel, freie Schwingungen: Machen Sie sich anhand der Kurzanleitung zu CASSY mit dem Menü der Software, der Verwendung von Funktionstasten und den Einstellmöglichkeiten für Diagramme und Anzeigeelementen vertraut. Stellen Sie den zeitlichen Verlauf des Phasenwinkels, der Winkelgeschwindigkeit und der kinetischen Energie dar. Verwenden Sie dazu eine einfache Abschätzung des Trägheitsmomentes des Drehpendels. Erzeugen Sie auch eine Phasenraumdarstellung des Schwingungsvorgangs. Bestimmen Sie die Periodendauer der Schwingung.

Der Schwingungsvorgang ist auch ohne Wirbelstrombremse nicht ganz dämpfungsfrei. Erklären Sie die Art der Dämpfung und entwickeln Sie ein einfaches Modell für den Amplitudenabfall. Überlagern Sie die Messdaten mit dem Ihrem Modell entsprechenden funktionalen Zusammenhang und passen Sie die Modellparameter möglichst gut per Hand an (*fit by eye*). Dazu eignen sich einfache Tabellenkalkulationsprogramme auf Ihrem PC. Sie bekommen dadurch ein Gefühl für den Einfluss der verschiedenen Parameter auf die Kurvenform.

2. Drehpendel, freie gedämpfte Schwingungen: Nehmen Sie mit CASSY bei verschiedenen Strömen I_B durch die Wirbelstrombremse ($I_B=100, 200, 400, 700\text{mA}$) die entsprechenden Winkel-Zeit-Diagramme auf. Ermitteln Sie wie in Aufgabe 1 die Dämpfungskonstante β durch Anpassung der Schwingungsfunktion an die Messdaten. Bestimmen Sie β auch aus dem Dämpfungsverhältnis k . Verwenden Sie für die $k(I_B)$ -Bestimmung eine optimale Anzahl n von Schwingungen und die zweckmäßigere der beiden Formeln:

$$k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_{i-1}}{\Phi_i} \quad \text{oder} \quad k = \sqrt[n]{\Phi_o / \Phi_n}$$

Erläutern Sie, warum Sie praktisch keine I_B -Abhängigkeit für T finden.

Stellen Sie die Dämpfungskonstante $\beta_{\text{kor}}(I_B) = \beta(I_B) - \beta(0)$ in Abhängigkeit von I_B geeignet graphisch dar, begründen Sie $\beta_{\text{kor}}(I_B) = \text{const} \cdot I_B^2$ und extrapolieren Sie auf den I_B -Wert für Grenzdämpfung ($\beta=\omega_0$). Ermitteln Sie diesen Wert auch experimentell, und vergleichen Sie beide Ergebnisse. Berechnen Sie die Güte $Q(I_B)$ des Systems aus ω_0 und $\beta(I_B)$. Beachten Sie den Gültigkeitsbereich der Formeln für Q .

3. Messen Sie die Winkelrichtgröße D^* der Schneckenfeder des Drehpendels statisch. Messen Sie dazu die Winkelauslenkung des Drehpendels in beide Richtungen, indem Sie Gewichte $\sim(5\text{g}, 10\text{g}, 20\text{g})$ mittels eines Fadens so an den Zeiger des Pendels hängen, dass der Faden durch die Randnut ($r = r_a$) läuft (*warum?*). Bestimmen Sie das Trägheitsmoment Θ des Drehpendels aus D^* und $T(0)$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus Aufgabe 1.

4. Drehpendel, erzwungene Schwingungen: Nehmen Sie Resonanzkurven $\varphi(\Omega)$ bei verschiedenen Strömen I_B ($400, 200\text{mA}$) mit CASSY auf. Beginnen Sie mit der höheren Dämpfung, damit sich das System schneller einschwingt. Beobachten und diskutieren Sie auch die Phasenverschiebung ψ . (a) möglichst weit unterhalb, (b) möglichst weit oberhalb und (c) bei der Resonanzfrequenz.

Achtung: Die Bewegung des Motors wird über einen Winkelgeber in eine Spannung (0-5V) umgewandelt und über den zweiten CASSY-Eingang mit aufgezeichnet. Damit die Nulllage mit dem Pendel übereinstimmt, muss zu Beginn ein Offset von 2.5V vorgegeben werden.

Die Drehzahl des Antriebmotors wird aus dem *Winkel-Zeit-Diagramm* mit Hilfe von CASSY bestimmt. Achten Sie auf eine ausreichende Dichte der Meßpunkte, besonders in Resonanznähe. Passen Sie die Schrittweite entsprechend an.

Vergleichen Sie den Verlauf der gemessenen Resonanzkurven mit dem theoretischen Verlauf. Benutzen Sie $(1/\sqrt{2})$ -Amplituden-Punkte für die Gütebestimmung $Q(I_B)$ des Resonators und vergleichen Sie diese Ergebnisse mit jenen von Aufgabe 2.

5. Serienschwingkreis, erzwungene Schwingungen: Nehmen Sie Resonanzkurven $I(\omega)$ bei verschiedenen Dämpfungswiderständen R_p auf (Siehe Hinweise in der Vorbereitungshilfe) (Messbereich für U: 0-70V). Stellen Sie die Schwingungsamplitude und die Impedanz des Schwingkreises als Funktion der Frequenz in einer gemeinsamen Darstellung dar. Bestimmen Sie die Gütefaktoren der Schwingkreise aus der Resonanzbreite. Demonstrieren Sie die Resonanzüberhöhung an Spule und Kondensator, indem Sie die Spannungsverläufe an Spule und Kondensator zusammen mit der anliegenden Spannung als Funktion der Frequenz darstellen. Bestimmen Sie auch daraus die Güte des Schwingkreises. Stellen Sie die Phasenverschiebung als Funktion der Frequenz dar.

Zubehör:

Drehpendel (Pohlsches Rad): *Drehkörper aus Kupfer ($\rho = 8,96 \text{ g/cm}^3$), kreisringförmig ($r_i=74,7\text{mm}$, $r_a=94,7\text{mm}$, $d=2\text{mm}$) mit Lochkranz für Lichtschranke (165 Löcher, $\phi=1,5\text{mm}$ auf Radius $r_{\text{Löcher}}=91,9\text{mm}$) mit 5 Speichen; mit Motor, Getriebe und Exzenter zur Anregung; mit Wirbelstrombremse (max. zulässiger Strom: langfristig 1A / kurzzeitig 1,6A); mit regelbarer Stromversorgung für die Motordrehzahl; mit Winkelgeber zur Erfassung der Motorbewegung; mit Lichtschranke zur Erfassung der Pendel-Drehbewegung;*

Netzgerät für die Wirbelstrombremse;

3 Messinggewichte (5g, 10g, 20g) mit Faden für die D^* -Bestimmung;

CASSY SENSOR Messinterface;

POWER CASSY als Spannungsquelle für den Schwingkreis;

PC zur Datenerfassung;

Dämpfungswiderstände R_p , Spule $L = 44 \text{ mH}$ und Kondensator $C = 0,33 \text{ }\mu\text{F}$, Laborkabel.

Literatur:

Walcher: *Praktikum der Physik* (zu Drehpendel und Schwingungsgleichungen)

Fricke, Lamberts, Schuchardt, Hrsg. Moeller: *Leitfaden der Elektrotechnik*, Bd.4, Teil 1 (zu elektrischen Schwingkreisen, insbesondere L||C||R; vorhanden in Uni.-Bibl.)

Feynman: *Lectures on Physics*, Bd.1 (besonders geeignet für das Verständnis des Versuchsinhalts)

Praktikumsprotokoll

zu Versuch Nummer 10
Resonanz

Ausgearbeitet von Martin Günther und Nils Braun

Vorbereitung
Martin Günther

Bearbeitung am 13. Dez. 2011

Vorwort

In diesem Versuch geht es um angeregte Schwingungen und damit vor allem um Resonanzeffekte. Wir werden sehen, dass die Bewegungsgleichung eines Drehpendels dieselbe Struktur hat, wie die Gleichungen, die die Wechsellspannung an einem Schwingkreis beschreiben, und werden Parameter wie Resonanzfrequenzen, Bandbreiten, Gütefaktoren und Phasenverschiebungen messen bzw. bestimmen.

Zur Messung wird das CASSY-System benutzt, das es erlaubt, computergestützt Messreihen aufzunehmen und hierzu sogar automatisch bestimmte Größen (in unserem Fall Anregungsfrequenzen und Dämpfungen) einzustellen.

1 Drehpendel

Wir betrachten zuerst das sogenannte Pohlsche Rad. Dieses besteht aus einer Scheibe aus Kupfer, die ein Trägheitsmoment Θ hat. Gemessen wird der zeitabhängige Winkel φ , die *Auslenkung* des Pendels. Wenn am Rad ein Drehmoment M angreift, ergibt sich eine Winkelbeschleunigung

$$\ddot{\varphi} = \frac{M}{\Theta}$$

An der Radnabe ist eine Spiralfeder angebracht, die ein Drehmoment M_{Feder} erzeugt, das der Auslenkung entgegengerichtet ist.

$$M_{\text{Feder}} = -D^* \varphi$$

Lässt man den Strom I_B durch die Spule fließen, erzeugt er einen zu I_B proportionalen Magnetischen Fluss $B \propto I_B$. Im Pohlschen Rad wird dadurch ein Wirbelstrom $I_W \propto B \dot{\varphi}$ induziert, der proportional zum Feld und zur Geschwindigkeit ist. Dadurch entsteht ein Drehmoment $M \propto B \cdot I_W \propto I_B^2 \dot{\varphi}$. Aber auch wenn der Elektromagnet nicht eingeschaltet wird, ist eine geschwindigkeitsproportinale Dämpfung durch die Luftreibung zu erwarten. Das Drehmoment durch Haft- und Gleitreibung im Lager ist dagegen zu vernachlässigen. Wir fassen alle Reibungseffekte in der Konstante γ zusammen:

$$M_{\text{Bremsse}} = -\gamma \dot{\varphi}$$

Zu guter Letzt gibt es noch eine Vorrichtung (Motor mit Exzenter), mit der man ein periodisch wechselndes Drehmoment auf die Scheibe ausüben kann:

$$M_{\text{Anregung}} = M_0 \cos(\Omega t)$$

Insgesamt gilt also

$$\begin{aligned} M &= M_{\text{Feder}} + M_{\text{Bremsse}} + M_{\text{Anregung}} \\ \implies \ddot{\varphi} + \frac{\gamma}{\Theta} \dot{\varphi} + \frac{D^*}{\Theta} \varphi &= \frac{M_0}{\Theta} \cos(\Omega) \end{aligned}$$

Da wir eine Gleichung dieser Form später nochmals zu Gesicht bekommen, lösen wir sie nun allgemein.

Lineare Differenzialgleichungen 2. Ordnung

Wir suchen die Lösung folgender Differenzialgleichung:

$$\ddot{x}(t) + 2\beta\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t) \quad (1)$$

Hierbei ist $x(t)$ die schwingende Zustandsgröße und $f(t)$ eine Anregung von außen. Da die DGL linear ist und Ordnung 2 hat, genügt es, zwei linear unabhängige Lösungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ für den homogenen Fall ($f = 0$) und eine partikuläre Lösung $x_f(t)$ für den inhomogenen Fall $f \neq 0$ zu finden. Es lässt sich beweisen, dass dann **jede** Lösung x die Form

$$x = Ax_1 + Bx_2 + x_f$$

mit Konstanten A und B hat.

Mit dem Ansatz

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

erhält man

$$\begin{aligned} (\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2) e^{\lambda t} &= 0 \\ \implies \lambda &= -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \end{aligned} \quad (2)$$

Nun lassen sich drei Fälle unterscheiden:

Kriechfall Für $\beta^2 > \omega_0^2$ erhalten wir den *Kriechfall*. Hier ergibt (2) zwei Lösungen für λ , die beide reell und positiv sind. Die Auslenkung fällt im Wesentlichen exponentiell und sehr langsam auf 0 ab.

Aperiodischer Grenzfall Wenn die Dämpfung $\beta = \omega_0$ erfüllt, haben wir den *aperiodischen Grenzfall*. Da wir hier nur ein (reelles) $\lambda = -\beta$ erhalten, müssen wir die zweite Lösung anders wählen:

$$x_2(t) = te^{\lambda t}$$

Diesen Fall wünscht man sich, wenn man das Pendel möglichst schnell anhalten will. Denn für größere Dämpfungen fällt die Auslenkung langsamer ab (Kriechfall), für kleinere Dämpfungen schwingt das Pendel über die Ruhelage hinaus (Schwingfall).

Schwingfall Der für uns interessante Fall ist aber der Schwingfall. Für $\beta^2 < \omega_0^2$ ist der Term unter der Wurzel in (2) negativ, wir legen fest:

$$\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} =: i\omega$$

Damit gilt

$$x(t) = e^{-\beta t} \cdot e^{\pm i\omega t}$$

Das Lösungssystem lässt sich (physikalisch sinnvoll) auch reell wählen:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1(t) &= \frac{1}{2}(x_1(t) + x_2(t)) = e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t) \\ \tilde{x}_2(t) &= \frac{1}{2i}(x_1(t) - x_2(t)) = e^{-\beta t} \cdot \sin(\omega t)\end{aligned}$$

Die beiden Lösungen lassen sich auch in einer Gleichung

$$\tilde{x}(t) = A_f e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t + \psi_f)$$

mit der Phasenlage ψ_f zusammenfassen. Man erkennt, dass der Oszillator im ungedämpften Fall ($\beta = 0$) mit der Kreisfrequenz $\omega = \omega_0$ und konstanter Amplitude sinusförmig schwingen würde. Im gedämpften Fall ($\beta > 0$) erhält man eine kleinere Kreisfrequenz ω und die Amplitude fällt exponentiell mit $e^{-\beta t}$ ab. Die Zeitkonstante β^{-1} , in der die Amplitude auf $1/e$ ihres ursprünglichen Wertes fällt, nennt man *Relaxationszeit*. Aus dem Verhältnis der Amplitude in zwei aufeinanderfolgenden Perioden (Periodendauer T), dem sogenannten *Dämpfungsverhältnis* $k = \frac{x(t)}{x(t+T)}$ kann man β in der Praxis leichter bestimmen:

$$\beta = \frac{\log(k)}{T}$$

Eine weitere Kenngröße eines Oszillators ist der Gütefaktor

$$Q = \frac{\omega}{2\beta}$$

Wir werden noch sehen, dass dies der relative Energieverlust pro Periode (mit dem Faktor 2π ist.)

Für Dämpfungen $\beta \approx \omega_0$ sind kaum noch Schwingungen zu sehen, weil die Amplitude zu schnell abnimmt und die Periodenlänge sehr groß wird. Wir nähern uns dem aperiodischen Grenzfall.

Schwingfall mit Anregung Mit den beiden anderen Fällen befassen wir uns nicht länger, sondern suchen nun eine partikuläre Lösung für die Anregung $f(t) = e^{\pm i\Omega t}$. Hierzu machen wir den Ansatz

$$x_p(t) = A_s e^{\pm i(\Omega t + \psi_s)}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} (-\Omega^2 \pm 2i\beta\Omega + \omega_0^2) A_s e^{\pm i(\Omega t + \psi_f)} &= e^{\pm i\Omega t} \\ \iff \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\beta\Omega)^2} e^{\pm i \arctan^* \left(\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \right)} A_s e^{\pm i(\Omega t + \psi_f)} &= e^{\pm i\Omega t} \end{aligned}$$

Der \arctan^* entspricht nicht der üblichen Definition des Arcustangens, sondern hat den Wertebereich $(0, \pi)$, da der Term $(-\Omega^2 + 2i\beta\Omega + \omega_0^2)$ immer in der oberen Halbebene liegt. Der \arctan^* ergibt sich, wenn man zum "normalen" Arcustangens π addiert, falls das Argument negativ ist¹.

Damit folgt für Phasenverschiebung und Amplitude:

$$A_s = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\beta\Omega)^2}} \quad (3)$$

$$\psi_s = -\arctan^* \left(\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \right) \quad (4)$$

Für die Anregung $f = \cos(\Omega t) = 1/2(e^{+i\Omega t} + e^{-i\Omega t})$ ergibt sich

$$x(t) = A_s \cos(\Omega t + \psi_s) \quad (5)$$

Diese Lösung hat eine zeitlich konstante Amplitude A_f und die Schwingung eilt der Anregung um $\psi \in (-\pi, 0)$ hinterher. Für $\Omega \ll \omega_0$ ergibt sich $\psi_s \approx 0$, der Oszillator folgt der sehr langsamen Schwingung fast ohne zeitlichen Versatz. Bei $\Omega = \omega_0$ eilt die Schwingung der Anregung um $\pi/2 = 90^\circ$ hinterher, bei $\Omega \gg \omega_0$ sind sie sogar fast gegenphasig (der Oszillator "kommt nicht mehr nach"). Je kleiner die Dämpfung ist, desto steiler ist die Flanke in der $\psi_s(\Omega)$ -Kurve. Im Grenzfall $\beta \rightarrow 0$ hat sie bei $\Omega = \omega_0$ sogar eine Sprungstelle.

Die Amplitude hat für $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta}$ ein Maximum (*Resonanzfrequenz*) und fällt für größere und kleinere Ω schnell ab. Die Amplitude bei Resonanz ist im Wesentlichen umgekehrt proportional zum Dämpfungsfaktor, kann also bei kleiner Dämpfung sehr groß werden. In der Praxis bezeichnet man den Abstand der beiden Punkte, an denen die Frequenz um den Faktor $1/\sqrt{2}$

¹Eine andere Möglichkeit zur Definition ist, den Winkel zur imaginären Achse zu betrachten:

$$\arctan^* \left(\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \right) = \frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{2\beta\Omega} \right)$$

Beide Varianten sind äquivalent

abgenommen hat, als *Bandbreite* $\Delta\omega$. Es gilt

$$\Delta\omega \approx 2\beta$$

für hinreichend kleine β ⁱⁱ

Wir werden noch sehen, dass die im Oszillator gespeicherte Energie proportional zum Quadrat der Amplitude ist. Wir definieren den *Gütefaktor*

$$Q = \frac{2\pi W}{\Delta W}$$

mit dem Verhältnis der im Oszillator gespeicherten Energie W zur pro Periode verlorenen Energie ΔW . Es gilt

$$Q = \frac{2\pi}{1 - (e^{-2\pi\beta/\omega_0})^2} \approx \frac{\omega_0}{2\beta} \approx \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

Auch diese Näherung gilt nur für kleine β ⁱⁱⁱ.

Der Einschwingvorgang ist zu erkennen, wenn man die vollständige Lösung

$$\tilde{x}(t) = A_s \cos(\Omega t + \psi_s) + A_f e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t + \psi_f)$$

betrachtet. Wählt man z.B. $\Omega = \omega_0$, $\psi_f = \psi_s$, $A_f = -A_s$, dann vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\tilde{x}(t) = A_s(1 - e^{-\beta t}) \cos(\Omega t + \psi_s)$$

Zu Beginn kann der homogene Term noch die "aufgezwungene" Schwingung ausgleichen; wartet man aber lange genug, ist er zu vernachlässigen und es bleibt nur noch die inhomogene Lösung mit konstanter Amplitude. Das System schwingt also schneller ein, wenn es stark gedämpft ist. Am schnellsten würde es im aperiodischen Grenzfall einschwingen, dort wird sich aber nur noch eine kleine Amplitude ergeben.

1.1 Freie Schwingung

Im Falle des Drehpendels gilt für β und ω_0 :

$$\beta = \frac{\gamma}{2\Theta}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D^*}{\Theta}}$$

Das verwendete Schwungrad ist (unter Vernachlässigung der Speichen etc.) ein Kreisring mit Innendurchmesser $r_i = 7,47$ cm, Außendurchmesser $r_a = 9,47$ cm und Dicke $d = 0,2$

ⁱⁱgenauer gesagt $\Delta\omega = 2\beta + O(\beta^3)$ für $\beta \rightarrow 0$

ⁱⁱⁱ $1 - e^{-2\pi\beta/\omega_0} = 4\pi\beta/\omega_0 + O(\beta^2)$ für $\beta \rightarrow 0$

cm. Die Dichte des Kupfers beträgt $\rho = 8,96 \text{ g/cm}^3$. In Zylinderkoordinaten ergibt sich das Trägheitsmoment

$$\Theta = \int r^2 dm = \int_0^d \int_{r_i}^{r_a} \int_0^{2\pi} \rho r^3 d\varphi dr dz = 2\pi d \rho \frac{r_a^4 - r_i^4}{4} = 1,387 \text{ g m}^2 \quad (6)$$

Im Versuchsaufbau wird der Winkel φ durch eine Lichtschranke gemessen, die über einen Lochkranz die Position des Drehpendels erfasst. Die verwendete Software ist in der Lage, numerisch die Ableitung $\dot{\varphi}$, also die Winkelgeschwindigkeit zu messen. Daraus lässt sich auch die kinetische Energie

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \Theta \dot{\varphi}^2$$

bestimmen. Trägt man $\dot{\varphi}$ über φ auf, erhält man ein *Phasenraumdiagramm*.

Zunächst lassen wir das Drehpendel ohne Wirbelstrombremse und Anregung ausschwingen. Da die Dämpfung $\beta = \beta_0$ hier sehr klein ist, erhält man aus der Periodendauer T praktisch die Eigenfrequenz des ungedämpften Pendels

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Die Dämpfung β_0 lässt sich bestimmen, indem man eine $e^{-\beta t} \sin(\omega_0 t + \psi)$ Kurve bzw. die Hüllkurve $e^{-\beta t}$ an die Messwerte anpasst.

1.2 Freie gedämpfte Schwingung

Nun bestimmen wir den Zusammenhang $\beta(I_B)$. Wie in Kapitel 1 eingangs erwähnt ist eine Abhängigkeit der Art $\beta(I_B) = \beta_0 + c_\beta I_B^2$ mit einer Konstanten c_β zu erwarten. Aus der Messung bei verschiedenen Stromstärken lässt sich diese Konstante errechnen. β wird dabei entweder wieder durch Anpassung einer Kurve oder durch Bestimmung des Dämpfungsverhältnisses k bestimmt. Daraus lässt sich der I_B Wert für die Grenzdämpfung $\beta = \omega_0$ als

$$I_B = \sqrt{\frac{\omega_0 - \beta_0}{c_\beta}}$$

extrapolieren. Dieses Ergebnis lässt sich natürlich auch experimentell nachprüfen.

Der *Gütefaktor*, lässt sich für nicht allzugroße Bremsströme dann einfach als

$$Q(I_B) = \frac{\omega_0}{2\beta(I_B)}$$

bestimmen.

1.3 Winkelrichtgröße D^*

Wir können die Federkonstante D^* direkt messen, indem wir das Rad mit Gewichten im Abstand r_a von der Achse belasten und die Auslenkung φ messen. Im Gleichgewicht heben sich die Drehmomente der Feder und des Gewichtes gerade auf und es gilt

$$D^* \varphi = \sin(\varphi) m g r_a$$

Da wir ω_0 schon bestimmt haben, lässt sich Θ nun genauer bestimmen:

$$\Theta = \frac{D^*}{\omega_0^2}$$

Zu erwarten ist, dass die Abschätzung (6) zu klein ist, da die Speichen vernachlässigt wurden.

1.4 Erzwungene Schwingung

Wir wollen nun weiter untersuchen, was bei einer Anregung des Pendels passiert. Bei der Anregung mit einem Drehmoment $M_0 \cos(\Omega t)$ ergibt sich in der Form von Gleichung (1) die rechte Seite

$$f(t) = \frac{M_0}{\Theta} \cos(\Omega t)$$

und wie oben gezeigt die allgemeine Lösung

$$\varphi A_f \cos(\Omega t + \psi_f)$$

mit

$$A_s = \frac{M_0}{\Theta} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}$$
$$\psi_s = -\arctan^* \left(\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \right)$$

Wie oben schon diskutiert, gilt für die Phasenverschiebung

$$\Omega \ll \omega_0 \implies \psi_s \approx 0$$

$$\Omega \approx \omega_0 \implies \psi_s \approx \pi/2$$

$$\Omega \gg \omega_0 \implies \psi_s \approx \pi$$

Im Versuch wird sowohl die Auslenkung des Pendels als auch die Anregung aufgezeichnet. Daraus lässt sich die Amplitude und Phasenverschiebung bestimmen. Aus der Bandbreite $\Delta\omega$

der Resonanzkurve lässt sich der Gütefaktor ebenfalls bestimmen:

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

2 Serienschwingkreis

2.1 Erzwungene Schwingung

In einem Serienschwingkreis gelten für die Spannungen an der Spule L , dem Kondensator C und dem Widerstand R die Beziehungen

$$\begin{aligned} U_R &= R \cdot I \\ U_C &= \frac{1}{C} \cdot Q = \frac{1}{C} \int I dt \\ U_L &= L \cdot \dot{I} \end{aligned}$$

Für eine sinusförmige Gesamtspannung $U = U_0 \sin(\Omega t)$ ergibt sich die Gleichung

$$L \cdot \dot{I} + R \cdot I + \frac{1}{C} \int I dt = U_0 \sin(\Omega t)$$

Was sich durch nochmaliges Ableiten nach der Zeit in die bekannte Form umformen lässt:

$$\ddot{I} + \frac{R}{L} \cdot \dot{I} + \frac{1}{LC} I = \frac{U_0}{L} \Omega \cos(\Omega t)$$

Hier gilt also

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{R}{2L} \\ \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{aligned}$$

Vergleicht man die Formeln mit denen vom Drehpendel, erkennt man gewisse Analogien. Statt einer Drehbewegung betrachten wir nun den Strom. Beim Drehpendel versucht das Schwungrad durch sein Trägheitsmoment Θ die Bewegung aufrecht zu erhalten, beim Schwingkreis versucht die Spule mit ihrer Induktivität L den Strom aufrecht zu erhalten. Allerdings spielt hier nicht die Drehimpulserhaltung der Elektronen auf dem Weg durch die Spule irgend eine Rolle, sondern der Effekt wird durch Elektromagnetische Induktion verursacht. Eine weitere Analogie besteht zwischen der Bremse beim Drehpendel und dem Widerstand, der hier als dämpfendes Element wirkt und die Elektronen sozusagen "bremst". Am deutlichsten ist die Analogie zwischen dem Kondensator und der Spiralfeder. Beide Bauteile sind nämlich nichts anderes als Speicher für potentielle Energie $W_{\text{pot}} = 1/2 \cdot D^* \varphi^2$ bzw. $W_{\text{pot}} = 1/2 \cdot C U^2$. Alle Zusammenhänge und Formeln, die oben hergeleitet wurden haben auch hier Gültigkeit.

Bei Anregung ergibt sich die Lösung

$$I(t) = A_f \cos(\Omega t + \psi_f)$$

$$A_s = \frac{U_0 \Omega}{L} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \Omega^2\right)^2 + \left(\frac{R}{L}\right)^2 \Omega^2}}$$

$$\psi_s = -\arctan^* \left(\frac{R\Omega}{2L \left(\frac{1}{LC} - \Omega^2\right)} \right)$$

Aufpassen muss man allerdings bei der Phasenverschiebung. Der Strom ist der Gesamtspannung gegenüber um

$$\tilde{\psi}_2 = \psi_s + \pi/2 = +\arctan \left(\frac{R\Omega}{2L \left(\frac{1}{LC} - \Omega^2\right)} \right)$$

verschoben, da wir einmal abgeleitet haben.

Die Beziehung

$$Q \approx \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{L}{R\sqrt{LC}}$$

für den Gütefaktor bei kleinen Widerständen gilt weiterhin.

Beim Serienschwingkreis tritt in der Nähe der Resonanzfrequenz eine *Spannungsüberhöhung* auf; das bedeutet, die Spannungsamplituden an Spule und Kondensator alleine sind höher als die Gesamtspannung. Für $\Omega = \omega_0$ gilt

$$A_s = \frac{U_0}{R}$$

$$\implies U_C = \frac{U_0}{\omega_0 RC} \sin(\Omega t + \psi_f) = -QU_0 \cos(\Omega t)$$

$$\implies U_L = -\frac{L\omega_0 U_0}{R} \sin(\Omega t + \psi_f) = QU_0 \cos(\Omega t)$$

Die entstehenden Spannungen sind also um den Faktor Q größer als die Gesamtspannung. Dieser Faktor kann für kleine Dämpfungen sehr groß werden. Die beiden Spannungen heben sich allerdings gegenseitig auf. Der gesamte Schwingkreis verhält sich in Resonanz also nur noch wie der Dämpfungswiderstand selbst.

3 Quellen

Vorbereitungsmappe

Vorbereitungshilfe

Praktikumsprotokoll

zu Versuch Nummer 10
Resonanz

Ausgearbeitet von Martin Günther und Nils Braun

Vorbereitung
Nils Braun

Bearbeitung am 13. Dez. 2011

Vorwort

In den hier beschriebenen Versuchen werden einfache Schwingungen und die dazugehörigen Oszillatoren besprochen. Es werden Messungen zur Periodendauer, zu Dämpfung- und Gütefaktoren sowie zu Kenngrößen der Resonanz durchgeführt. Die beschriebenen und gemessenen Phänomene für viele verschiedene Schwingarten lassen sich jedoch alle mit den gleichen mathematischen Mitteln beschreiben, weshalb hier zuerst allgemein über Schwingungen gesprochen wird, bevor die realen Anwendungen folgen.

Schwingung und Oszillatoren Als Schwingung bezeichnet man allgemein einen Vorgang mit einer sich periodisch wiederholenden Messgröße x . Diese Messgröße kann die Auslenkung eines Fadenpendels, der Drehwinkel eines Drehwinkels oder eine andere schwingende Größe sein. Damit eine Schwingung entstehen kann, muss eine rückstellende Kraft F_r wirken - diese Kraft muss eine Zentralkraft sein. Wir können also schreiben

$$F_r = -Ax$$

mit einer Konstanten A . Zusätzlich wirkt noch in den meisten realen Anwendungen eine hemmende Kraft - auch Dämpfung genannt. Diese ist abhängig von der Geschwindigkeit und kann durch viele verschiedene Faktoren bedingt sein. Allgemein wollen wir schreiben:

$$F_d = -B\dot{x}$$

Die Gesamtkraft auf einen Körper ist also

$$C\ddot{x} = -Ax - B\dot{x}$$

wenn C der Trägheitsfaktor (dies kann die Masse oder der Trägheitsmoment usw. sein) des betrachteten Körpers ist. Die einzelnen Konstanten A, B, C sind je nach Anwendung und Schwingung verschieden. Den schwingenden Körper nennt man dann auch Oszillator. Zu besserer Übersichtlichkeit schreibt man auch

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{1}$$

mit den neu eingeführten Konstanten

$$\omega_0^2 = \frac{A}{C} \quad \beta = \frac{B}{2C}$$

ω_0 nennt man auch die Grundfrequenz oder Eigenfrequenz des Oszillators - da er mit dieser Frequenz ohne Dämpfung und Anregung schwingen würde. Die Periodendauer T ist definiert als $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$. Die Konstante β wird auch als Dämpfungskonstante bezeichnet.

Schwieriger wird der Fall bei getriebenen Oszillatoren - auch erzwungene Schwingungen genannt. Hierbei kommt zu den schon beschriebenen Kräften noch eine Art Zwangskraft hinzu. Bei einer periodischen Anregung der Kreisfrequenz Ω mit der Amplitude s_0 lautet (1) dann:

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = k \cos(\Omega t) \quad (1')$$

mit der Konstanten $k = s_0/A$.

Lösung der Differentialgleichung Die im vorigen Paragraphen beschriebenen Differentialgleichungen (1) und (1') müssen jetzt gelöst werden. Wir betrachten zuerst den homogenen Fall, in dem (1) und (1') gleich sind. Der Ansatz

$$x(t) = \chi \cdot e^{-\lambda t}$$

führt zur Lösung

$$\lambda_{1/2} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

und damit zu einer Fallunterscheidung:

- (a) $\beta < \omega_0$. Dieser Fall wird auch schwache Dämpfung oder Schwingfall genannt. Mit $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ ist die Lösung dann

$$x(t) = e^{-\beta t} (\chi_1 e^{i\omega t} + \chi_2 e^{-i\omega t})$$

Die Klammer ist eine Schwingung mit der Frequenz ω , also einer Kreisfrequenz leicht unter der Eigenfrequenz ω_0 des Systems. Die Amplitude ist proportional zu $e^{-\beta t}$, also einem exponentiellen Abfall. Sie nimmt also mit der Zeit ab und konvergiert gegen Null. Das Dämpfungsverhältnis

$$k = \frac{x(t)}{x(t+T)}$$

ist der Vergleich zweier Werte der schwingenden Größe x mit dem zeitlichen Unterschied einer Periode und dessen Logarithmus gibt Aufschluss über die Dämpfungskonstante, denn es gilt

$$\ln k = \Lambda = \beta T$$

Außerdem definiert man die Relaxationszeit

$$\tau = \frac{1}{\beta}$$

als die Zeit, bei der die Periode auf $1/e$ des Wertes gesunken ist.

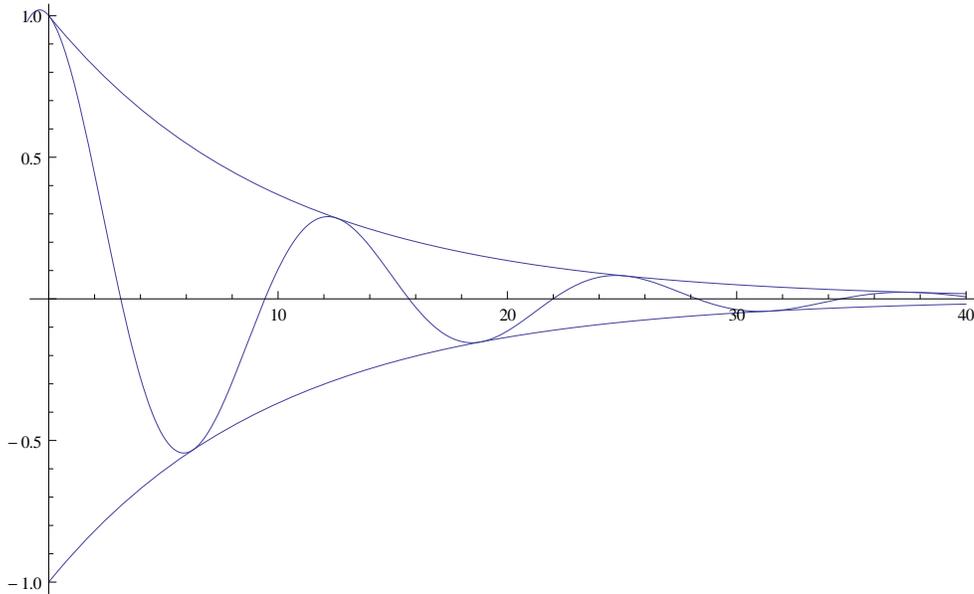


Abbildung 1: Verlauf der schwingenden Größe im Schwingfall

- (b) $\omega_0 < \beta$. Dieser Fall ist der Kriechfall. Hier kommt es nicht zu einer Schwingung. Man definiert analog $\omega = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$. Die Lösung ist dann

$$x(t) = e^{-\beta t} (\chi_1 e^{\omega t} + \chi_2 e^{-\omega t})$$

wobei die Klammer jetzt keine Schwingung mehr beschreibt (eine spezielle Lösung wäre z.B. der cosh). Wieder fällt die Periode exponentiell ab.

- (c) $\beta = \omega_0$. Er wird aufgrund seiner Besonderheit auch aperiodischer Grenzfall genannt. Hier ist die Dämpfung gerade so groß, dass die schwingende Größe am schnellsten in die Ruhelage zurückkehrt. Die Lösung ist nämlich gegeben durch

$$x(t) = e^{-\beta t} (\chi_1 + \chi_2 t)$$

Nach diesen Betrachtungen können wir uns jetzt der erzwungenen Schwingung zuwenden. Die inharmonische Differentialgleichung (1') wird gelöst durch die oben besprochene harmonische Lösung $x_h(t)$ und eine unharmonische Lösung $x_s(t)$, die z.B. gegeben wäre durch

$$x_s(t) = \chi_s \cos(\Omega t + \varphi)$$

In den Versuchen betrachten wir fast nur den Schwingfall, also wollen wir für diesen auch die ganze Lösung angeben. Sie wäre dann gegeben durch

$$x(t) = x_h(t) + x_s(t) = e^{-\beta t} (\chi_1 e^{i\omega t} + \chi_2 e^{-i\omega t}) + \chi_s \cos(\Omega t + \varphi) = \chi_h e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_h) + \chi_s \cos(\Omega t + \varphi)$$

Für große Zeiten t verschwindet der erste Summand (Einschwingvorgang) und es stellt sich ein stationärer Zustand ein:

$$x(t \gg 1) = \chi_s \cos(\Omega t + \varphi)$$

Dabei gilt

$$\chi_s = \frac{k}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\beta\Omega)^2}} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{2\beta\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}\right)$$

An diesen Lösungen kann man schon einige Eigenschaften erkennen. Wie in der Vorbereitungshilfe erklärt wurde, besteht zwischen Anregung und Schwingung eine Phasenverschiebung von $\varphi < 0$ (die Schwingung hinkt hinterher). Resonanz ist genau dann eingetreten, wenn die anregende Frequenz Ω gerade der Eigenfrequenz ω_0 entspricht. Dann ist die Phasenverschiebung gerade $-\pi/2$. Die maximale Amplitude kommt jedoch bei der Resonanzfrequenz vor, sondern wenn die Anregungsfrequenz gerade

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

beträgt.

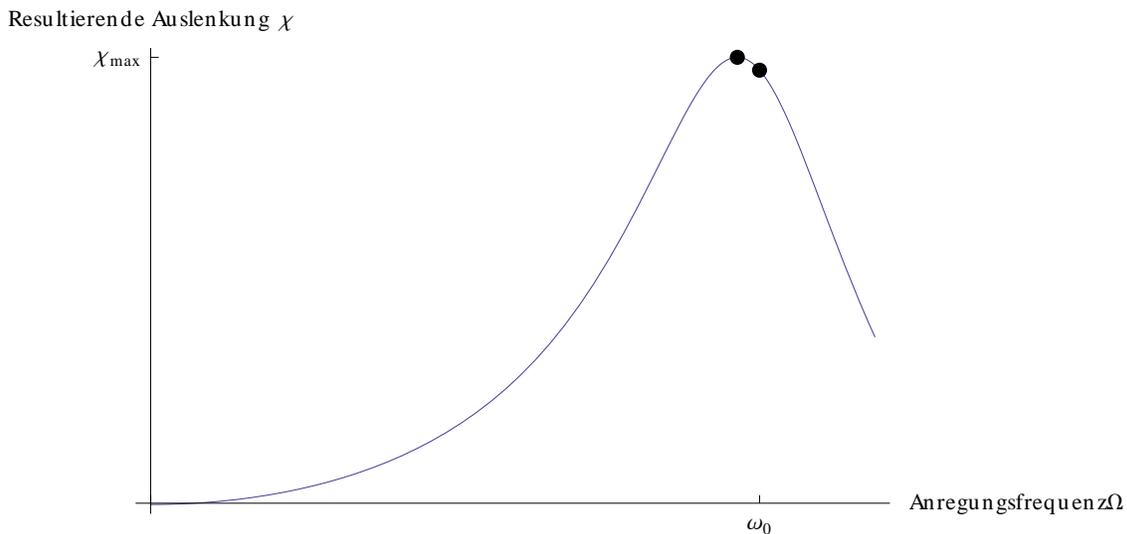


Abbildung 2: Verlauf der Amplitude für verschiedene Anregungsfrequenzen

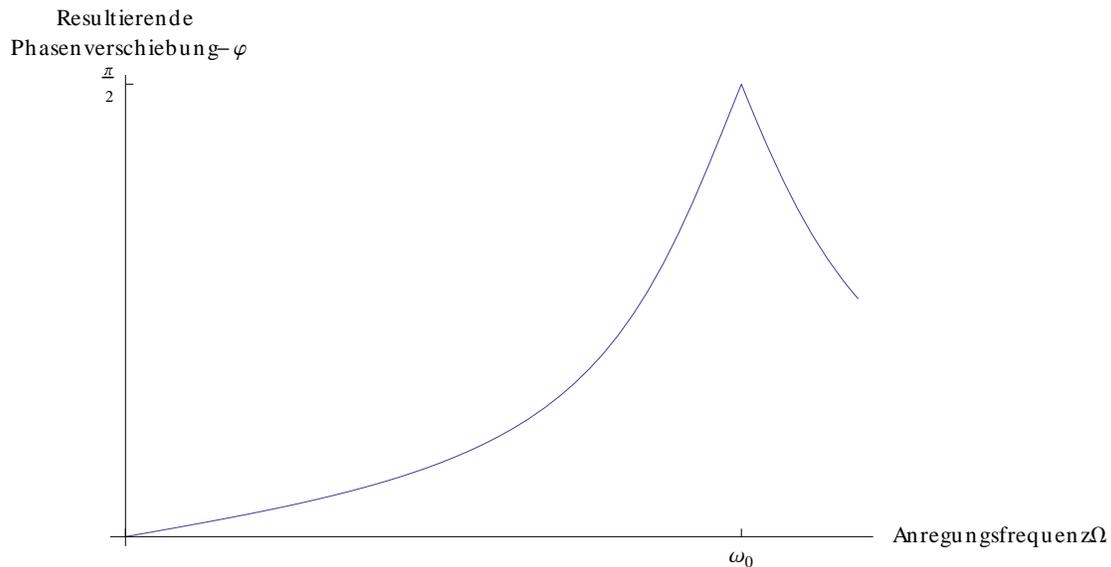


Abbildung 3: Verlauf der negativen Phasenverschiebung für verschiedene Anregungsfrequenzen

Kenngrößen Zur Beschreibung der Systeme werden einige Definitionen eingeführt - auch im Hinblick auf Bewertung und Vergleich einzelnen Systeme. Über das Dämpfungsverhältnis k bzw. $\Lambda = \ln k$ wurde schon gesprochen. Eine andere Sicht ist der Weg über Energien. In einem schwingenden System wird die Energie immer zwischen zwei Energieformen (z.B. potentieller und kinetischer oder Feldenergie im Kondensator und in der Spule) gewechselt. Dämpfung führt jetzt dazu, dass in einer Periode immer ein bestimmter Teil dieser Energie verloren geht und an die Umwelt abgegeben wird. Das Verhältnis zwischen diesen beiden Energien beschreibt die Güte Q eines Systems

$$Q = \frac{2\pi \cdot \text{Schwingungsenergie}}{\text{Verlust in einer Periode}} = \frac{\omega_0}{2\beta}$$

Für verschiedene Systeme ist auch ihr Verhalten auf Anregung anders. Ein Maß dafür ist die sogenannte Bandbreite

$$\Delta\omega \approx 2\beta = \frac{\omega_0}{Q}$$

Sie ist die Breite der Anregungsamplitudenkurve bei einer Amplitude von $A_{\text{res}}/\sqrt{2}$ und gibt ein Maß für die Breite dieses Peaks. Bei größerer Dämpfung wird die Güte also schlechter und die Bandbreite größer.

Übertragung auf reale Experimente Diese theoretischen Herleitungen können jetzt auf zwei in diesen Versuchen vorkommende Oszillatoren übertragen werden. Dies ist das Drehpendel (in unserem Fall ein Polsches Rad) und ein LRC-Schwingkreis. Beim Polschen Rad ist die betrachtete schwingende Größe der Winkel ϕ . Der Trägheitsfaktor ist gerade das Trägheitsmo-

ment Θ des Rads und die rückstellende Kraft entsteht durch die Drehfeder mit Federkonstante D^* . Die Gleichung (1) wird zu einer Gleichung für Drehmomente (statt für Kräfte)

$$\Theta \ddot{\phi} + \gamma \dot{\phi} + D^* \phi = 0$$

und man erhält

$$\ddot{\phi} + 2\beta \dot{\phi} + \omega_0^2 \phi = 0 \quad (\text{Polsches Rad})$$

mit der Eigenfrequenz $\omega_0^2 = D^*/\Theta$. Die Dämpfung β entsteht im allgemeinen Fall durch Reibung (wie Luftreibung) und kann auch durch eine Wirbelstrombremse in Abhängigkeit von der angeschlossenen Stromstärke manipuliert werden. Auch hier kann man (wie oben gesehen) das Verhalten bei erzwungenen Schwingungen untersuchen.

Analog dazu kann man auch die Theorie für einen LRC-Schwingkreis entwickeln. Dabei ist die schwingende Größe der Strom I , der Trägheitsfaktor ist die Induktivität L der Spule und die rückstellende "Kraft" ist hier durch den Kondensator mit dem Faktor $1/C$ gegeben. Die Schwingung wird durch eine angeschlossene Spannung U erzwungen. Insgesamt werden hier nicht Kräfte, sondern Spannungen (beziehungsweise deren Ableitungen) und Ströme betrachtet:

$$U_R + U_L + U_C = U \implies RI + L\dot{I} + \frac{1}{C} \int I \, dt = U$$

Die Dämpfung wird durch den Ohmschen Widerstand R der Schaltung erzeugt. Die (abgeleitete) Gleichung lautet dann

$$\ddot{I} + 2\beta \dot{I} + \omega_0^2 I = 0 \quad (\text{LRC-Kreis})$$

mit den Konstanten

$$\beta = \frac{R}{2L} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

Eine antreibende "Kraft" könnte dabei zum Beispiel gegeben sein durch

$$\ddot{I} + 2\beta \dot{I} + \omega_0^2 I = \frac{1}{L} \dot{U} \quad (\text{LRC-Kreis mit Anregung})$$

Die Spannung kann eine Sinusschwingung mit konstanter Frequenz sein. Im Resonanzfall sind die Spannungen an Spule und Kondensator gleich und die Impedanz maximal.

Die schon beschriebenen Begriffe wie Güte oder Dämpfungskonstante können Eins zu Eins auf die besprochenen Spezialfälle übertragen werden.

1 Drehpendel

Nun sollen die im Vorwort besprochenen theoretischen Grundsätze an Experimenten gezeigt werden. Zuerst wird mit einem Drehpendel - dem so genannten Polschen Rad - experimentiert. Dieses besteht grundsätzlich aus einer Scheibe, die drehbar auf einer Achse gelagert ist. Die Scheibe ist durch eine Drehfeder gekoppelt und kann somit Schwingungen ausführen. Die Luftreibung oder eine einstellbare Wirbelstrombremse führen zu einer Dämpfung. Der benötigte Trägheitsmoment kann ganz grob über die Näherung des Polschen Rades als Zylinderschalenschnitt mit Radien

$$r_i = 74.7 \text{ mm} \quad r_a = 94.7 \text{ mm}$$

abgeschätzt werden. Von dieser Berechnung müssen jetzt noch die 165 Löcher abgezogen werden. Diese sollen in Näherung einfach als Kreissektoren der Höhe und Breite $\Delta r = 1.5 \text{ mm}$ auf dem Radius $r_l = 91.9 \text{ mm}$ betrachtet werden. Sie umschließen also einen Winkel von jeweils

$$\Delta\phi = \frac{\Delta r}{r_l} 2\pi$$

Für den Trägheitsmoment des Polschen Rades ergibt sich also

$$\Theta = \int r^2 \, dm = \rho \int_0^d dz \left[\int_{r_i}^{r_a} \int_0^{2\pi} r^3 \, dr \, d\phi - 165 \int_{r_l}^{r_l+\Delta r} \int_0^{\Delta\phi} r^3 \, dr \, d\phi \right] \approx 1.20654 \text{ g m}^3$$

wenn man die Werte aus der Aufgabenmappe einsetzt.

1.1 Freie Schwingung

Dieses Rad wird jetzt angestoßen und mit einer Messsoftware die gedrehte Strecke s des Rades beim Radius r in Abhängigkeit von der Zeit gemessen. Aus ihr ergibt sich mit

$$\phi = \frac{s}{r}$$

der Winkel. Es werden Winkel-Zeit sowie Winkelgeschwindigkeit-Zeit-Diagramme numerisch durch die Software berechnet. Außerdem kann durch abtragen von $\dot{\phi}$ über ϕ das Phasenraumdiagramm betrachtet werden. Die kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \Theta \dot{\phi}^2$$

ergibt sich sofort aus der Winkelgeschwindigkeit. Trotz der ausgeschalteten Wirbelstrombremse erwarten wir auch hier schon eine gewisse (wenn auch kleine) Dämpfung durch die

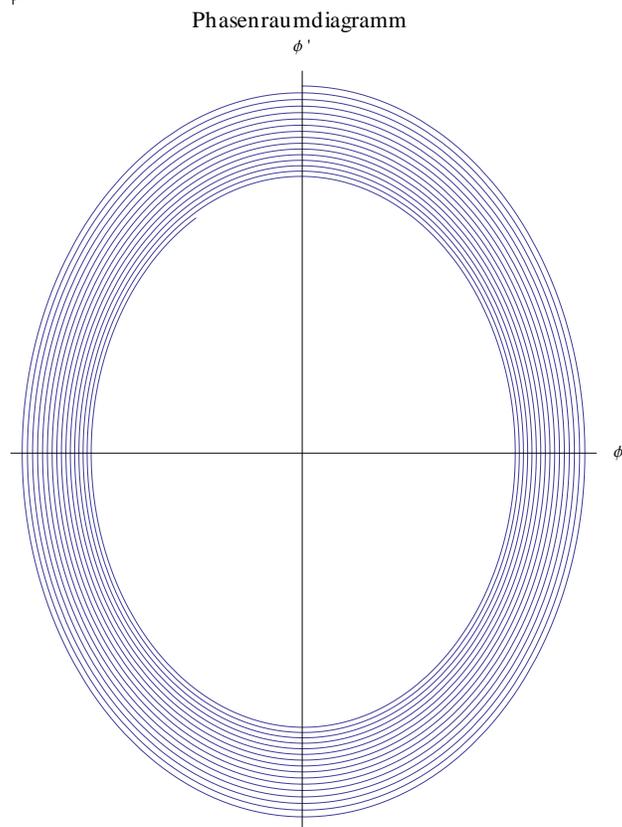
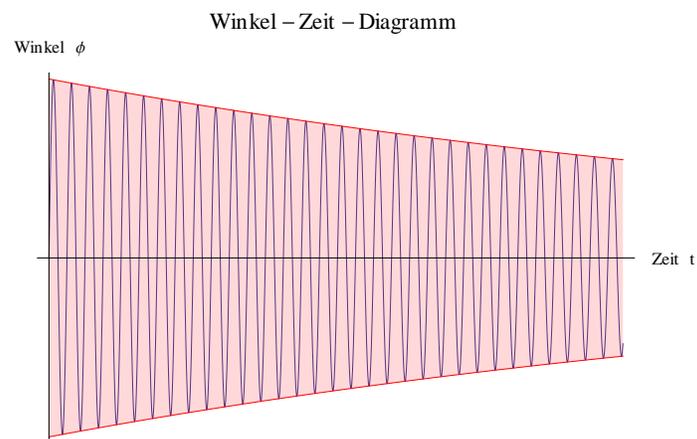
Luft. Wie oben besprochen ist die Kurve dann durch

$$\phi = \phi_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t - \psi)$$

beschrieben, wobei

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$$

Die Periodendauer sowie die Größe des exponentiellen Abfalls der Amplitude geben Rückschluss auf die Dämpfungskonstante. ω_0 ergibt sich aus den Spulendaten. Insgesamt erwarten wir Graphen wie diese hier:



1.2 Freie gedämpfte Schwingung

Nun wird zu der eben betrachteten Schwingung noch die Wirbelstrombremse für verschiedene Ströme I_B dazugeschaltet. Dadurch wird sich der Dämpfungsfaktor β je nach Strom I_B verändern. Er kann wieder aus der Größe des Abfalles der Amplituden ermittelt werden. Eine zweite Möglichkeit ist die Ermittlung über das oben besprochene Dämpfungsverhältnis k :

$$\ln k = \beta T$$

Das Dämpfungsverhältnis kann hierbei (zur Verminderung des Fehlers) über einige Perioden n bestimmt und dann gemittelt werden. Entweder man bildet den normalen Mittelwert

$$k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\phi(t + iT)}{\phi(t + (i+1)T)}$$

oder man berechnet über

$$k = \sqrt[n]{\frac{\phi(t)}{\phi(t + nT)}}$$

Die zweite Rechnung ist zwar ungenauer, dafür (da nur zweimal gemessen werden muss) weniger fehleranfällig.

Für die Periodendauer gilt dann

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^2}} = T_0 \left(1 - \left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^2\right)^{-1/2}$$

wenn T_0 die Periodendauer ohne Dämpfung β ist (also die Eigenschwingung des Systems beschreibt). Im hier betrachteten Schwingfall ist aber (siehe oben)

$$\left(\frac{\beta}{\omega_0}\right) \ll 1$$

und damit mit einer Taylorentwicklung

$$T \approx T_0 \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^2 + O\left(\frac{\beta^3}{\omega_0^3}\right)\right) \approx T_0$$

Deshalb wird kaum eine Abhängigkeit der Periodendauer von der Dämpfung zu sehen sein. Um die eigentliche Dämpfung der Wirbelstrombremse zu ermitteln, wird die im vorigen Versuch ermittelte Luftdämpfungskonstante abgezogen. Die Dämpfung von der Wirbelstrombremse entsteht als magnetische Kraft durch das erzeugte \vec{B} -Feld. Für diese Kraft gilt

$$\vec{F} = I(\vec{l} \times \vec{B}) \propto I|B|$$

Da das \vec{B} -Feld ebenso proportional zum fließenden Strom ist, gilt

$$\beta \propto |F| \propto I^2$$

Die dabei verknüpfende Konstante c führt auch zum Grenzstrom beim aperiodischen Grenzwertverhalten ($\beta = \omega_0$), denn

$$I = \sqrt{\frac{\beta}{c}} = \sqrt{\frac{\omega_0}{c}}$$

Außerdem kann die Güte Q des Systems aus den gemessenen Werten bestimmt werden.

1.3 Winkelrichtgröße D^*

Durch einen einfachen Aufbau kann die Winkelrichtgröße D^* der Feder direkt gemessen werden. Verschiedene Gewichte der Masse g werden über einen Faden an das Polsche Rad gebunden und die Auslenkung gemessen. Im statischen Fall herrscht also gerade Gleichgewicht zwischen dem angreifenden Drehmoment durch die Schwerkraft

$$M_1 = \vec{r} \times \vec{F}_g = r_a m g$$

und der rücktreibenden Kraft der Drehfeder

$$M_2 = D^* \phi_m$$

Der Winkel ϕ_m kann jetzt gemessen werden und man erhält daraus dann die Winkelrichtgröße

$$D^* = \frac{r_a m g}{\phi_m}$$

Legt man den Faden nicht durch die Randnut, ist diese Rechnung nicht so einfach durchzuführen. Über

$$\omega_0^2 = \frac{\Theta}{D^*}$$

lässt sich jetzt auch noch einmal der Trägheitsmoment Θ bestimmen, denn es gilt

$$\Theta = \frac{D^*}{\omega_0^2} = \frac{D^* T(0)^2}{4\pi^2}$$

Die Periodendauer T lässt sich deshalb trotz Dämpfung aus der Kurve ermitteln, da - wie oben gezeigt - die Dämpfung klein genug ist.

1.4 Erzwungene Schwingung

Durch einen Elektromotor wird dem System eine Schwingung aufgezwungen. Wo oben gezeigt, reagiert dieses je nach angeschlossener Frequenz anders. Phasenverschiebungen und Amplitu-

den der einzelnen Schwingvorgänge (jeweils nach der Einschwingphase) hängen stark von dieser Frequenz Ω und von der Dämpfung β ab. Es gelten die Formeln

$$\chi_s = \frac{k}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\beta\Omega)^2}} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{2\beta\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}\right)$$

Für verschiedene Konstellationen von Ω und ω_0 ergibt sich

$\Omega \ll \omega_0$ $\varphi \approx 0$. Erzwungene Schwingung und Oszillator sind in Phase

$\Omega \approx \omega_0$ $\varphi \approx -\pi/2$. Erzwungene Schwingung geht um eine viertel Periode voraus.

$\Omega \gg \omega_0$ $\varphi \approx -\pi$. Oszillator schwingt gerade gegenphasig.

Aus den Ergebnissen der Resonanzkurven (theoretischer Verlauf siehe Vorwort) kann ebenfalls die Güte bestimmt werden (über den Abstand der Amplituden bei der Höhe $1/\sqrt{2}$) und mit dem Messergebnis aus Aufgabe 2 verglichen werden.

2 Serienschwingkreis

Obwohl ein Schwingkreis auf den ersten Blick wenig Ähnliches zu einem Drehpendel zeigt, lässt er sich doch mit den gleichen Formeln und Beziehungen beschreiben. Alle oben gezeigten Resultate und Formeln übertragen sich wörtlich. Nur die jeweiligen Konstanten sind anders zu wählen, nämlich:

$$\phi \rightarrow I \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \beta \propto R$$

Trotzdem funktioniert das Prinzip genauso. Es wird ein Schwingkreis mit einer Spule $L = 44$ mH, einem Kondensator $C = 0.33$ μ F und verschiedenen Widerständen R_p in Reihe aufgebaut. Der Schwingkreis hat also - ohne Dämpfung durch die Widerstände - eine Eigenfrequenz von

$$\omega_0 \approx 8298 \text{ Hz} \implies f = 1320 \text{ Hz}$$

2.1 Erzwungene Schwingung

An diesen LRC-Schwingkreis wird jetzt eine sinusförmige Wechselspannung variabler Frequenz angeschlossen und auch hier wird dann das Resonanzverhalten untersucht, indem $I(\omega)$ bei verschiedenen Widerständen R_p gemessen wird. Die Impedanz des Schwingkreises ergibt sich aus

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

Sie kann als "normaler" Widerstand gemessen werden. Wieder können aus den Resonanzkurven ein Wert für die Güte Q ermittelt werden. Diesmal gilt aber auch zusätzlich im Resonanzfall

$$|U_L| = QU_0 \quad |U_C| = QU_0$$

Durch Abtragen der Spannungen an Kondensator und Spule in Resonanznähe kann also auch hier der Gütefaktor bestimmt werden. Je nach dessen Wert können diese Spannungen weit über der Ursprungsspannung liegen.

3 Quellen

Vorbereitungsmappe

Vorbereitungshilfe

Messprotokoll

A4

$$I_{\text{Brem}} = 800 \text{ mA}$$

Anregungsf.	f	2. Ampl.	Phasenversch.
0,469		0,908 86	0,265
0,299		0,259	0
0,380		0,414	0,135
0,655		0,237	0,68 \rightarrow Bild
0,567		0,596	0,74
0,519		1,235	0,62
0,5		1,372	0,45
0,539		0,922	0,72
0,479		1,106	0,28
0,506		1,331	0,48

$$I_{\text{Brem}} = 700 \text{ mA}$$

0,497	1,76	0,34	2,15
0,472	1,108	0,21	
0,428	0,573	0,14	
0,565	0,642	0,78	
0,511	1,881	0,48	

Del

Praktikumsprotokoll

zu Versuch Nummer 10
Resonanz

Ausgearbeitet von Martin Günther und Nils Braun

Ausarbeitung

Bearbeitung am 13. Dez. 2011

Abbildungsverzeichnis

1	Winkel-Zeit-Diagramm des ungedämpften Pendels mit angepasster Hüllkurve .	5
2	Winkelgeschwindigkeit-Zeit-Diagramm	6
3	Energie-Zeit-Diagramm	6
4	Phasenraumdiagramm	6
5	Gedämpfte Schwingung mit $I_B = 100$ mA	8
6	Gedämpfte Schwingung mit $I_B = 200$ mA	8
7	Gedämpfte Schwingung mit $I_B = 400$ mA	8
8	Gedämpfte Schwingung mit $I_B = 700$ mA	9
9	Gedämpfte Schwingung mit $I_B = 1520$ mA	9
10	Gedämpfte Schwingung mit $I_B = 1990$ mA	9
11	Ermittelte Werte für $\beta_{\text{korrt}} = \beta - \beta_0$ und angepasste Kurve $c_\beta I_B^2$	10
12	Amplitude(links) und Phasenverschiebung(rechts) für $I_B = 800$ mA	13
13	Amplitude(links) und Phasenverschiebung(rechts) für $I_B = 700$ mA	13
14	Beide Resonanzkurven im Vergleich	14
15	Beide Phasenverschiebungskurven im Vergleich	14
16	Resonanzkurven bei verschiedenen Dämpfungen	17
17	Phasenverschiebung bei verschiedenen Dämpfungen	17
18	Spannungskurve für $R = 8.2 \Omega$	20
19	Spannungskurve für $R = 47 \Omega$	20
20	Spannungskurve für $R = 100 \Omega$	20
21	Impedanzkurve für $R = 8.2 \Omega$	21
22	Impedanzkurve für $R = 47 \Omega$	21
23	Impedanzkurve für $R = 100 \Omega$	21

Vorwort

In diesem Versuch geht es um angeregte Schwingungen und damit vor allem um Resonanzeffekte. Wir werden sehen, dass die Bewegungsgleichung eines Drehpendels dieselbe Struktur hat, wie die Gleichungen, die die Wechselspannung an einem Schwingkreis beschreiben, und werden Parameter wie Resonanzfrequenzen, Bandbreiten, Gütefaktoren und Phasenverschiebungen messen bzw. bestimmen.

Zur Messung wird das CASSY-System benutzt, das es erlaubt, computergestützt Messreihen aufzunehmen und hierzu sogar automatisch bestimmte Größen (in unserem Fall Anregungsfrequenzen und Dämpfungen) einzustellen.

1 Drehpendel

1.1 Freie Schwingung

Wir experimentierten zuerst mit dem Pohlschen Rad. In der Vorbereitung wurde die Geometrie als Kreisring abgeschätzt, woraus man die Trägheitsmomente

$$\Theta = 1,387 \text{ g m}^2$$

bzw. unter Berücksichtigung des Lochkranzes für die Lichtschranke

$$\Theta = 1,20654 \text{ g m}^2$$

erhält. Wir ließen das Pohlsche Rad zuerst frei schwingen und zeichneten mit CASSY die Auslenkung Φ in Bogenmaß, ihre numerische Ableitung Φ' (Winkelgeschwindigkeit) und die Bewegungsenergie $W = 1/2\Theta\omega^2$ mit einer Messfrequenz von 20 Messwerten pro Sekunde auf. In den Abbildungen 1, 2 und 3 sind Winkel, Winkelgeschwindigkeit und Energie über die Zeit abgetragen, in 4 sieht man das Phasenraumdiagramm. Schon auf den ersten Blick erkennt man, dass die Dämpfung bei unserem Pendel sehr gering sein muss, denn es führte nach 10 Minuten immer noch deutlich sichtbare Schwingungen aus. Aus den Plots erhält man daher ein gutes Bild vom exponentiellen Amplitudenabfall, auch wenn die einzelnen Perioden kaum noch zu erkennen sind. Die Winkelgeschwindigkeit verhält sich qualitativ wie die Auslenkung (bis auf die Phasenverschiebung, die hier ebenfalls nicht zu erkennen ist), die Messwerte haben durch das numerische Ableiten aber größere Fehler. Die Energie fällt dagegen schneller ab, was natürlich am quadratischen Zusammenhang zur Winkelgeschwindigkeit liegt; dies entspricht einer Halbierung der Zeitkonstante. Das Phasenraumdiagramm gleicht fast einem ausgefüllten Kreis. Dies kommt, da die Energie der Schwingung durch Dämpfungseffekte immer weiter abnimmt und damit die Ellipse im Phasenraum immer kleiner wird. Die scheinbare Unregelmäßigkeit um den Nullpunkt entstand durch die Rundungen der Messergebnisse durch CASSY.

Die Frequenz und damit ω lässt sich direkt aus der Periodendauer ermitteln; um β zu berechnen, passten wir mit Hilfe von Mathematica die einhüllende Funktion

$$A_0 e^{-\beta t} + c$$

an die Spitzen der Amplitude Φ anⁱ. Wie man in Abbildung 1 erkennt, passt diese Funktion sehr gut zu den Messwerten. Wir fanden die Werte

$$T_0 = 1.95479 \text{ s}$$

$$\omega_0 = 3.21425 \text{ 1/rad}$$

$$\beta_0 = 0.00322826 \text{ 1/s}$$

ⁱdie Konstante c dient dazu, die Drift des Nullpunktes auszugleichen

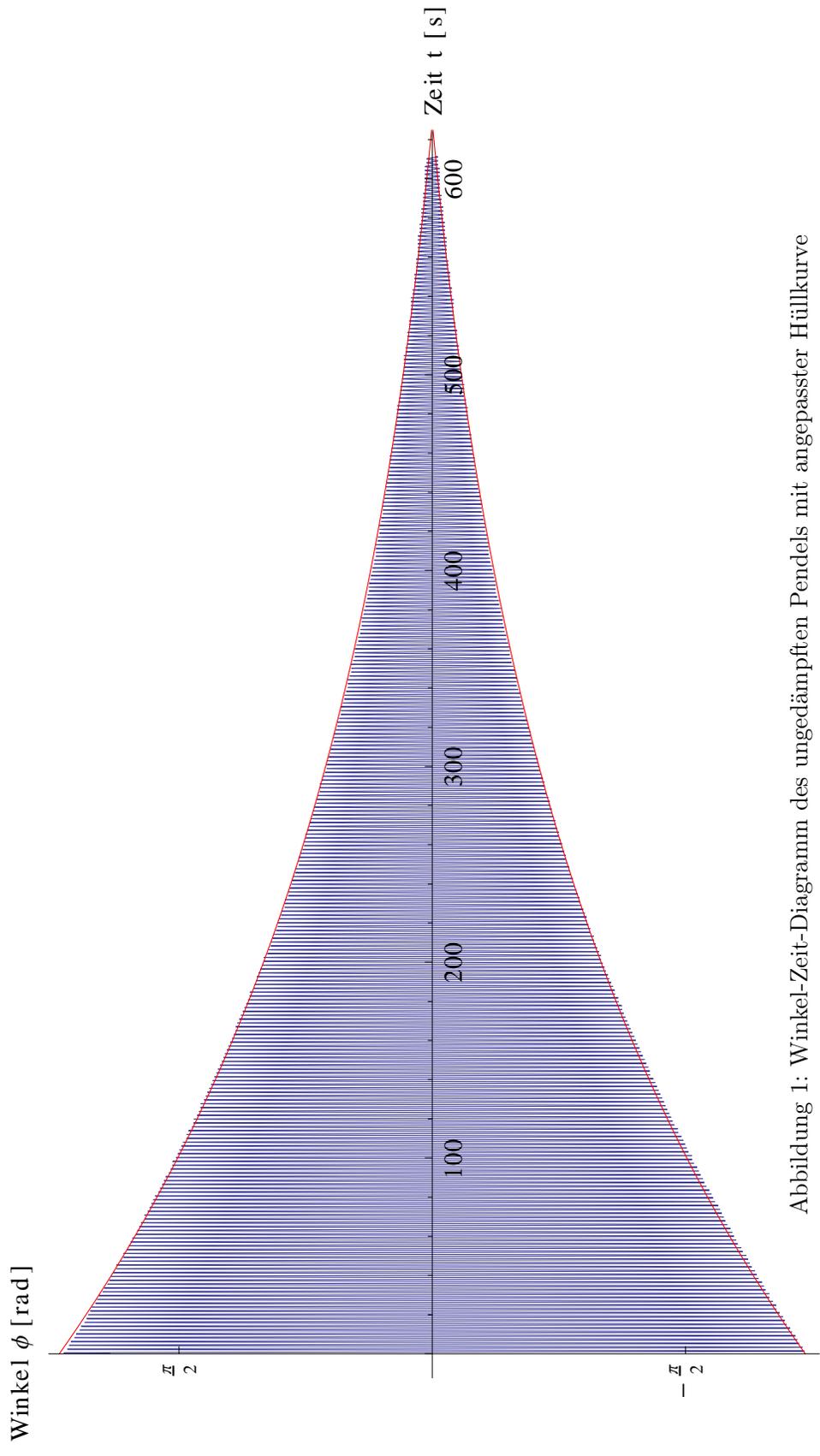


Abbildung 1: Winkel-Zeit-Diagramm des ungedämpften Pendels mit angepasster Hüllkurve

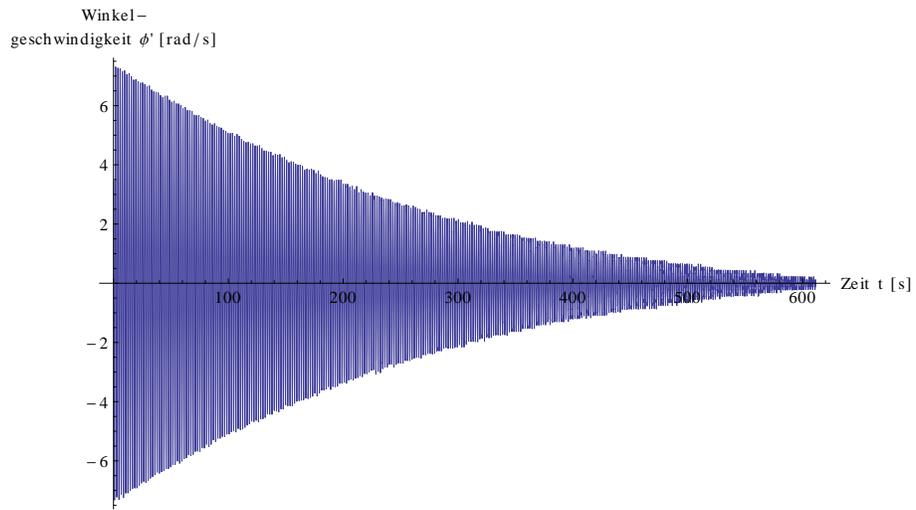


Abbildung 2: Winkelgeschwindigkeit-Zeit-Diagramm

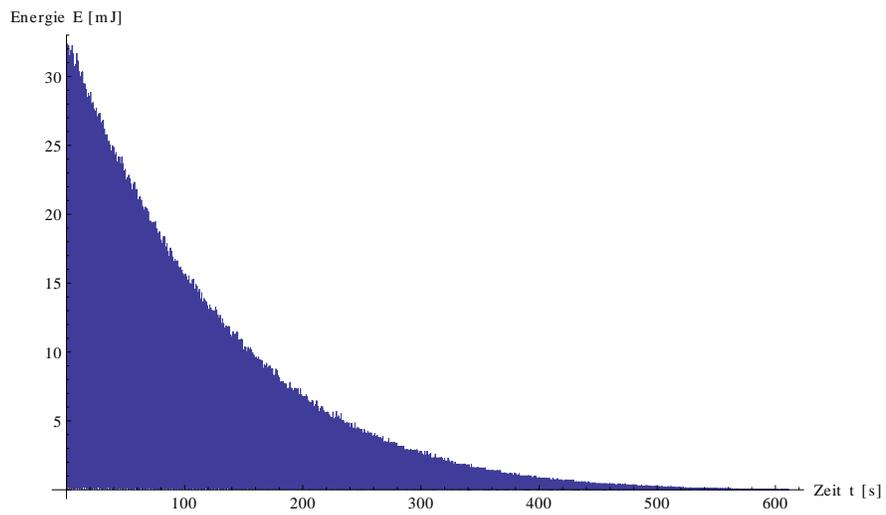


Abbildung 3: Energie-Zeit-Diagramm

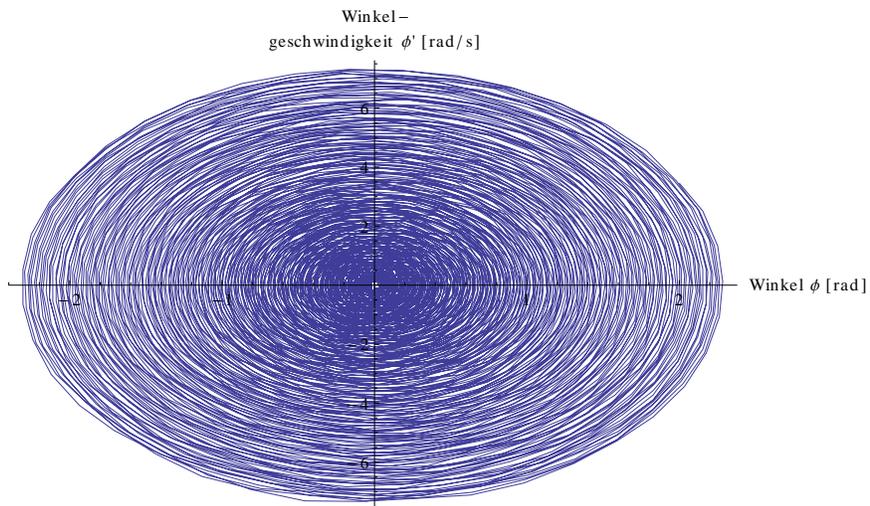


Abbildung 4: Phasenraumdiagramm

1.2 Freie gedämpfte Schwingung

Nun wiederholten wir den Versuch mit eingeschalteter Wirbelstrombremse bei verschiedenen Bremsströmen I_B . Wieder nahmen wir mit CASSY die einzelnen Messdaten auf und führten daran einen Fit der Hüllkurve aus, um den Dämpfungsfaktor $\beta(I_B)$ zu bestimmen.

Wie in der Vorbereitung diskutiert, erwarten wir eine Abhängigkeit der Form

$$\beta(I_B) = \beta_0 + c_\beta I_B^2$$

Weil bei größeren Dämpfungen immer weniger Perioden beobachtbar sind, ergaben sich ab $I_B \geq 400$ mA bessere Ergebnisse, wenn man die Funktion $A_0 e^{-\beta t} \sin[\omega t - \psi] + c$ direkt an die Messwerte anpasst (Siehe Abbildungen 5 bis 10). Wir fanden die Werte:

I_B [mA]	β [rad/s]
100	0.00666757
200	0.0188635
400	0.0549954
700	0.145882
1520	0.715956
1990	1.16146

Eine andere Möglichkeit zur Bestimmung der Dämpfungskonstante β ist über das Dämpfungsverhältnis k mit $\ln k = \beta T$. Um k zu berechnen, wendeten wir die zwei auf dem Aufgabenblatt gegebenen Formeln

$$k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\phi_{i-1}}{\phi_i} \quad k = \sqrt[n]{\frac{\phi_0}{\phi_n}}$$

an. Wir variierten jeweils das n und passten es für verschiedene Messungen auf die Messreihe an (bei den höheren Bremsströmen konnten wir nur noch ca. 5-10 Periodendauern messen). Mit diesen zwei Methoden (Summe und Wurzel) erhielten wir folgende Messergebnisse

I_B [mA]	β [rad/s] Summe	β [rad/s] Wurzel
100	0.00700659	0.00700658
200	0.0185105	0.0185106
400	0.0551955	0.0551955
700	0.138178	0.138209
1520	0.719722	0.719727
1990	1.16845	1.16849

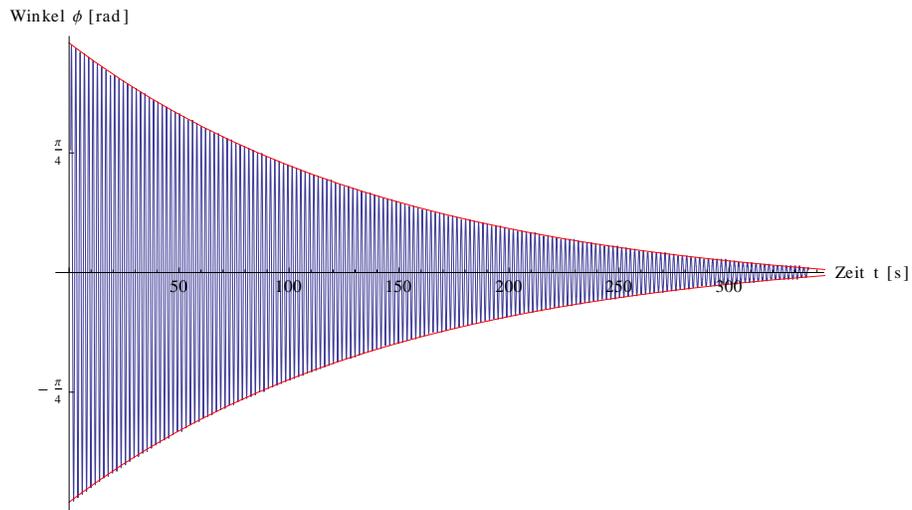


Abbildung 5: Gedämpfte Schwingung mit $I_B = 100$ mA

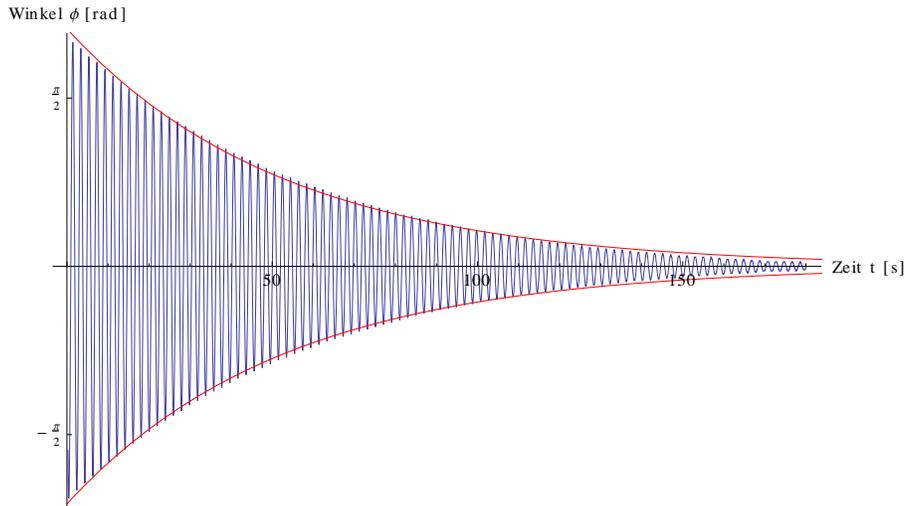


Abbildung 6: Gedämpfte Schwingung mit $I_B = 200$ mA

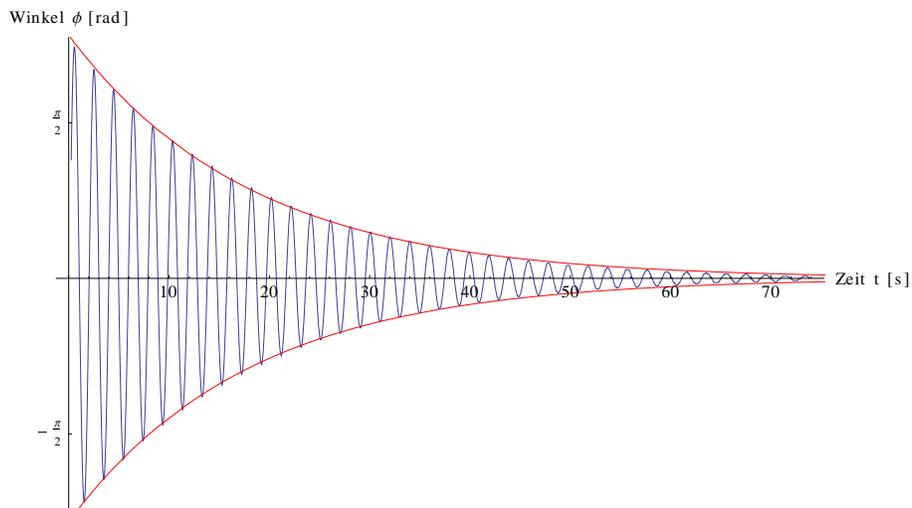


Abbildung 7: Gedämpfte Schwingung mit $I_B = 400$ mA

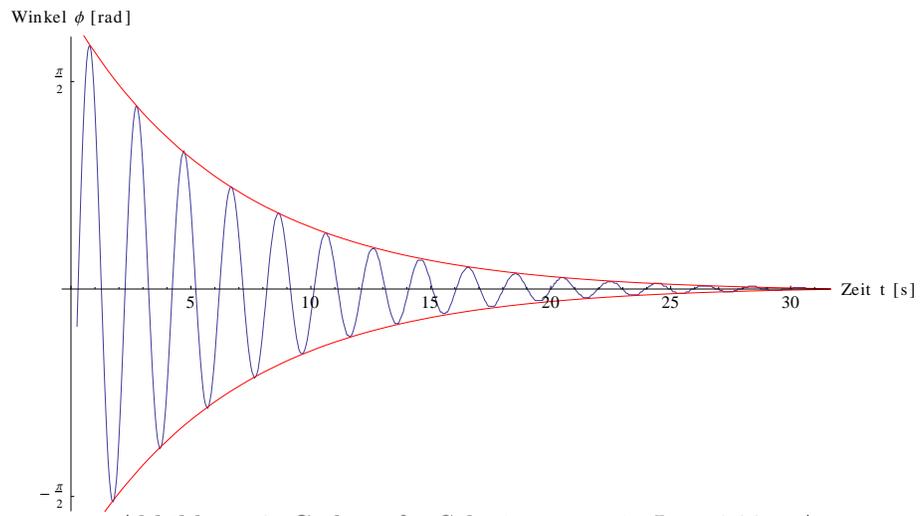


Abbildung 8: Gedämpfte Schwingung mit $I_B = 700 \text{ mA}$

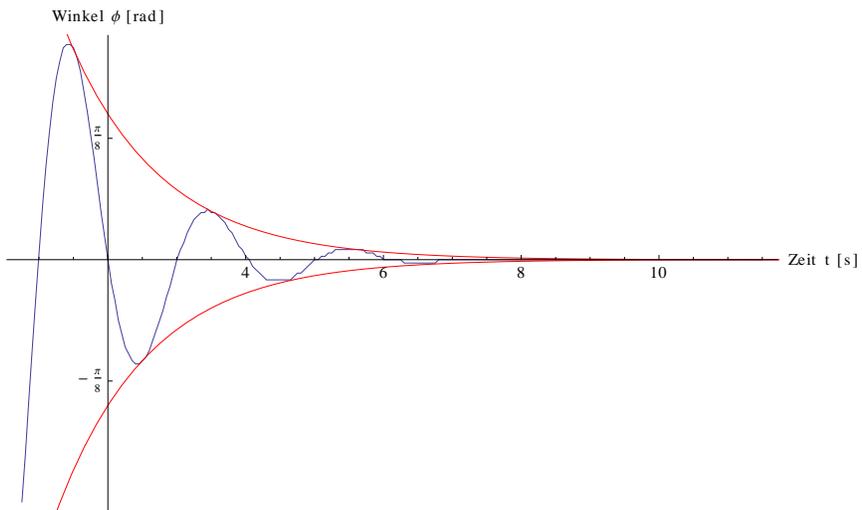


Abbildung 9: Gedämpfte Schwingung mit $I_B = 1520 \text{ mA}$

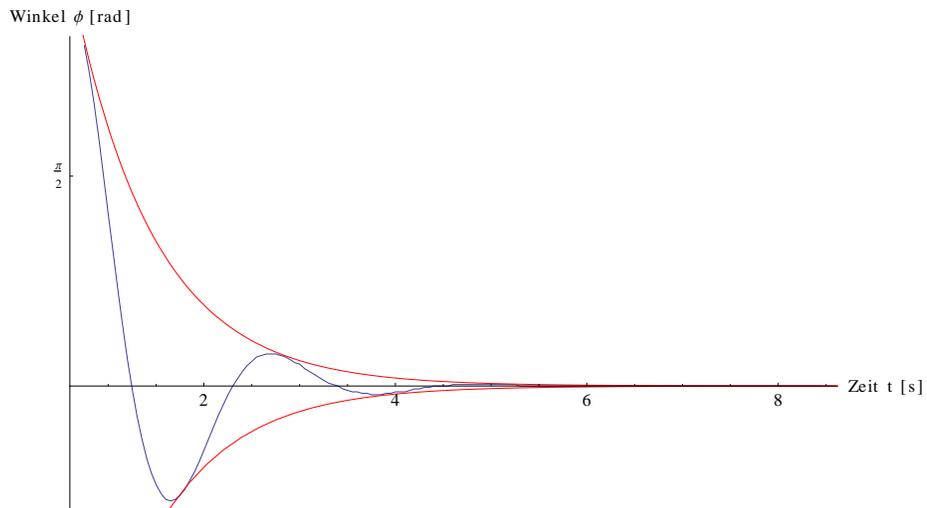


Abbildung 10: Gedämpfte Schwingung mit $I_B = 1990 \text{ mA}$

Zumindest bis zur zweiten oder dritten Kommastelle gleichen sich die Werte aus den verschiedenen Methoden. Dies zeigt die hohe Qualität des Fits, da bei den anderen Methoden ja direkt mit den Messdaten gearbeitet wurde. Auch sehen wir hier, dass die beiden Methoden Wurzel und Summe zwar unterschiedliche Ergebnisse liefern (die Wurzelmethode ist ungenauer) aber für unsere Zwecke (und im Anbetracht der Messungenauigkeit) mehr als ausreicht.

Um jetzt die Proportionalitätskonstante C_β zu bestimmen, subtrahieren wir $\beta_0 = 0.00322826$ 1/s aus dem ersten Versuch von den gemessenen $\beta(I_B)$ -Werten und erhalten damit β_{korrr} , welches in folgendem Schaubild eingetragen ist:

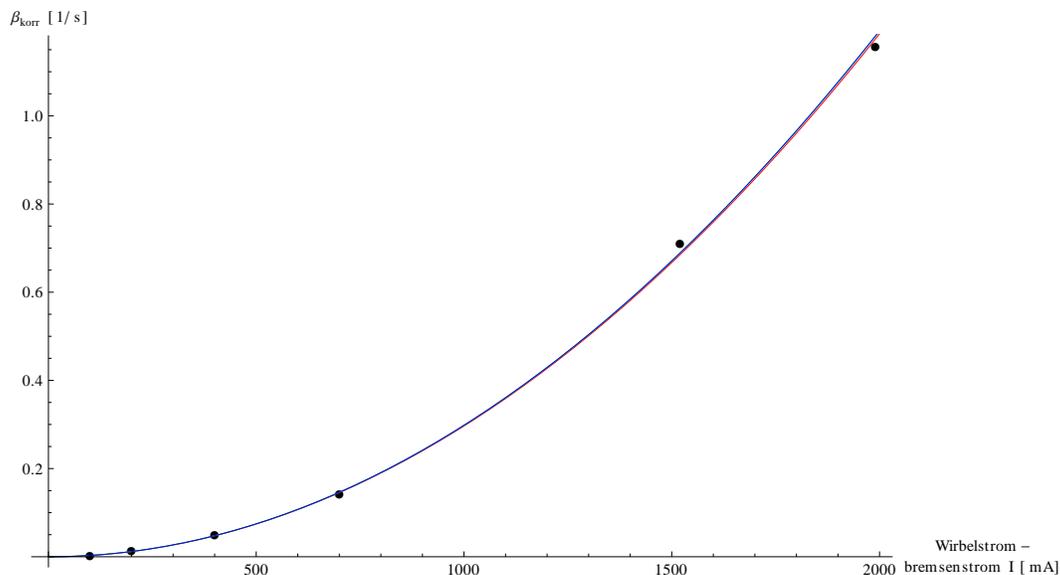


Abbildung 11: Ermittelte Werte für $\beta_{\text{korrr}} = \beta - \beta_0$ und angepasste Kurve $c_\beta I_B^2$

Die theoretische Kurve $c_\beta I_B^2$ ließ sich recht gut an die Messwerte $\beta(I_B) - \beta_0$ anpassen (Siehe Abbildung 11) und wir erhielten

$$c_\beta = 3,0 \cdot 10^{-7}$$

Damit lässt sich der Strom extrapolieren, der nötig wäre, um den aperiodischen Grenzfall zu erreichen:

$$I_{\text{grenz}} = \sqrt{\frac{\omega_0 - \beta_0}{c_\beta}} = 3271 \text{ mA}$$

Da die uns zur Verfügung stehende Wirbelstrombremse nur einen Maximalstrom von ungefähr 2 A erzeugen konnte, konnte dieses Messergebnis nicht experimentell nach geprüft werden. Bei maximaler Belastung der Bremse schwang das Pendel immer noch einige Male.

Auch die β -Werte aus den anderen beiden Methoden ergaben hier das selbe Ergebnis, was noch einmal deren gute Übereinstimmung zeigt. Alle Kurven sind im Schaubild eingetragen - auch wenn graphisch kaum ein Unterschied zu erkennen ist.

Mit den gefundenen Werten für β lässt sich die Güte der einzelnen Systeme bestimmen. Diese ist definiert über das Verhältnis der Schwingungsenergie zum Energieverlust pro Periode und lässt sich für kleine Werte von $\beta T \ll 1$ nähern über

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta}$$

Für größere Werte ist diese Näherung allerdings zu schlecht, weshalb wir dann

$$Q = \frac{2\pi}{1 - (e^{-2\pi\beta/\omega_0})^2}$$

benutzen müssen. Für die Bremsstromstärke von $I_B = 700$ mA beträgt der Faktor βT zum Beispiel

$$\beta T = 2\pi \frac{\beta}{\omega_0} = 0.270103445$$

und ist somit nicht mehr zu vernachlässigen. Deshalb wenden wir für die Berechnung der Güte ab diesem Bremsstrom die zweite Formel an. Die Werte für β und ω_0 kommen (wie oben beschrieben) aus den einzelnen Fits (oder aus Aufgabe 1).

I_B [mA]	Q (1. Formel)	Q (2. Formel)
100	241.036	244.191
200	85.1976	88.3778
400	29.2229	32.477
700	11.0166	14.4552
1520	2.24473	6.6904
1990	1.38371	6.35092

Man sieht, dass die Entscheidung, ab einem Bremsstrom von 700 mA die zweite (bessere) Formel zu verwenden, richtig ist.

Da die Dämpfung quadratisch mit dem Bremsstrom steigt, fällt die Güte des Systems quadratisch reziprok mit diesem. Das System schwingt also immer "schlechter" je mehr Bremsstrom fließt (was zu erwarten war).

Wie schon in der Vorbereitung theoretisch hergeleitet, zeigt die Periodendauer $T = T(I_B)$ kaum eine Abhängigkeit vom Bremsstrom. Durch die im Fit bestimmten Werte konnten wir dies noch einmal experimentell bestätigen.

1.3 Winkelrichtgröße D^*

Wir bestimmten die Federkonstante D^* der rücktreibenden Spiralfeder, indem wir das Rad in beide Richtungen mit Gewichten m belasteten und dabei die Auslenkung Φ_m maßen. In der

Vorbereitung wurde die Formel

$$D^* = \frac{r_a m g}{\Phi_m}$$

hergeleitet. Wir maßen für verschiedene Gewichte $g = 5, 10, 20$ g

m [g]	Φ_m [rad]		D^* [Nm/rad]	
	rechts	links	rechts	links
5	0.3699	0.369	0.0125553	0.0125553
10	0.729	0.739	0.0127426	0.0125553
20	1.436	1.468	0.0129357	0.0126483
Mittelwert:			0.0126654	

Berechnet man Θ nun aus den experimentell bestimmten Werten ω_0 und D^* , ergibt sich

$$\Theta = \frac{D^*}{\omega_0^2} = 1.22 \text{ g m}^2$$

Zwischen den einzelnen Federkonstanten links und rechts ist zwar ein Unterschied zu sehen (rechts scheint größer zu sein), jedoch ist dieser so gering, dass er nicht weiter ins Gewicht fällt.

Der berechnete Trägheitsmoment des Pohlschen Rads liegt zwischen den beiden von uns berechneten theoretischen Werten in der Vorbereitung. Eigentlich hätten wir dies nicht erwarten, da wir beide die Speichen des Pohlschen Rads bei unserer Näherung nicht einberechnet hatten. Eine Möglichkeit wäre ein Fehler in den Herstellerangaben über das Pohlsche Rad, die wir nicht mehr gemessen haben.

1.4 Erzwungene Schwingung

Das Drehpendel wurde im nächsten Versuch durch einen Motor mit Exzenter angeregt, um das Resonanzverhalten zu untersuchen. Dabei wurde die Wirbelstrombremse in der ersten Messreihe mit $I_B = 800$ mA und in der zweiten Messreihe mit $I_B = 700$ mA betrieben. Nach dem Einstellen einer Motorspannung warteten wir jeweils, bis die Amplitude sich nicht mehr nennenswert veränderte und nahmen dann 10 Perioden der Schwingung mit CASSY auf. Direkt im Programm bestimmten wir daraus Amplitude, Frequenz und Phasenverschiebung zwischen der Anregung und der Schwingung des Pendels. Die Phasenverschiebung maßen wir einfach durch die Zeitdifferenz zweier Maxima der beiden Graphen. Dabei versuchten wir die Messpunkte um die Resonanzfrequenz herum möglichst dicht zu verteilen. An die erhaltenen Messpunkte passten wir dann die theoretischen Kurven

$$A_s = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}$$

$$\psi_s = \arctan\left(\frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{2\beta\Omega}\right) - \frac{\pi}{2}$$

an. In den Abbildungen 12 und 13 erkennt man, dass die Resonanzkurve sehr gut zu den Messwerten der Amplitude passt, während die Fehler bei der Phasenverschiebung etwas größer sind. Dies lag wahrscheinlich an unserer Messmethode der Phasenverschiebung in CASSY, bei der wir für verschiedene Frequenzen starke Probleme hatten, die Zeitdifferenz zu bestimmen. Auch mussten wir diese mit den schon erhaltenen Periodendauern verrechnen (um daraus den Winkel mit $\Delta\phi = 2\pi\Delta t/T$ zu bekommen), weshalb dieser Wert doppelt für Fehler anfällig ist.

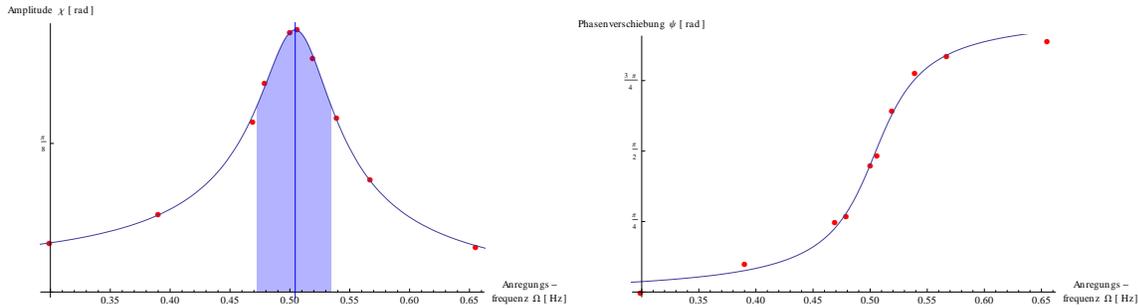


Abbildung 12: Amplitude(links) und Phasenverschiebung(rechts) für $I_B = 800$ mA

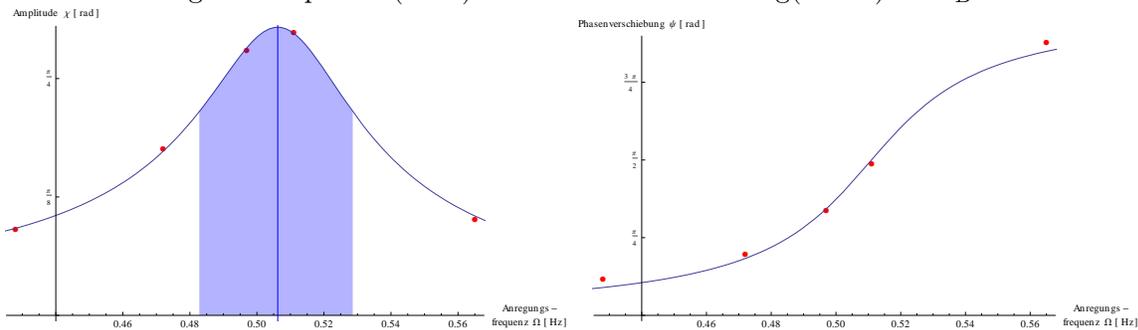


Abbildung 13: Amplitude(links) und Phasenverschiebung(rechts) für $I_B = 700$ mA

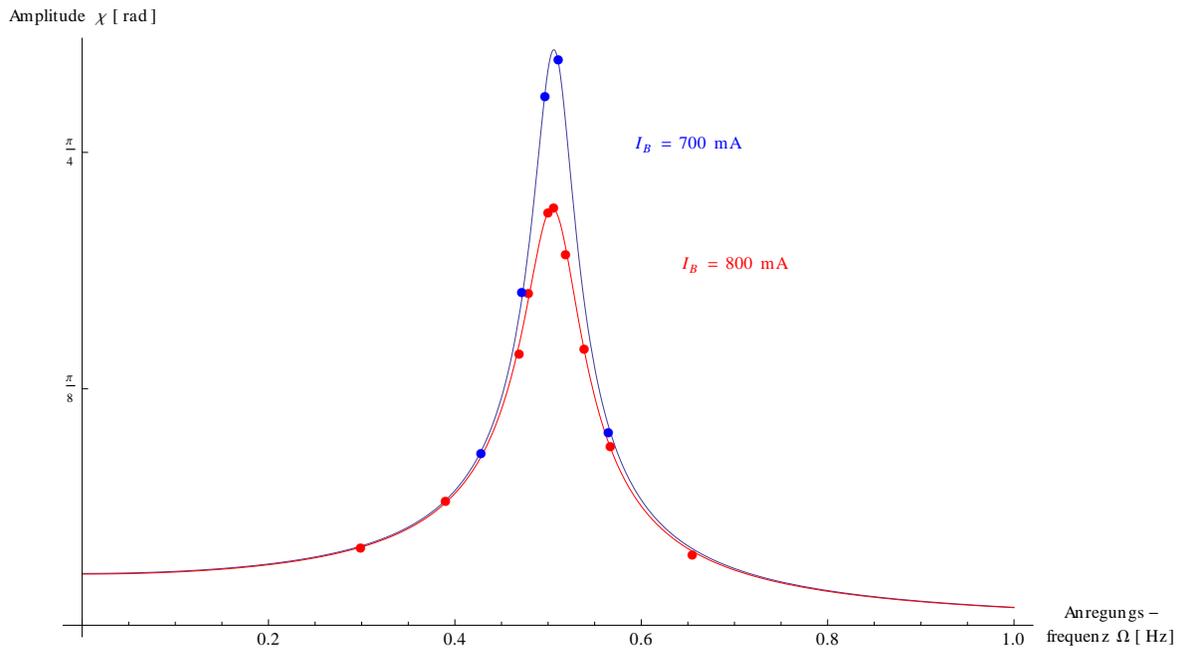


Abbildung 14: Beide Resonanzkurven im Vergleich

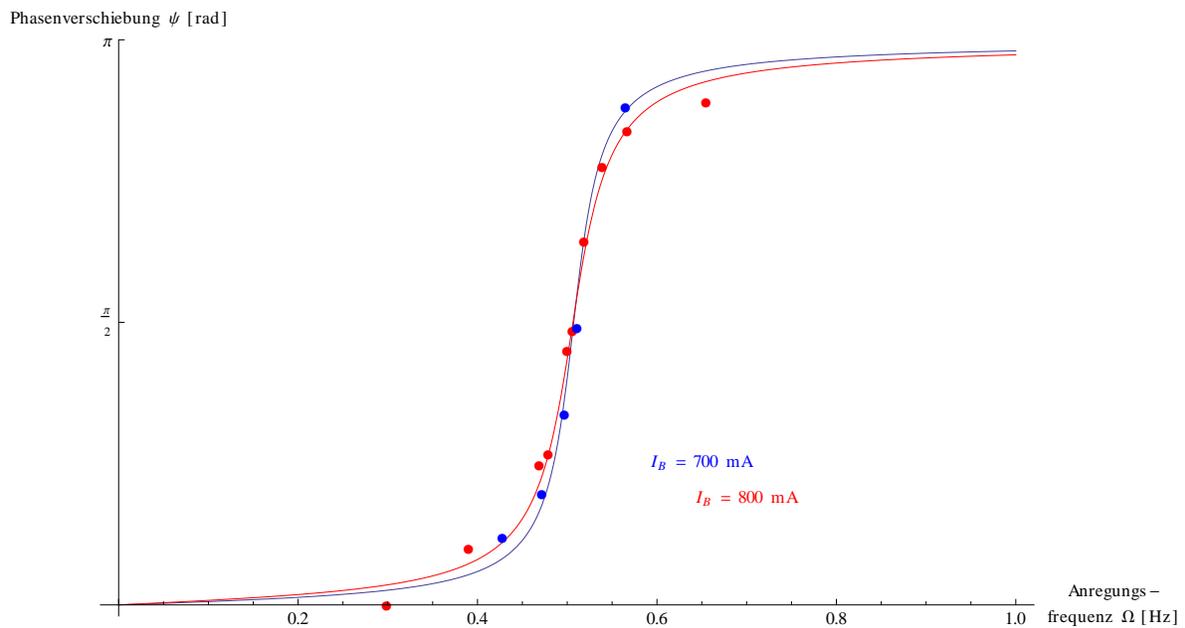


Abbildung 15: Beide Phasenverschiebungskurven im Vergleich

Wie in der Vorbereitung schon diskutiert, gilt auch für die experimentell bestimmte Phasen-

verschiebung

$$\Omega \ll \omega_0 \implies \psi_s \approx 0$$

$$\Omega \approx \omega_0 \implies \psi_s \approx \pi/2$$

$$\Omega \gg \omega_0 \implies \psi_s \approx \pi$$

Auch zeigt die Kurve kleinerer Dämpfung eine größere Resonanzspitze also die Kurve mit stärkerer Dämpfung - deren Resonanzpeak auch breiter ist. Diese Beobachtung lässt sich auch bei der Phasenverschiebung machen. Die Kurve mit $I_B = 700$ mA zeigt ein viel steileres Verhalten um die Resonanzfrequenz.

In diesem Versuch konnte die Güte auch auf eine andere Art bestimmt werden: über die Breite des Resonanzpeaks. Dazu vermaßen wir die Breite des Peaks bei $\phi_{\max}/\sqrt{2}$ bei der gefitteten Kurve. Die Güte lies sich dann durch die in der Vorbereitungshilfe gegebene Formel

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

berechnen. Wir erhielten für die beiden Bremsströme

$$Q_{700} = 11.060510171 \quad Q_{800} = 8.120519429$$

Wieder ist die Güte bei kleinerer Dämpfung größer. Das Ergebnis aus Aufgabe 2 war für 700 mA eine Güte von $Q = 10.943$, was sehr gut zu diesem Messergebnis passt, aber auch klar macht, dass es sich hierbei nur um eine Näherung handelt (siehe auch Herleitung der Formel in der Vorbereitung). Leider können wir für $I_B = 800$ mA aber keinen Vergleich zur Aufgabe 2 ziehen, da wir dort nicht mit diesem Bremsstrom gemessen haben. Das Messergebnis passt aber gut in den reziprok quadratischen Abfall der Güte.

2 Serienschwingkreis

2.1 Erzwungene Schwingung

Im nächsten Versuch beobachteten wir das Resonanzverhalten eines Serienschwingkreises aus einer Spule $L = 44$ mH, einem Kondensator $C = 0,33$ μ F und verschiedenen Dämpfungswiderständen (8,2 Ω , 47 Ω , 100 Ω). Zu erwarten ist eine Resonanzfrequenz von $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} =$  8286 Hz. Durch das Power-CASSY-Modul wurde eine Wechselspannung definierter Frequenz erzeugt und dabei Strom, Spannung und ihre Phasenverschiebung gemessen. Außerdem wurden die Effektivwerte der Spannung an der Spule und dem Kondensator gemessen, um die Spannungsüberhöhung zu beobachten. Die Messpunkte wurden in Resonanznähe automatisch dichter gewählt.

In Abbildung 16 sieht man die Messpunkte für die Amplitude und die angepasste theoretische

Kurve. Man erkennt deutlich, dass bei höheren Dämpfungswiderständen die Kurve flacher und breiter wird. Auch die Phasenverschiebung wurde gemeinsam in einem Schaubild mit den gefitteten Kurven abgetragen. Wie zu erwarten zeigen die Kurven für eine Anregungsfrequenz weit unter der Resonanzfrequenz eine Phasenverschiebung von ungefähr $\pi/2$ und weit über dieser eine von $-\pi/2$. Als Resonanzfrequenz ergibt sich ungefähr ein Wert von

$$f = 1500 \text{ Hz} \quad \omega \approx 9400 \text{ Hz}$$

Dieser liegt doch stark neben der erwarteten Resonanzfrequenz. Die gemachten Fits lieferten jedoch auch für C und L Werte, die teilweise um 50 % um den wahren Wert schwankten. Zu erklären ist dies vielleicht durch Fehler im Messaufbau oder durch Alterserscheinungen (und damit unvorhersehbaren Effekten) am Kondensator oder an der Spule.

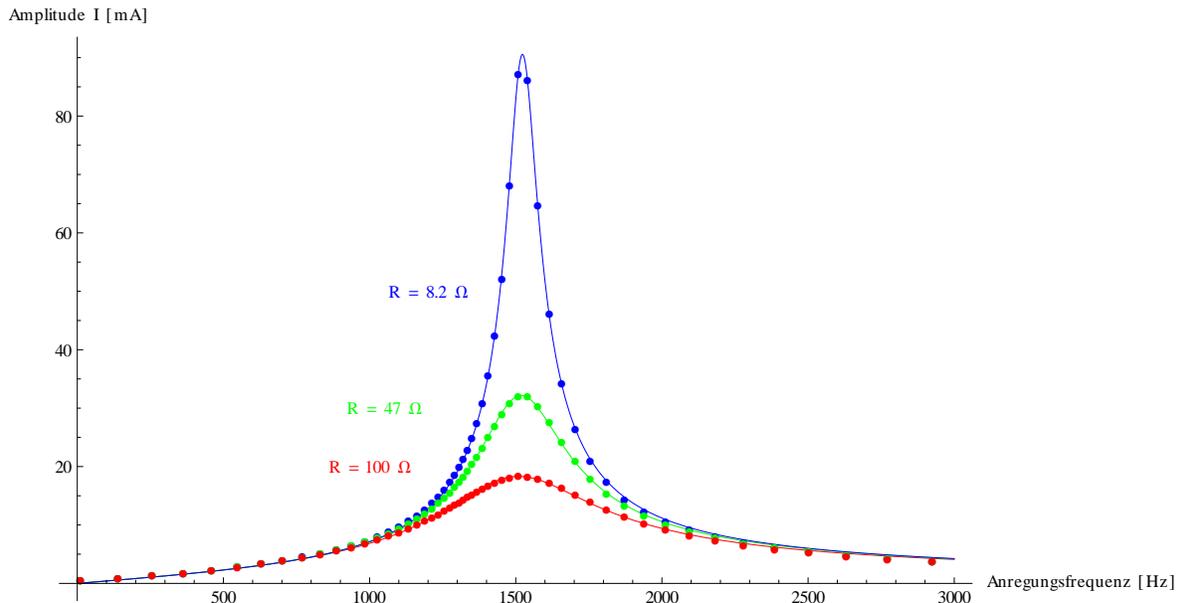


Abbildung 16: Resonanzkurven bei verschiedenen Dämpfungen

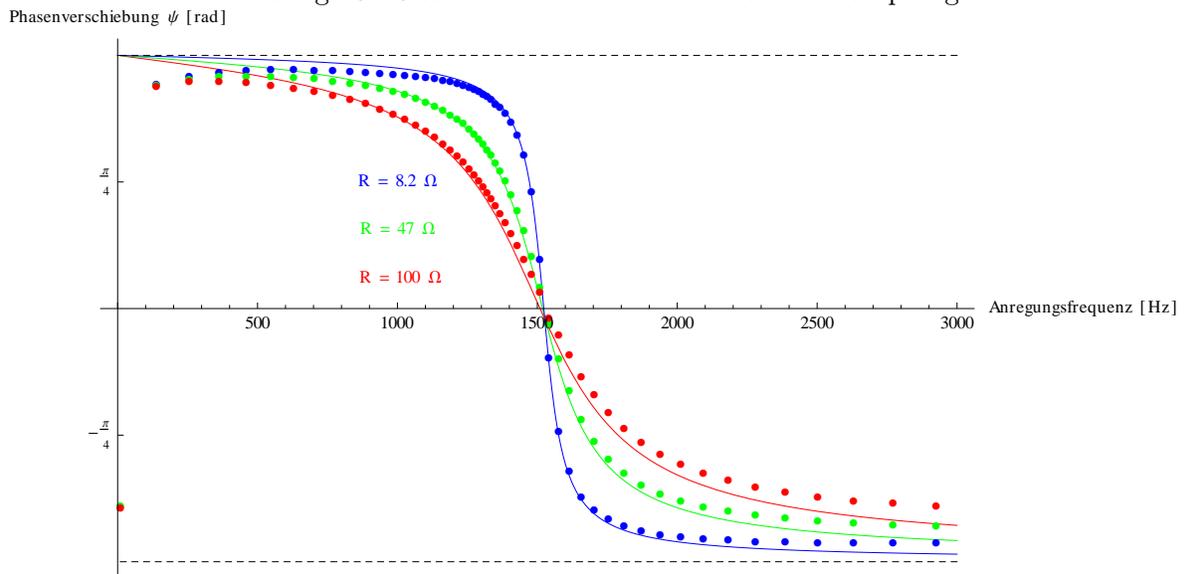


Abbildung 17: Phasenverschiebung bei verschiedenen Dämpfungen

Die Fits lieferten folgende Messwerte für Spule, Kondensator und Widerstand:



Erwarteter Widerstand Ω	Spule		Kondensator		Widerstand	
	mL	mL	μF	μF	Ω	Ω
Fit an ...	Amplitude	Phasenv.	Amplitude	Phasenv.	Amplitude	Phasenv.
8.2	33.5017	35.8056	32.5943	30.443	22.0115	25.4067
47	25.6484	32.5443	42.8118	33.2429	47.493	63.7642
100	20.3502	39.4556	54.6214	27.1093	65.7682	138.325

Vor allem der meist sehr große Unterschied zwischen dem ermittelten Widerstand und dem angeschlossenen, zeigt die leider sehr schlechte Qualität der Messdaten. Graphisch scheint aber zumindest der Fit an die Amplitudendaten gut zu passen, weshalb wir im Weiteren vor allem mit den gewonnenen Daten aus diesem Schaubild weiter arbeiten. Trotz der Qualität der Daten lässt sich erkennen, dass die Resonanzfrequenz bei verschiedener Dämpfung verschoben wird - die Schaubilder der Phasenverschiebung schneiden sich nicht auf der x -Achse. Dies ist in Übereinstimmung mit den Formeln, da hier für die Resonanzfrequenz

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

gilt und damit Ω_r von der Dämpfung β abhängig ist.

Die Beziehung

$$Q \approx \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \approx \frac{\omega_0}{2\beta}$$

für den Gütefaktor bei kleinen Widerständen gilt weiterhin. Mit dieser Rechnung (und der Vermessung von $\Delta\omega$ im Schaubild) kommt man auf folgende Werte für die Güte Q des Schwingkreises:

Widerstand R [Ω]	Güte Q
8.2	14.5651
47	5.15369
100	2.93486

Auch hier ist wieder klar zu erkennen, dass die Güte mit steigender Dämpfung sinkt. Der Wert der Güte für den kleinsten Widerstand erscheint jedoch sehr hoch und wir werden später noch sehen, dass er sich durch eine zweite Messung nicht bestätigt. Warum dieser Wert so schlecht ist, konnten wir leider nicht herausfinden. Betrachtet man jedoch das Schaubild für die Amplituden, so ist zu sehen, dass genau bei der Resonanzfrequenz leider kein Messwert vorliegt und damit das Schaubild vielleicht so nicht ganz korrekt ist (und damit auch nicht die aus dem Fit gewonnenen Werte).

Beim Serienschwingkreis tritt in der Nähe der Resonanzfrequenz eine Spannungsüberhöhung auf; das bedeutet, die Spannungsamplituden an Spule und Kondensator alleine sind höher als die Gesamtspannung. Für $\Omega = \omega_0$ gilt

$$\begin{aligned}
A_s &= \frac{U_0}{R} \\
\Rightarrow U_C &= \frac{U_0}{\omega_0 RC} \sin(\Omega t + \psi_f) = -QU_0 \cos(\Omega t) \\
\Rightarrow U_L &= -\frac{L\omega_0 U_0}{R} \sin(\Omega t + \psi_f) = QU_0 \cos(\Omega t)
\end{aligned}$$

Die entstehenden Spannungen sind also um den Faktor Q größer als die Gesamtspannung. Durch die Betrachtung dieser Schaubilder kann also eine weitere Messung von Q durchgeführt werden. Wir erhielten diesmal folgende Messwerte:

Widerstand R [Ω]	Güte Q
8.2	4.56378
47	4.02433
100	2.84848

Die Werte für $R = 47 \Omega$, $R = 100 \Omega$ passen sehr gut zu den vorher ermittelten. Der Wert für $R = 8.2 \Omega$ erscheint uns hier wieder etwas zu klein. Der wahre Wert sollte also irgendwo dazwischen liegen. Bei $R = 100 \Omega$ ist zu erkennen, dass Spule und Kondensator ihr Spannungsmaxima nicht gleichzeitig erreichen. Dies kann eigentlich nicht sein und bleibt uns unerklärlich.

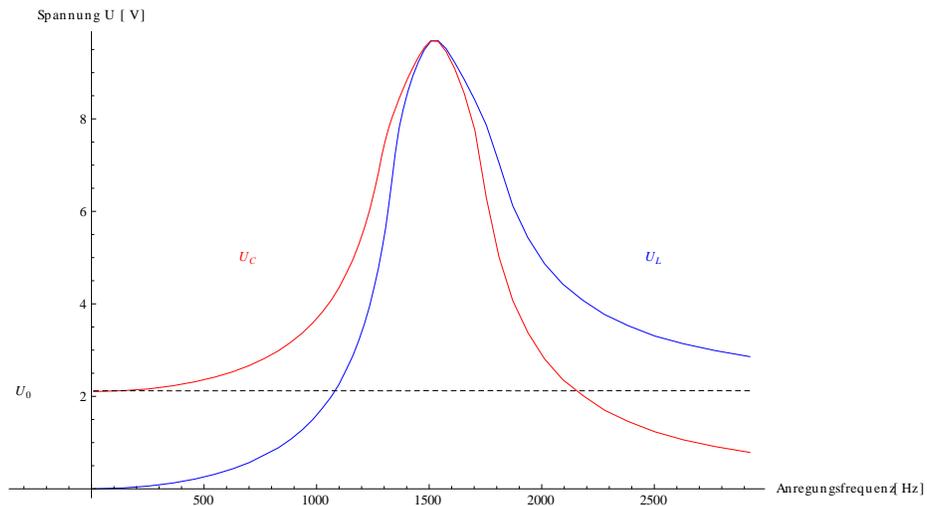


Abbildung 18: Spannungskurve für $R = 8.2 \Omega$

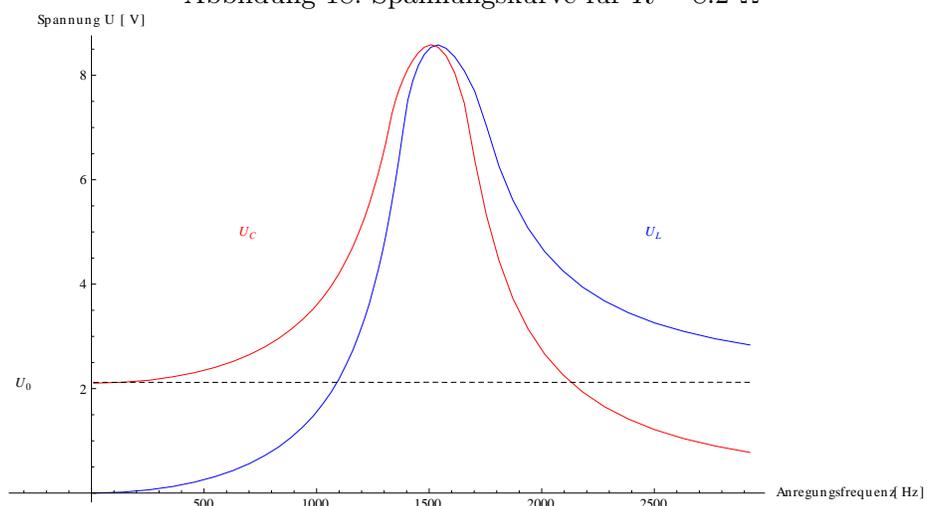


Abbildung 19: Spannungskurve für $R = 47 \Omega$

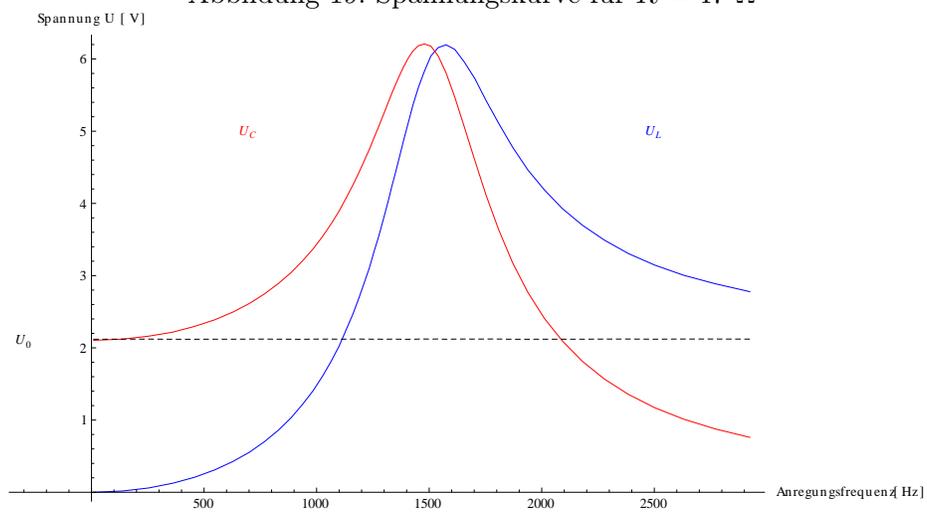


Abbildung 20: Spannungskurve für $R = 100 \Omega$

Schließlich wollen wir noch die Impedanzen betrachten:

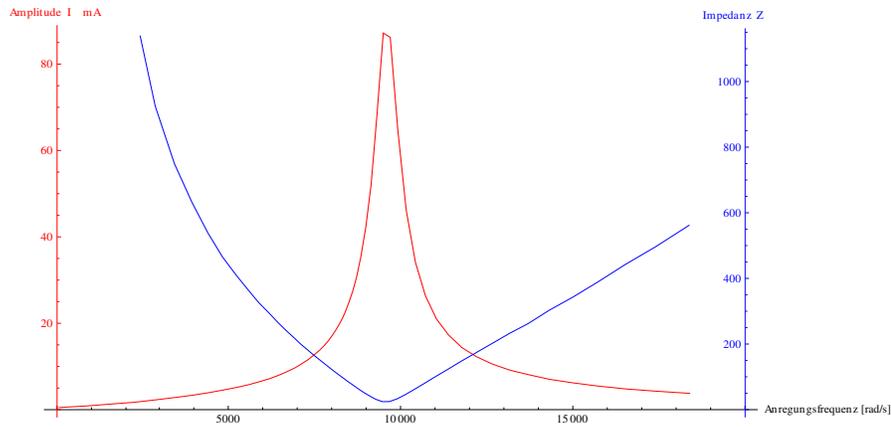


Abbildung 21: Impedanzkurve für $R = 8.2 \Omega$

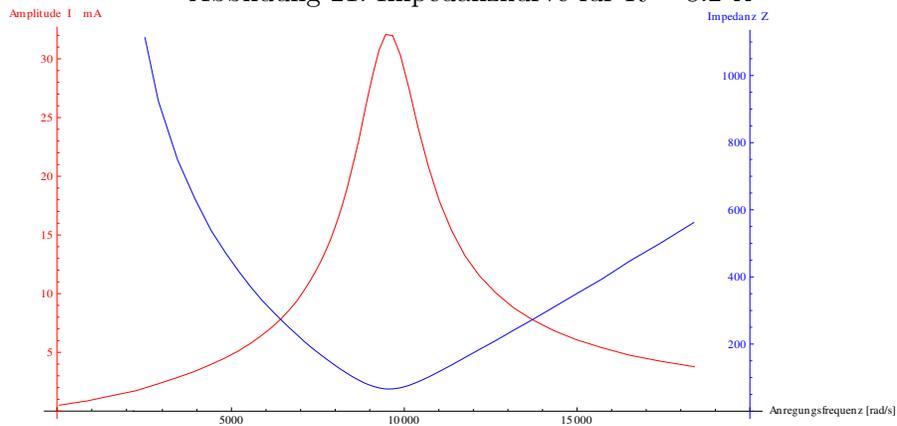


Abbildung 22: Impedanzkurve für $R = 47 \Omega$

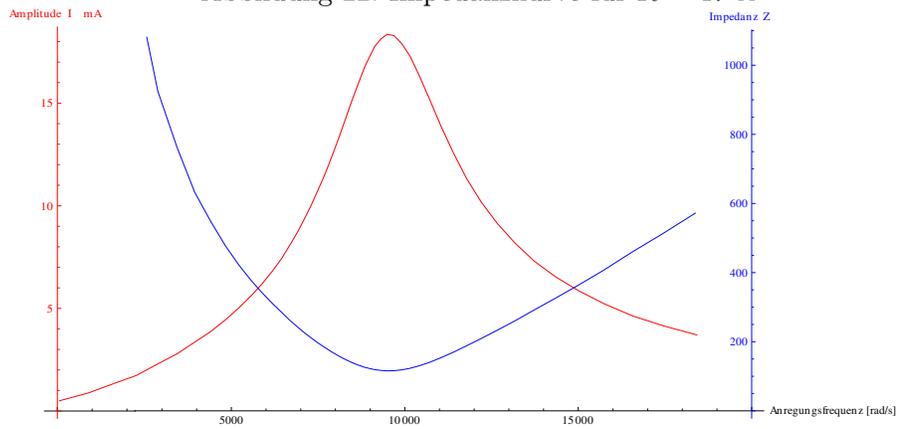


Abbildung 23: Impedanzkurve für $R = 100 \Omega$

Hier sieht man - wie erwartet - dass die Impedanzen bei der Resonanzfrequenz ein Minima besitzen. Die Gesamtimpedanz des Schwingkreises ist hier also gerade minimal, da sich Impedanz

der Spule und des Kondensators gerade aufheben. Es bleibt nur noch die Impedanz des Widerstandes und die möglicher Innenwiderstände. Diese Innenwiderstände führen wahrscheinlich auch zu den teilweise stark voneinander abweichenden Messergebnissen und führen zu unerwarteten Effekten.

3 Quellen

Vorbereitungsmappe

Vorbereitungshilfe