



SS/WS 20.11./12.

Praktikum: (P1/P2) (Mo/Di/Mi/Do) Gruppe-Nr: Di-10

Name: Leonhard Vorname: Tobias

Name: Vetter Vorname: Andreas

Versuch: Resonanz (mit/ohne) Fehlerrechnung

Betreuer: Nina Dallmann Durchgeführt am: 25.10.11

Abgabe am: 8.11.2011

Rückgabe am:

Begründung:

2. Abgabe am:

Ergebnis: (+ / 0 / -)

Fehlerrechnung: ja / nein

Datum: 8.11.2011

Handzeichen: [Signature]

Bemerkungen:

Sehr sehr schönes
Protokoll!
weiter so P ↓
Homepage?



Bei diesem Versuch geht es um freie und erzwungene Schwingungen, um das Resonanzverhalten bezüglich Amplitude und Phase, sowie Charakteristika wie Resonanzschärfe bzw. Güte und Dämpfungen verschiedenen Ursprungs. Dabei werden sowohl mechanische als auch elektrische Schwingungen untersucht. Alle wichtigen Zusammenhänge sind in einer Vorbereitungshilfe zu diesem Versuch erläutert.

Hier arbeiten Sie mit dem Messwerterfassungssystem „CASSY“, das im Praktikum an verschiedenen Versuchen eingesetzt wird. *Details zu der Funktionsweise des Interfaces finden Sie in der Vorbereitungshilfe sowie auf den ersten 30 Seiten des CASSY Handbuchs, die sich in den Literaturlisten sowie auf der Praktikumshomepage befinden.*

Hinweis: Bitte USB-Stick zur Datensicherung mitbringen.

Aufgaben:

1. Drehpendel, freie Schwingungen: Machen Sie sich anhand der Kurzanleitung zu CASSY mit dem Menü der Software, der Verwendung von Funktionstasten und den Einstellmöglichkeiten für Diagramme und Anzeigeelementen vertraut. Stellen Sie den zeitlichen Verlauf des Phasenwinkels, der Winkelgeschwindigkeit und der kinetischen Energie dar. Verwenden Sie dazu eine einfache Abschätzung des Trägheitsmomentes des Drehpendels. Erzeugen Sie auch eine Phasenraumdarstellung des Schwingungsvorgangs. Bestimmen Sie die Periodendauer der Schwingung.

Der Schwingungsvorgang ist auch ohne Wirbelstrombremse nicht ganz dämpfungsfrei. Erklären Sie die Art der Dämpfung und entwickeln Sie ein einfaches Modell für den Amplitudenabfall. Überlagern Sie die Messdaten mit dem Ihrem Modell entsprechenden funktionalen Zusammenhang und passen Sie die Modellparameter möglichst gut per Hand an (*fit by eye*). Dazu eignen sich einfache Tabellenkalkulationsprogramme auf Ihrem PC. Sie bekommen dadurch ein Gefühl für den Einfluss der verschiedenen Parameter auf die Kurvenform.

2. Drehpendel, freie gedämpfte Schwingungen: Nehmen Sie mit CASSY bei verschiedenen Strömen I_B durch die Wirbelstrombremse ($I_B=100, 200, 400, 700\text{mA}$) die entsprechenden Winkel-Zeit-Diagramme auf. Ermitteln Sie wie in Aufgabe 1 die Dämpfungskonstante β durch Anpassung der Schwingungsfunktion an die Messdaten. Bestimmen Sie β auch aus dem Dämpfungsverhältnis k . Verwenden Sie für die $k(I_B)$ -Bestimmung eine optimale Anzahl n von Schwingungen und die zweckmäßigere der beiden Formeln:

$$k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_{i-1}}{\Phi_i} \quad \text{oder} \quad k = \sqrt[n]{\Phi_0 / \Phi_n}$$

Erläutern Sie, warum Sie praktisch keine I_B -Abhängigkeit für T finden.

Stellen Sie die Dämpfungskonstante $\beta_{\text{kor}}(I_B) = \beta(I_B) - \beta(0)$ in Abhängigkeit von I_B geeignet graphisch dar, begründen Sie $\beta_{\text{kor}}(I_B) = \text{const} \cdot I_B^2$ und extrapolieren Sie auf den I_B -Wert für Grenzdämpfung ($\beta = \omega_0$). Ermitteln Sie diesen Wert auch experimentell, und vergleichen Sie beide Ergebnisse. Berechnen Sie die Güte $Q(I_B)$ des Systems aus ω_0 und $\beta(I_B)$. Beachten Sie den Gültigkeitsbereich der Formeln für Q .

3. Messen Sie die Winkelrichtgröße D^* der Schneckenfeder des Drehpendels statisch. Messen Sie dazu die Winkelauslenkung des Drehpendels in beide Richtungen, indem Sie Gewichte $\sim(5\text{g}, 10\text{g}, 20\text{g})$ mittels eines Fadens so an den Zeiger des Pendels hängen, dass der Faden durch die Randnut ($r = r_a$) läuft (*warum?*). Bestimmen Sie das Trägheitsmoment Θ des Drehpendels aus D^* und $T(0)$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus Aufgabe 1.

4. Drehpendel, erzwungene Schwingungen: Nehmen Sie Resonanzkurven $\varphi(\Omega)$ bei verschiedenen Strömen I_B ($400, 200\text{mA}$) mit CASSY auf. Beginnen Sie mit der höheren Dämpfung, damit sich das System schneller einschwingt. Beobachten und diskutieren Sie auch die Phasenverschiebung ψ . (a) möglichst weit unterhalb, (b) möglichst weit oberhalb und (c) bei der Resonanzfrequenz.

Achtung: Die Bewegung des Motors wird über einen Winkelgeber in eine Spannung (0-5V) umgewandelt und über den zweiten CASSY-Eingang mit aufgezeichnet. Damit die Nulllage mit dem Pendel übereinstimmt, muss zu Beginn ein Offset von 2.5V vorgegeben werden.

Die Drehzahl des Antriebmotors wird aus dem *Winkel-Zeit-Diagramm* mit Hilfe von CASSY bestimmt. Achten Sie auf eine ausreichende Dichte der Meßpunkte, besonders in Resonanznähe. Passen Sie die Schrittweite entsprechend an.

Vergleichen Sie den Verlauf der gemessenen Resonanzkurven mit dem theoretischen Verlauf. Benutzen Sie $(1/\sqrt{2})$ -Amplituden-Punkte für die Gütebestimmung $Q(I_B)$ des Resonators und vergleichen Sie diese Ergebnisse mit jenen von Aufgabe 2.

5. Serienschwingkreis, erzwungene Schwingungen: Nehmen Sie Resonanzkurven $I(\omega)$ bei verschiedenen Dämpfungswiderständen R_p auf (Siehe Hinweise in der Vorbereitungshilfe) (Messbereich für U : 0-70V). Stellen Sie die Schwingungsamplitude und die Impedanz des Schwingkreises als Funktion der Frequenz in einer gemeinsamen Darstellung dar. Bestimmen Sie die Gütefaktoren der Schwingkreise aus der Resonanzbreite. Demonstrieren Sie die Resonanzüberhöhung an Spule und Kondensator, indem Sie die Spannungsverläufe an Spule und Kondensator zusammen mit der anliegenden Spannung als Funktion der Frequenz darstellen. Bestimmen Sie auch daraus die Güte des Schwingkreises. Stellen Sie die Phasenverschiebung als Funktion der Frequenz dar.

Zubehör:

Drehpendel (Pohlsches Rad): *Drehkörper aus Kupfer ($\rho = 8,96 \text{ g/cm}^3$), kreisringförmig ($r_i=74,7\text{mm}$, $r_a=94,7\text{mm}$, $d=2\text{mm}$) mit Lochkranz für Lichtschranke (165 Löcher, $\phi=1,5\text{mm}$ auf Radius $r_{\text{Löcher}}=91,9\text{mm}$) mit 5 Speichen; mit Motor, Getriebe und Exzenter zur Anregung; mit Wirbelstrombremse (max. zulässiger Strom: langfristig 1A / kurzzeitig 1,6A); mit regelbarer Stromversorgung für die Motordrehzahl; mit Winkelgeber zur Erfassung der Motorbewegung; mit Lichtschranke zur Erfassung der Pendel-Drehbewegung;*

Netzgerät für die Wirbelstrombremse;

3 Messinggewichte (5g, 10g, 20g) mit Faden für die D^* -Bestimmung;

CASSY SENSOR Messinterface;

POWER CASSY als Spannungsquelle für den Schwingkreis;

PC zur Datenerfassung;

Dämpfungswiderstände R_p , Spule $L = 44 \text{ mH}$ und Kondensator $C = 0,33 \text{ }\mu\text{F}$, Laborkabel.

Literatur:

Walcher: *Praktikum der Physik* (zu Drehpendel und Schwingungsgleichungen)

Fricke, Lamberts, Schuchardt, Hrsg. Moeller: *Leitfaden der Elektrotechnik*, Bd.4, Teil 1 (zu elektrischen Schwingkreisen, insbesondere L||C||R; vorhanden in Uni.-Bibl.)

Feynman: *Lectures on Physics*, Bd.1 (besonders geeignet für das Verständnis des Versuchsinhalts)

Versuchsvorbereitung **Resonanz**

Tobias Leonhard Gruppe Di-10, Matrikelnummer 1604726

25. Oktober 2011

Inhaltsverzeichnis

1	Vorbereitung: Grundlagen des Versuchs	6
2	Versuch 1: Drehpendel, freie Schwingungen	8
3	Versuch 2: Drehpendel, frei gedämpfte Schwingung	8
4	Versuch 3: Statische Messung der Winkelrichtgröße D^* der Schneckenfeder	10
5	Versuch 4: Drehpendel, erzwungene Schwingungen	10
6	Versuch 5: Schwingkreis, erzwungene Schwingungen	11
7	Literatur	13
8	Vorbereitung: Grundlagen des Versuchs	15
9	Aufgabe 1: Drehpendel, freie Schwingungen	17
10	Aufgabe 2: Drehpendel, freie gedämpfte Schwingung	17
11	Aufgabe 3: Statische Messung der Winkelrichtgröße D^*	18
12	Aufgabe 4: Drehpendel, erzwungene Schwingungen	19
13	Aufgabe 5: Serienschwingkreis, erzwungene Schwingungen	19
14	Literatur	21
15	Auswertung Aufgabe 1: Drehpendel, freie Schwingungen	25
16	Auswertung Aufgabe 2: Drehpendel, freie gedämpfte Schwin- gung	28
17	Auswertung Aufgabe 3: Statische Messung der Winkelricht- größe D^*	34
18	Auswertung Aufgabe 4: Drehpendel, erzwungene Schwin- gungen	34
19	Auswertung Aufgabe 5: Serienschwingkreis, erzwungene Schwin- gungen	37
20	Literatur	46

1 Vorbereitung: Grundlagen des Versuchs

Die Versuche beschäftigen sich mit gedämpften, ungedämpften und erzwungenen Schwingungen anhand des Pohlschen Rades. Der Pendelkörper des Schwingers ist eine Schneckenfeder, die für die Rückstellkraft aufkommt. Die Differentialgleichung, die das System beschreibt ist

$$\Theta\ddot{\varphi}(t) + D\dot{\varphi}(t) + \gamma\dot{\varphi}(t) = M(t), \quad (1)$$

wobei ($\Theta\ddot{\varphi}(t)$) das Reaktionsmoment, ($D\dot{\varphi}(t)$) das bremsende Moment der Wirbelstrombremse und ($\gamma\dot{\varphi}(t)$) sonstige Reibung ist.

Formt man diese Gleichung um, erhält man die gängige Schreibweise

$$\ddot{\varphi}(t) + 2\beta\dot{\varphi}(t) + \omega_0^2\varphi(t) = f(t) \quad (2)$$

dabei ist $\omega_0^2 = \frac{D}{\Theta}$ die Eigenfrequenz des ungedämpften Oszillators und $\beta = \frac{\gamma}{2\Theta}$ die Dämpfungskonstante.

Freie ungedämpfte (gedämpfte) Schwingungen

Bei freien ungedämpften Schwingungen ist $M(t) = 0$ bzw. $f(t) = 0$.

Theoretisch können Systeme ohne Dämpfung betrachtet werden, praktisch tritt allerdings wie auch in diesen Versuchen Reibung durch das Material oder durch den Luftwiderstand auf.

Gelöst wird die Differentialgleichung mit dem Ansatz: $\varphi(t) = c \cdot e^{-\lambda t}$

dabei erhalten wir als Lösung: $\lambda_{1,2} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$, wobei man die folgenden drei Fälle unterscheidet:

Schwingfall

Die Schwingung ist mit $\beta < \omega_0$ schwach gedämpft und wird durch

$\varphi(t) = e^{-\beta t} \cdot (c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t})$ bzw. $\varphi(t) = A \cdot e^{-\beta t} \cos(\omega t + \psi)$ beschrieben. (c_1, c_2 , bzw. A werden aus den Anfangsbedingungen bestimmt)

Kriechfall

Durch starke Dämpfung ($\beta > \omega_0$) klingt die Schwingung langsam ab. Die Lösung ist:

$$\varphi(t) = A \cdot e^{-\beta t} (c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}) \text{ bzw. } \varphi(t) = A \cdot \cosh(\omega t) \quad (3)$$

mit $\omega = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$

Aperiodischer Grenzfall

Nach der Auslenkung kehrt der Schwinger am schnellsten in die Ruhelage zurück.

Dabei ist die Dämpfungskonstante gleich der Eigenfrequenz des Oszillators ($\beta = \omega_0$)

Die Lösung lautet: $\varphi(t) = D(1 + Et)e^{-\beta t}$

Erzwungene Schwingungen

Wird das System von einer äußeren Kraft $f(t) = \frac{M}{\Theta} \cos(\Omega t)$ angeregt, dann setzt sich die Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{\varphi}(t) + 2\beta\dot{\varphi}(t) + \omega_0^2\varphi(t) = \frac{M_0}{\Theta} \cos(\Omega t) \quad (4)$$

aus einer homogenen und einer partikulären Lösung zusammen:

$$\varphi_{ges}(t) = A_1 \cdot e^{-\beta t} \cos(\omega t + \psi_1) + A_2 \cdot \cos(\Omega t + \psi_2) \quad (5)$$

Nach dem Einschwingvorgang stellt sich für $\beta < \omega_0$ eine periodische Schwingung ein, die von der anregenden Kraft herrührt:

$$\varphi(t) = A \cdot \cos(\Omega t + \psi) \quad (6)$$

mit der Amplitude

$$A = \frac{\frac{M_0}{\Omega}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\beta\Omega)^2}} \quad (7)$$

und der Phasenverschiebung

$$\psi = \arctan\left(-\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right) \quad (8)$$

2 Versuch 1: Drehpendel, freie Schwingungen

Zur Durchführung des Versuchs wird das Programm Cassy verwendet, das sich zur Auswertung der verschiedenen Messreihen gut eignet.

Aufgabe ist es, den zeitlichen Verlauf des Phasenwinkels, der Winkelgeschwindigkeit und der kinetischen Energie darzustellen.

Dazu sind folgende Formeln nützlich:

Phasenwinkel $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = \frac{l}{\text{Radius}} \quad (9)$$

mit l als Bogenlänge.

Die Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ ist die zeitliche Ableitung des Phasenwinkels und mit dieser lässt sich die kinetische Energie berechnen.

$$E = \frac{1}{2}\Theta\dot{\varphi}^2 \text{ bzw. } E = \frac{1}{2}\Theta\omega^2 \quad (10)$$

Θ ist das Trägheitsmoment, welches sich allgemein aus

$$\Theta = \int r^2 dm = \int \rho(r)r^2 dV = \frac{1}{2}m(r_a^2 + r_i^2) = 1,387 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

zusammensetzt.

($r_a = 94,7 \text{ mm}$, $r_i = 74,7 \text{ mm}$, $d = 2 \text{ mm}$ und $\rho(\text{Cu}) = 8,96 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ sind gegeben)

Mithilfe von Cassy lässt sich der Phasenraum des Systems als Schaubild des Phasenwinkels über der Phasengeschwindigkeit leicht plotten. Betrachtet man den Schwingungsvorgang ohne Wirbelstrombremse, wird dieser durch Reibung dennoch gedämpft. Dieser Amplitudenabfall soll nun anhand von einfachen Modellen dargestellt und mithilfe von Tabellenkalkulationsprogrammen ausgewertet werden.

3 Versuch 2: Drehpendel, frei gedämpfte Schwingung

Unter Verwendung von Cassy sollen bei verschiedenen Strömen I_b ($I_b = 100, 200, 400, 700 \text{ mA}$)

durch die Wirbelstrombremse die Winkel-Zeit-Verhältnisse aufgenommen werden. Die Dämpfungskonstante β lässt sich wie in Aufgabe 1 durch Anpassung der Schwingungsfunktion an die Messdaten ermitteln.

Alternativ lässt sich β auch aus dem Dämpfungsverhältnis k wie folgt berechnen:

$$k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_{i-1}}{\Phi_i} \quad (11)$$

oder

$$k = \sqrt[n]{\frac{\Phi_0}{\Phi_n}} \quad (12)$$

und

$$\beta = \frac{\ln k}{T} \quad (13)$$

Für die $k(I_b)$ -Bestimmung wird der Ausdruck (11) günstiger sein, da hier im Gegensatz zu (12) mehrere Messwerte in das Ergebnis eingehen und deshalb ein geringerer Fehler als in (12) ausgehen wird. Die Periodendauer T ist definiert als:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\omega_0^2 \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\omega_0^2}}} \quad (14)$$

Damit ist im Schwingfall $T \approx \frac{2\pi}{\omega_0}$, da $\frac{\beta^2}{\omega_0^2} \ll 1$

und gezeigt, dass die Periodendauer von β und somit von I_B unabhängig ist. Zur Bestimmung der exakten Dämpfungskonstante $\beta_{korr}(I_B)$, muss man $\beta(I_B)$ um $\beta(0)$ korrigieren, damit die Reibung (aus Versuch 1) nicht berücksichtigt wird. Also:

$$\beta_{korr}(I_B) = \beta(I_B) - \beta(0) \quad (15)$$

Für die Dämpfungskonstante gilt die Proportionalität zur Leistung in der Wirbelstrombremse:

$$\beta_{korr}(I_B) \propto P = U * I_B = R * I^2 \quad (16)$$

$$\beta_{korr}(I_B) = konst. * I_B \quad (17)$$

Aufgabe ist es, den I_B -Grenzwert der Dämpfung $I_{B,Grenz} = \sqrt{\frac{\omega_0}{konst.}}$ experimentell und theoretisch zu ermitteln.

Der Gütefaktor ist definiert als:

$$Q = \frac{2\pi \cdot \text{Schwingungsenergie}}{\text{EnergieverlustproPeriode}} = \frac{\omega_0}{2\beta} \quad (18)$$

4 Versuch 3: Statische Messung der Winkelrichtgröße D^* der Schneckenfeder

Für die Berechnung der Winkelrichtgröße D^* setzt man das rücktreibende Moment ($D^* \varphi$) der Feder mit dem auf die Feder wirkenden Moment ($F \cdot r_a$) gleich und erhält:

$$D^* = \frac{F \cdot r_a}{\varphi} \quad (19)$$

Im Versuch werden dabei 5g, 10g und 15g - Gewichte mit einem Faden an den Zeiger des Pohlschen Rades gehängt, sodass er entlang der Randnut verläuft. Damit erreicht man eine tangential angreifende Kraft und die Gültigkeit von (18).

Für die Bestimmung des Trägheitsmoments Θ aus D^* und $T(0)$ benötigt man zum einen die Beziehung $\omega_0^2 = \frac{D^*}{\Theta}$ zum anderen $\omega_0^2 = \frac{4\pi^2}{T(o)^2}$.

Aufgelöst: $\Theta = \frac{D^* \cdot T(0)^2}{4\pi^2}$.

5 Versuch 4: Drehpendel, erzwungene Schwingungen

Im Versuch werden erzwungene Schwingungen mit Dämpfung untersucht, bei denen $I_b = 400mA$, bzw. $I_B = 200mA$ betragen. Die Bewegung des Motors wird über einen Winkelgeber in eine Spannung umgewandelt und aufgezeichnet; hierbei ist besonders darauf zu achten, dass am Anfang der Messung mit einem Offset von 2,5V die Nulllage mit dem Pendel abgeglichen wird.

Außerdem muss gerade in Resonanznähe auf eine ausreichende Dichte der Meßpunkte geachtet werden.

Die Phasenverschiebung ψ (s. Gleichung (8)) soll nun in drei Spezialfällen untersucht werden:

- möglichst weit unterhalb der Resonanzfrequenz ($\Omega \ll \omega_0$)
Die Bewegung ist in Phase und $\psi = 0$
- möglichst weit oberhalb der Resonanzfrequenz ($\Omega \gg \omega_0$)
Die Bewegung ist entgegengesetzt zu $M(t)$, d.h. $\psi = -\pi$
- bei der Resonanzfrequenz ($\Omega \approx \omega_0$)
Hier ist die Phasenverschiebung $\psi = -\frac{\pi}{2}$

Bei $\Omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ stellt sich die maximale Amplitude ein - die Resonanz verschiebt sich zu kleiner Frequenzwerten hin.
 Mit der Amplitude $A = \frac{A_{res}}{\sqrt{2}}$ und der Bandbreite $\Delta\omega \approx 2\beta = \frac{\omega_0}{Q}$ bestimmt man den Gütefaktor Q aus der Bandbreite.

6 Versuch 5: Schwingkreis, erzwungene Schwingungen

Ein Serienschwingkreis besteht aus einer Spule mit Induktivität L, einem Kondensator mit Kapazität C und einem ohmschen Widerstand R.

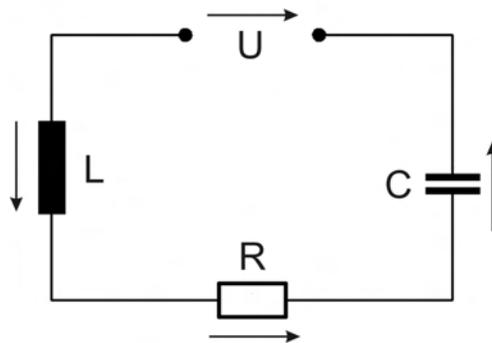


Abbildung 1: Schwingkreis

Mithilfe der Kirchhoffschen Maschenregel kann man folgende Differentialgleichung aufstellen:

$$U(t) = U_L(t) + U_R(t) + U_C(t) = L\dot{I}(t) + R \cdot I(t) + \frac{\int I(t)dt}{C} \quad (20)$$

Differentiation und Division durch L ergibt:

$$\ddot{I}(t) + \frac{R}{L}\dot{I}(t) + \frac{1}{LC}I(t) = \frac{1}{L}\dot{U}(t) \quad (21)$$

Diese Gleichung der elektromagnetischen Schwingung löst man wie die des mechanischen Analogon, dabei ist $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ und $\beta = \frac{R}{2L}$.

Mit den gegebenen Werten ist

die Resonanzfrequenz $\omega_0 \approx 8.300 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ und $f_{res} \approx 1.321 \text{ Hz}$.

Nach dem Einschwingvorgang ist

$$I(t) = I_0 e^{(i\omega t + \Psi)} \quad (22)$$

Lösung der Gleichung.

Die Phasenverschiebung ist

$$\psi = \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right) \quad (23)$$

und die Amplitude

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{U_0}{Z} \quad (24)$$

mit der Impedanz $Z(\omega) = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$.

Nun soll der Gütefaktor $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ aus der Resonanzbreite ermittelt werden, die wiederum als Frequenzdifferenz an den Stellen der Amplitude $\frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$ bestimmt werden kann.

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{R}{\omega_0 L} = R \cdot \omega_0 C = R \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{Q} \quad (25)$$

Spannungsüberhöhung im Resonanzfall liegt dann vor, wenn der Gütefaktor größer als eins wird und die Spannungen an Spule (U_L) und Kondensator (U_C) deshalb deutlich über den Wert der angelegten Spannung U_0) hinausgehen. Aus den Spannungsverläufen an Spule und Kondensator kann ergänzend noch einmal der Gütefaktor bestimmt werden.

7 Literatur

- **Vorlesungen über Physik**, Band 1, von Richard P. Feynman, Robert B. Leighton und Matthew Sands, 4. Auflage
- **Praktikum der Physik**, von Wilhelm Walcher, 8. Auflage
- **Das Neue Physikalische Grundpraktikum**, von H. J. Eichler, H.-D. Kronfeldt und J. Sahm, 2. Auflage
- **Musterprotokoll**, von Alexander Schiele und Johannes Weis
- **Vorbereitungshilfe Resonanz**, Fakultät Physik, KIT Karlsruhe
- **Bildquelle: Abbildung 1** loetstelle.net/content/grundlagen/schwingkreis/images/Bild4.jpg

Versuchsvorbereitung **Resonanz**

Andreas Vetter Gruppe Di-10, Matrikelnummer 1602491

25. Oktober 2011

8 Vorbereitung: Grundlagen des Versuchs

Die Versuche 1 bis 4 werden mit einem sogenannten *Pohlschen Rad* durchgeführt. Es handelt sich um ein Drehpendel, das waagrecht aufgehängt ist und von einer Schneckenfeder in der Ruhelage gehalten wird. Bei Auslenkungen führt es gedämpfte harmonische Schwingungen um die Ruhelage aus. Mit einer Wirbelstrombremse kann die Schwingung gedämpft oder durch periodische Erregung mit einem Motor beschleunigt werden. Um eine Bewegungsgleichung für Drehschwingungen aufzustellen, betrachtet man die Drehmomente, die sich aus dem rücktreibenden Moment der Schneckenfeder des Pölschen Rades ($-D^*\varphi$), dem Reaktionsmoment ($\Theta\ddot{\varphi}$), der regelbaren Dämpfung der Wirbelstrombremse sowie anderer Dämpfungseffekte ($-\gamma\dot{\varphi}$) und dem äußeren Erregungsmoment (M) zusammensetzt:

$$\Theta\ddot{\varphi}(t) + D^*\varphi(t) + \gamma\dot{\varphi}(t) = M(t) \quad (26)$$

$$\ddot{\varphi}(t) + 2\beta\dot{\varphi}(t) + \omega_0^2\varphi(t) = f(t) \quad (27)$$

mit der Eigenfrequenz $\omega_0^2 = \frac{D^*}{\Theta}$ und der Dämpfungskonstanten $\beta = \frac{\gamma}{2\Theta}$.

Freie ungedämpfte und gedämpfte Schwingung

Dabei ist nun $M(t) = 0$ bzw. $f(t) = 0$ (Aufgabe 1 und 2).

Ungedämpfte Schwingungen ($\beta = 0$) sind in der Theorie möglich, sie treten allerdings in der Praxis nicht auf, da Reibung immer vorhanden ist. Die Lösung der Differentialgleichung (27) erhält man durch den Ansatz $\varphi(t) = Ae^{-\lambda t}$. Einsetzen und umformen ergibt

$$\lambda_{1,2} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \quad (28)$$

und

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (29)$$

Die allgemeine Lösung lautet nun

$$\varphi(t) = A_1e^{-\beta t + \lambda_1 t} + A_2e^{-\beta t + \lambda_2 t} \quad (30)$$

Dabei unterscheidet man nun drei Fälle:

Schwingfall: $\beta^2 < \omega_0^2$

Da die Wurzel in Gleichung (28) negativ wird, ergeben sich für $\lambda_{1,2}$ komplexe Lösungen und die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet

$$\varphi(t) = e^{-\beta t}(B_1e^{i\omega t} + B_2e^{-i\omega t}) \quad (31)$$

bzw.

$$\varphi(t) = e^{-\beta t} C \cos(\omega t + \alpha) \quad (32)$$

mit B_1 , B_2 und C aus den Anfangsbedingungen.

Kriechfall: $\beta^2 > \omega_0^2$

Die Wurzel in Gleichung (28) ist reell, somit sind auch die λ reelle Zahlen. Die Dämpfung ist so stark, dass keine Schwingung des Pohlischen Rades mehr erfolgt. Bei anfänglicher Auslenkung kriecht es in die Ruhelage zurück. Die Lösung für die Differentialgleichung lautet:

$$\varphi(t) = e^{-\beta t}(C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}) \quad (33)$$

aperiodischer Grenzfall: $\beta^2 = \omega_0^2$

Man erhält den schnellsten Kriechfall, d.h. das System klingt ab, ohne zu schwingen. Dafür lautet die Lösung der Differentialgleichung:

$$\varphi(t) = D(1 + Et)e^{-\beta t} \quad (34)$$

Erzwungene Schwingungen

Um die Lösung der Differentialgleichung für $f(t) \neq 0$ zu erhalten, wird zu der homogenen Lösung (32) noch eine spezielle inhomogene (partikuläre) Lösung φ_{part} addiert. Für eine periodische äußere Kraft $f(t) = \frac{M_0}{\Theta} \cos(\Omega t)$ ergibt sich die Lösung zu

$$\varphi_{ges}(t) = A_1 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha) + A_2 \cos(\Omega t + \Psi_1) \quad (35)$$

Man erkennt, dass der erste Term nach endlicher Zeit (Einschwingzeit) abklingt und sich eine stationäre, periodische Schwingung mit der Periode Ω der anregenden Kraft einstellt:

$$\varphi(t) = A \cos(\Omega t + \Psi) \quad (36)$$

Dabei gilt für die Amplitude A

$$A = \frac{\frac{M_0}{\Theta}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\beta\Omega)^2}} \quad (37)$$

und für die Phasenverschiebung Ψ

$$\Psi = \arctan\left(-\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right). \quad (38)$$

9 Aufgabe 1: Drehpendel, freie Schwingungen

Zum Kennenlernen des CASSY-Messsystems und zum Vertrautmachen mit der Versuchsanordnung wird der zeitliche Verlauf des Phasenwinkels, der Winkelgeschwindigkeit und der kinetischen Energie dargestellt, ohne Dämpfung durch die Wirbelstrombremse. Reibung ist jedoch als Luft- und Materialreibung immer vorhanden, d.h. $\beta \neq 0$. Für die kinetische Energie gilt:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \Theta \dot{\varphi}^2 \quad (39)$$

Dabei ist Θ das Massenträgheitsmoment, welches folgendermaßen definiert ist:

$$\Theta = \int r^2 dm = \frac{1}{2} m (r_a^2 + r_i^2) \quad (40)$$

Mit $r_a = 94,7 \text{ mm}$, $r_i = 74,7 \text{ mm}$, $d = 2 \text{ mm}$ und $\rho(\text{Cu}) = 8,96 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ folgt

$$\Theta = 1,387 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (41)$$

Bei der Phasenraumdarstellung wird die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ über dem Phasenwinkel φ aufgetragen. Für die Periodendauer gilt:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{D^*}} \quad (42)$$

Die Dämpfungskonstante β wird durch Anlegen der einhüllenden Kurve $e^{-\beta t}$ bestimmt. Zur Anpassung der Kurve wird das Programm *gnuplot* verwendet.

10 Aufgabe 2: Drehpendel, freie gedämpfte Schwingung

Nun wird die Schwingung durch Anlegen von Strömen $I_B = 100, 200, 400$ und 700 mA an die Wirbelstrombremse gedämpft. Wie auch in Aufgabe 1 wird die Dämpfungskonstante durch Anpassung der Schwingungsfunktion bestimmt. Die Dämpfungskonstante β kann auch aus dem Dämpfungsverhältnis k ermittelt werden. Dabei gilt: $\beta = \frac{\ln k}{T}$
Die Dämpfungskonstante k kann auf zwei verschiedene Arten berechnet werden:

$$k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_{i-1}}{\varphi_i} \quad \text{oder} \quad k = \sqrt[n]{\frac{\varphi_0}{\varphi_n}}$$

Dabei ist der erste Term genauer, der zweite ist allerdings zweckmäßiger, da er nicht so eine Menge an Messwerten berücksichtigt.

Für die Periode T gilt mit Gleichung (29):

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\omega_0^2}}} \quad (43)$$

und für $\frac{\beta^2}{\omega_0^2} \ll 1$, was im betrachteten Schwingfall gegeben ist, gilt:

$$T \approx \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (44)$$

Somit ist die Periodendauer T im Schwingfall von β und damit von I_B unabhängig.

Bei Bestimmung der Dämpfungskonstanten $\beta_{korr}(I_B)$ muss beachtet werden, dass neben der Dämpfung $\beta(I_B)$ der Wirbelstrombremse auch die Reibung $\beta(0)$, die in Aufgabe 1 bestimmt wurde, beiträgt:

$$\beta_{korr}(I_B) = \beta(I_B) - \beta(0) \quad (45)$$

Da die Dämpfung der Wirbelstrombremse proportional zur Leistung ist, gilt:

$$\beta_{korr}(I_B) \propto P_{Bremse} = U \cdot I_B = R \cdot I_B^2 \quad (46)$$

$$\beta_{korr}(I_B) = const. \cdot I_B^2 \quad (47)$$

Beim aperiodischen Grenzfall gilt $\beta = \omega_0$ und mit Gleichung (22)

$$I_B^2 = \sqrt{\frac{\omega_0}{const.}} \quad (48)$$

Bei der experimentellen Bestätigung muss die Stromstärke $I_{B,ap}$ gefunden werden, bei der die Schwingung nach Auslenkung am schnellsten zur Ruhelage zurückkehrt, ohne Schwingungen auszuführen. Der Gütefaktor ist das Verhältnis $Q = \frac{2\pi \cdot \text{Schwingungsenergie}}{\text{Energieverlust pro Periode}} = \frac{\omega_0}{2\beta}$.

11 Aufgabe 3: Statische Messung der Winkelrichtgröße D^*

Um D^* zu bestimmen, wird das Pohlsche Rad mit einem bekannten Drehmoment ausgelenkt. Um dies zu erreichen, wird ein Faden mit den Gewichten 5, 10 und 15 g so an den Zeiger gehängt, dass er entlang der Randnut verläuft. Somit wirkt die Gewichtskraft nur tangential zum Rad, das Drehmoment M beträgt $M = F_G \cdot r_a$. Das Rad pendelt sich bei einer zu bestimmenden Auslenkung φ_1 ein. In diesem statischen Fall sind die Drehmomente gleich groß, $F_G \cdot r_a = D^* \cdot \varphi_1$, und das Trägheitsmoment ergibt sich zu

$$D^* = \frac{F_G \cdot r_a}{\varphi_1} \quad (49)$$

Nach Gleichung (42) gilt für das Trägheitsmoment:

$$\Theta = \frac{D^* \cdot T(0)^2}{4\pi^2} \quad (50)$$

Dieser Wert wird nun mit dem Ergebnis $\Theta = 1,387 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ aus Aufgabe 1 verglichen.

12 Aufgabe 4: Drehpendel, erzwungene Schwingungen

Nun wird die Schwingung des Drehpendels von außen angeregt. Dabei wird die Bewegung des Motors über einen Winkelgeber in eine Spannung umgewandelt und ebenfalls aufgezeichnet. Damit die Nulllage auch mit dem Pendel übereinstimmt, wird ein Offset von $2,5 \text{ Volt}$ eingestellt. Wichtig ist beim Messen, dass man auf eine ausreichende Dichte der Messpunkte - besonders in Nähe der Resonanzfrequenz - achtet.

Es lässt sich beobachten, dass die Phase des Drehpendels gegenüber der anregenden Phase je nach Eigen- und Erregerfrequenz um Ψ phasenverschoben ist. Dies beschreibt die Gleichung (38). Diese Phasenverschiebung wird für drei Fälle untersucht.

- möglichst weit unterhalb der Resonanzfrequenz ($\Omega \ll \omega_0$)
Nach Gleichung (38) beträgt $\Psi \approx 0$.
- möglichst weit oberhalb der Resonanzfrequenz ($\Omega \gg \omega_0$)
Dabei geht die Phasenverschiebung gegen $-\pi$.
- bei der Resonanzfrequenz ($\Omega \approx \omega_0$)
Die Phasenverschiebung ist $-\frac{\pi}{2}$.

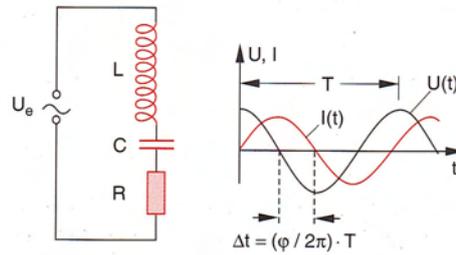
Die Resonanzfrequenz liegt bei $\Omega_{Res} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, d.h. die Resonanz verschiebt sich zu kleineren Frequenzwerten hin.

Nun soll noch der Gütefaktor indirekt über die Breite der Resonanzkurve bestimmt werden. Bei der Amplitude $A_B = \frac{A_{res}}{\sqrt{2}}$ beträgt die Bandbreite $\Delta\omega \approx 2\beta = \frac{\omega_0}{Q}$.

13 Aufgabe 5: Serienschwingkreis, erzwungene Schwingungen

Nun geht es um elektromagnetische Schwingungen. Dabei wird ein sog. Serienschwingkreis verwendet, der die Bauteile Spule (L), Widerstand (R), Kondensator (C) und eine Stromquelle (U) enthält.¹ Im vorliegenden Versuch

¹Bildquelle: Demtröder **Experimentalphysik 2**, 3. Auflage, S. 150



wird das POWER-CASSY Interface als Spannungsquelle verwendet. Der Funktionsgenerator kann Wechselspannungen bei verschiedenen Frequenzen ausgeben. Es folgt mit der Kirchhoffschen Maschenregel:

$$U(t) = U_L(t) + U_R(t) + U_C(t) = L\dot{I}(t) + R \cdot I(t) + \frac{\int I(t)dt}{C} \quad (51)$$

Diese Differentialgleichung wird nach der Zeit differenziert und durch die Induktivität L dividiert; sie lautet nun

$$\ddot{I}(t) + \frac{R}{L}\dot{I}(t) + \frac{1}{LC}I(t) = \frac{1}{L} \cdot \dot{U}(t) \quad (52)$$

Man sieht direkt die Analogie zur Gleichung (27). Auch die Lösung gelingt auf dieselbe Weise. Die Resonanzfrequenz beträgt $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, die Dämpfung $\beta = \frac{R}{2L}$. Mit den vorgegebenen Werten liegt die Resonanzfrequenz somit bei $\omega_0 \approx 8.300 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ bzw. $f_{Res} \approx 1.321 \text{ Hz}$.

Auch hier beschreibt nach der Einschwingzeit die inhomogene Gleichung $I(t) = I_0 e^{i\omega t + \Psi}$ die Bewegung vollständig. Die Phasenverschiebung beträgt

$$\tan(\psi) = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (53)$$

und die Amplitude

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{U_0}{Z}. \quad (54)$$

Dabei ist Z die Impedanz. Um den Gütefaktor zu bestimmen, geht man genauso wie im mechanischen Fall vor. Die Dämpfung beeinflusst die Breite der Resonanz, welche als Frequenzdifferenz bestimmt wird. Dazu wählt man die Frequenz so, dass die Amplitude $I_1 = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$. Also gilt:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{R}{\omega_0 L} = R \cdot \omega_0 C = R \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{Q} \quad (55)$$

Der Gütefaktor Q ist nun

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (56)$$

Da der Gütefaktor beim Serienschwingkreis wesentlich größer als eins werden kann, kann auch die Spannung an der Spule und am Kondensator, U_L und U_C , die anregende Spannung U_0 deutlich übertreffen. Dies wird als Spannungsüberhöhung im Resonanzfall bezeichnet.

14 Literatur

- **Vorlesungen über Physik**, Band 1, von Richard P. Feynman, Robert B. Leighton und Matthew Sands, 4. Auflage
- **Praktikum der Physik**, von Wilhelm Walcher, 8. Auflage
- **Musterprotokoll**, von Alexander Schiele und Johannes Weis
- **Das Neue Physikalische Grundpraktikum**, von H. J. Eichler, H.-D. Kronfeldt und J. Sahn, 2. Auflage
- **Vorbereitungshilfe Resonanz**, Fakultät für Physik, Universität Karlsruhe

200 mA

<u>A_{rad}</u>	<u>T</u>	<u>f</u>
0,26315	2,4	
0,1526	1,55	
0,47365	1,75	
2,58945	1,9	
1,47895	1,95	
0,69475	2,04	
0,34735	2,2	
0,1842	1,55	
0,10525	1,35	
0,06315	1,2	
2,65265	1,9	
Klickklack 2,7	1,85	
Klickklack 2,7	1,75	
0,3158	1,7	
0,7	1,8	

Handwritten signature

A_{rad}	T	f
0,11575	1,5	
[0,52105	2,1]
0,3579	2,05	
0,48425	2,1	
0,2421	2,35	
0,14735	3,05	
0,2579	1,7	
0,10525	1,4	
0,1263	1,3	
0,06315	1,05	
0,6263	1,85	
0,8158	1,9	
0,7421	2,95	
0,3579	1,75	
0,4579	1,8	

Wert korrigiert, da vergessen wurde durch 2 zu teilen

Dal

Versuchsauswertung **Resonanz**
Tobias Leonhard, Andreas Vetter Gruppe Di-10
25. Oktober 2011

15 Auswertung Aufgabe 1: Drehpendel, freie Schwingungen

Zum Kennenlernen der Versuchsanordnung und zum Einrichten des Messprogramms CASSY wird der zeitliche Verlauf der Amplitude, der Winkelgeschwindigkeit und der kinetischen Energie sowie ein Phasenraumdiagramm dargestellt. Dafür wird das Plotprogramm *Origin* verwendet. CASSY misst die Strecke, die sich das Drehpendel bewegt. Nach der Formel $\varphi = \frac{sA1}{0,095}$ (Messgröße/ Radius des Pohlschen Rades in Metern) wird der Phasenwinkel direkt ausgerechnet.

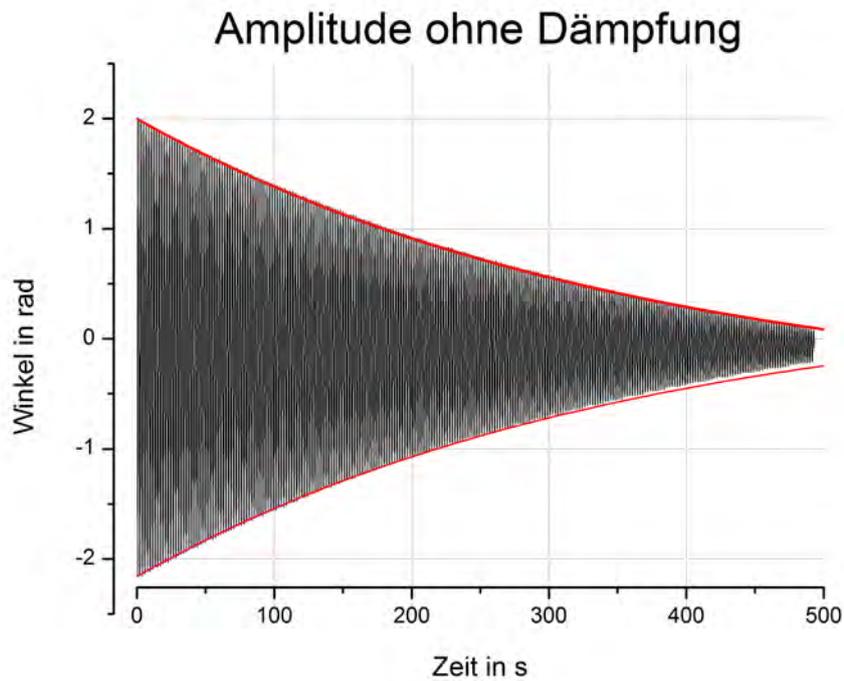


Abbildung 2: Phasenwinkel

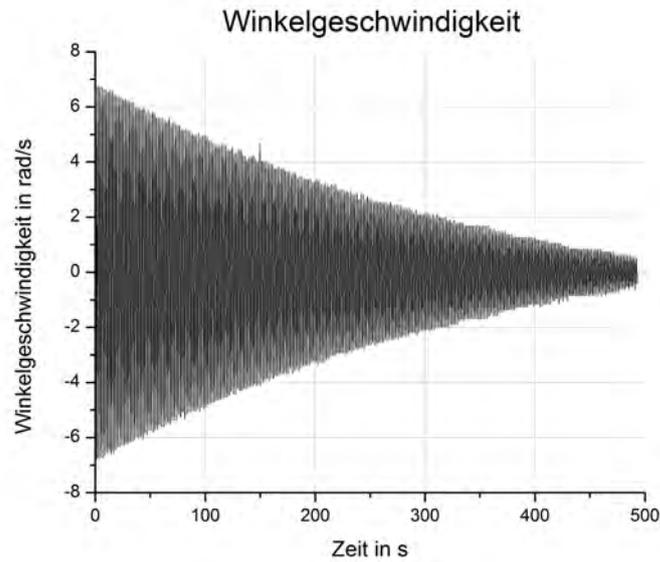


Abbildung 3: Die Ableitung des Phasenwinkels nach der Zeit ist die Winkelgeschwindigkeit und kann durch CASSY direkt berechnet werden.

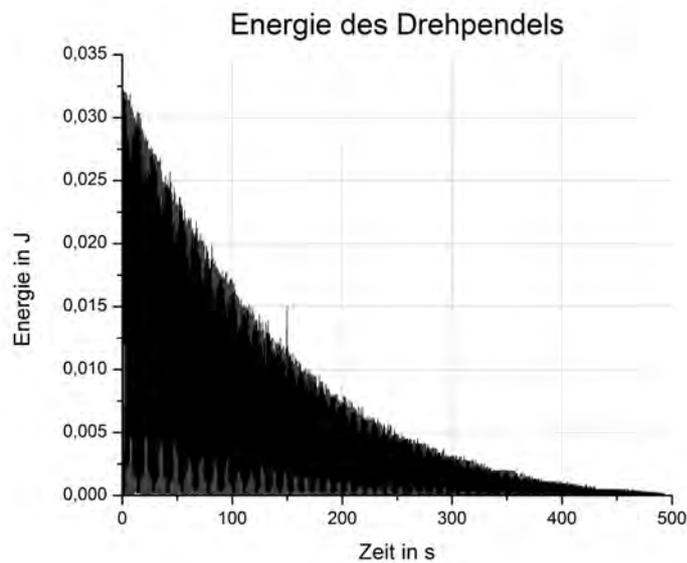


Abbildung 4: Auch die Energie kann nach der Formel $E_{kin} = \frac{1}{2}\Theta\dot{\varphi}^2$ (s. Vorbereitung) direkt aus der Winkelgeschwindigkeit berechnet werden.

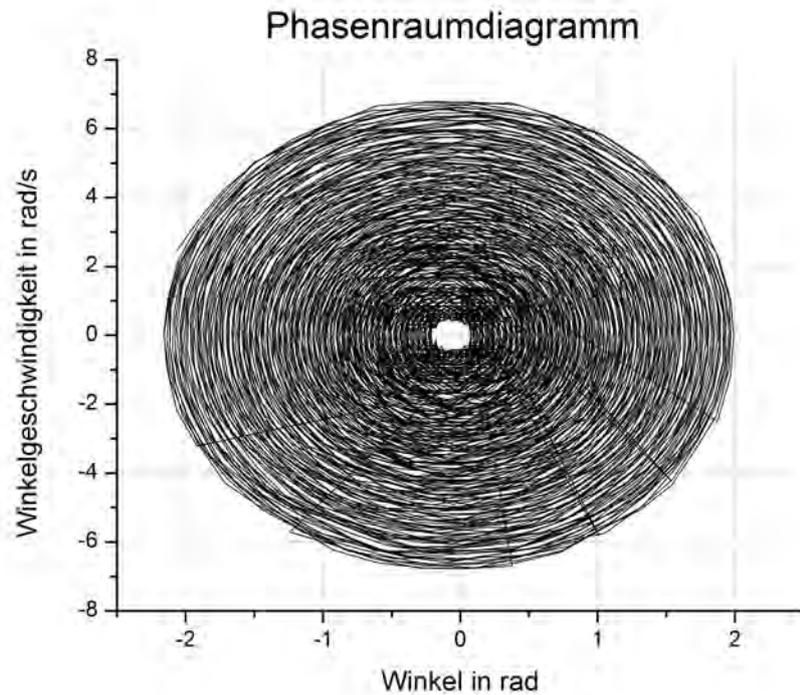


Abbildung 5: Wenn man die Winkelgeschwindigkeit über den Winkel aufträgt, erhält man ein sog. Phasenraumdiagramm.

Natürlich handelt es sich hierbei auch um eine gedämpfte Schwingung, obwohl die Wirbelstrombremse nicht aktiv ist. Der Grund dafür ist Luft- und Materialreibung. Die Einhüllende solcher Schwingungskurven hat die Form

$$g(t) = C \cdot e^{-\beta \cdot t} + D. \quad (57)$$

Durch etwas Ausprobieren erhält man für die Einhüllende in Abbildung 1 die Gleichung

$$g(t) = 2,55 \cdot e^{-\frac{1}{360} \cdot t} - 0,55. \quad (58)$$

Daraus folgt also $\beta_0 \approx \frac{1}{360 \text{ s}} \approx 0,00278 \frac{1}{\text{s}}$.

Zur Berechnung der Periode wurden 15 Vollschringungen abgezählt und die Zeitdifferenz Δt abgelesen. Die Periodendauer beträgt nun

$$T = \frac{\Delta t}{15} = 1,91 \text{ s}. \quad (59)$$

und

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 3,29 \frac{\text{rad}}{\text{s}}. \quad (60)$$

16 Auswertung Aufgabe 2: Drehpendel, freie gedämpfte Schwingung

Schaltet man die Wirbelstrombremse mit den verschiedenen Strömen I_B zu, erhält man die im Folgenden dargestellten Schaubilder.

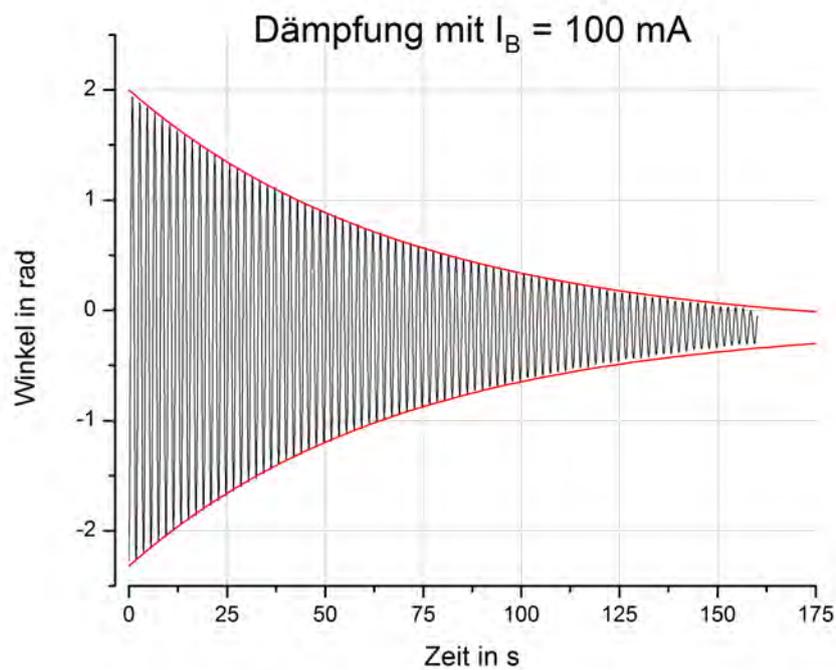


Abbildung 6: Wirbelstrombremse mit $I_B = 100 \text{ mA}$

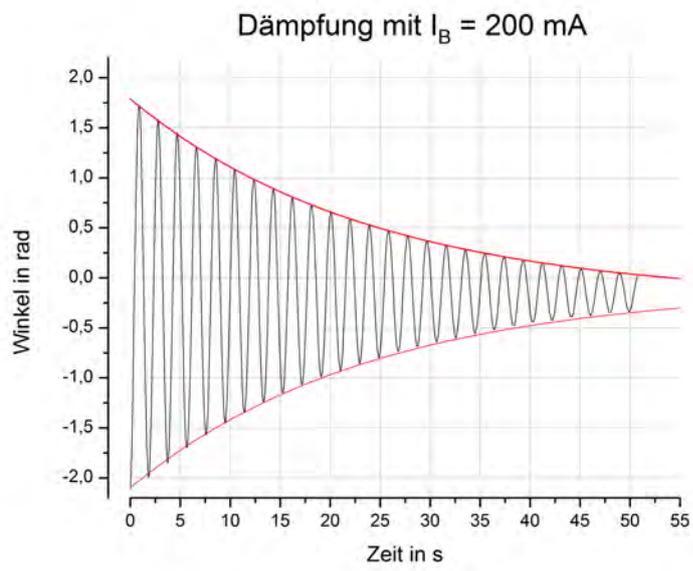


Abbildung 7: Wirbelstrombremse mit $I_B = 200 \text{ mA}$

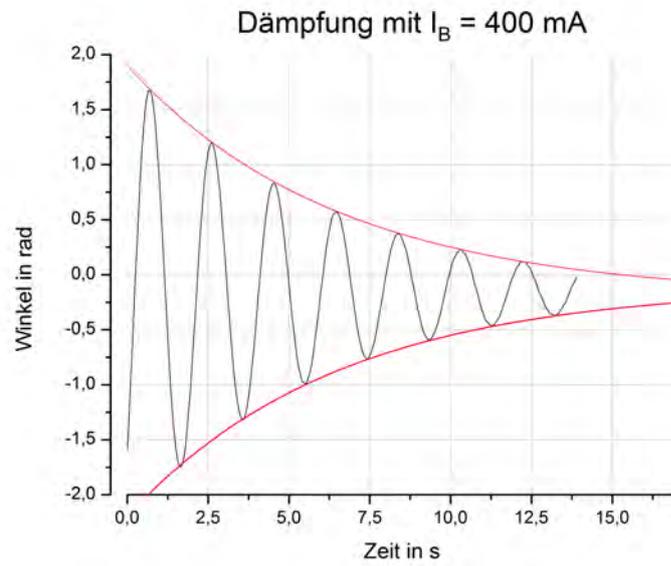


Abbildung 8: Wirbelstrombremse mit $I_B = 400 \text{ mA}$

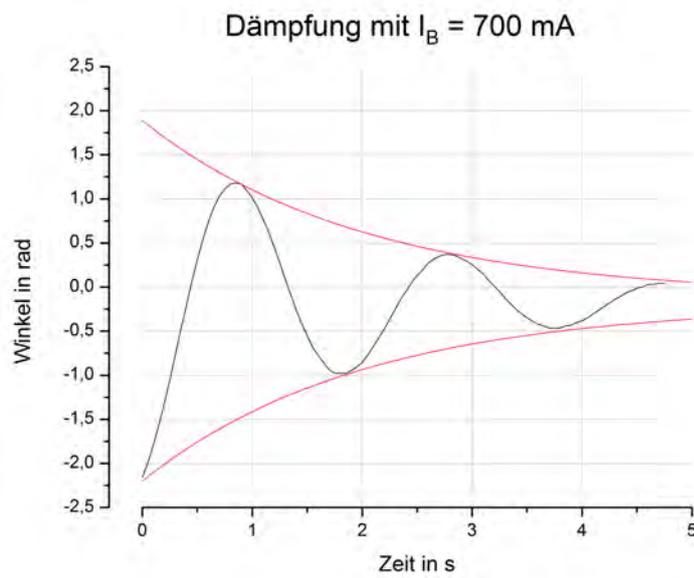


Abbildung 9: Wirbelstrombremse mit $I_B = 700 \text{ mA}$

Die Einhüllende an die Schaubilder kann zum einen durch das *fitbyeye*-Verfahren bestimmt werden:

Bremsstrom	Einhüllende Kurve	Dämpfung β in $\frac{1}{s}$
100 mA	$g_1(t) = 2,2 \cdot e^{-(\frac{1}{71})t} - 0,2$	$\beta_1 = 0,0141$
200 mA	$g_2(t) = 2 \cdot e^{-(\frac{1}{24})t} - 0,21$	$\beta_2 = 0,0416$
400 mA	$g_3(t) = 2,1 \cdot e^{-(\frac{1}{6,5})t} - 0,22$	$\beta_3 = 0,1538$
700 mA	$g_4(t) = 2 \cdot e^{-(\frac{1}{2})t} - 0,11$	$\beta_4 = 0,5$

Zum anderen benutzen wir die Formeln

$$k = \sqrt[n]{\frac{\Phi_0}{\Phi_n}} \quad (61)$$

und

$$\beta = \frac{\ln k}{T}. \quad (62)$$

Gleichung (61) erweist sich als geeignet, weil ein für uns brauchbares Ergebnis erzielt werden kann und sich der Messaufwand in Grenzen hält. Berechnen wir also im Folgenden mit Werten der Dämpfungskurve das Dämpfungsverhältnis k_i und daraus dann die Dämpfung β_i . n ist die Anzahl der Schwingungen zwischen Φ_0 und Φ_n und T die Periodendauer. Zusätzlich wird die korrigierte Dämpfungskonstante β_{korr} berechnet. Dafür gilt nach der Vorbereitung: $\beta_{korr}(I_B) = \beta(I_B) - \beta_0$ mit $\beta_0 \approx 0,00278 \frac{1}{s}$ aus Aufgabe 1.

Der Gütefaktor schließlich ist das Verhältnis $Q = \frac{2\pi \cdot \text{Schwingungsenergie}}{\text{Energieverlust pro Periode}} = \frac{\omega_0}{2\beta}$. Diese Formel gilt nur für $\beta \ll T^{-1}$.

I_B	φ_0 in rad	φ_n in rad	Δt in s	n	T in s	k	β in s^{-1}	β_{korr} in s^{-1}	Q
100 mA	1,935	0,559	74,65	40	1,87	1,0315	0,0166	0,0139	101,26
200 mA	1,697	0,053	48,1	25	1,92	1,149	0,0722	0,0695	22,66
400 mA	1,684	0,119	11,55	6	1,92	1,555	0,230	0,227	7,11
700 mA	1,176	0,041	3,90	2	1,95	5,356	0,861	0,858	1,87

Dabei ist sehr schön zu sehen, dass die Güte mit zunehmender Dämpfung abnimmt. Es fällt auf, dass die Abweichung zu den oben ermittelten Werten sehr groß, zwischen 17 und 42 %, ist. Dies mag daran liegen, dass die Anpassung mit einer einhüllenden Kurve besonders im stark gedämpften Fall sehr ungenau und fehlerbehaftet ist, da nur wenige Schwingungen zur Verfügung stehen, um die Kurve anzugleichen.

Zudem ist darauf hinzuweisen, dass die verwendete Formel für den Gütefaktor nur für den Fall $\beta \ll T^{-1}$ gilt. Dies ist bei $I_B = 700$ mA nicht mehr der Fall, da dort $T^{-1} = 0,52 s^{-1} < \beta = 0,861 s^{-1}$. Auch für $I_B = 400$ mA ist die Verwendung dieser Formel schon fragwürdig.

Auffällig ist, dass die Periodendauer nicht von der Dämpfung abzuhängen

scheint. Wie in der Vorbereitung hergeleitet gilt im Schwingfall $T \approx \frac{2\pi}{\omega_0}$, was unabhängig von β ist.

Wie in der Vorbereitung gezeigt, ist die Dämpfung proportional zur Leistung der Wirbelstrombremse. Es gilt:

$$\beta_{\text{kor}}(I_B) = \text{const.} \cdot I_B^2 \quad (63)$$

Nun wird die Dämpfung über den Bremsstrom aufgetragen und durch Anpassung die Konstante ermittelt.

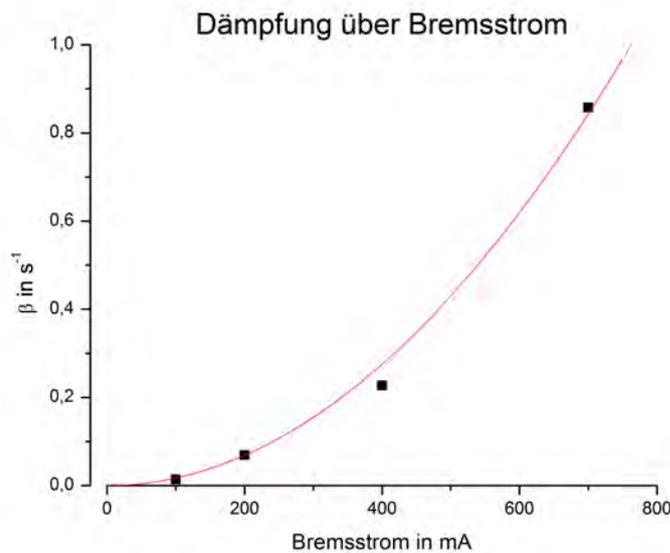


Abbildung 10: Ausgleichskurve für die Konstante

Für die Ausgleichskurve gilt: $\beta = 1,72 \cdot 10^{-7} \cdot I_B^2$
 Es gilt für den Wert I_{ap} (siehe Vorbereitung):

$$I_{ap} = \sqrt{\frac{\omega_0}{\text{const.}}} \approx 1383 \text{ mA} \quad (64)$$

Die experimentelle Ermittlung des aperiodischen Grenzfalls konnte leider nicht durchgeführt werden, da man die Wirbelstrombremse nur kurz über 700 mA belasten sollte, damit sie nicht überhitzt. Allerdings wurde eine Messung bei $I_B = 1620$ mA durchgeführt.

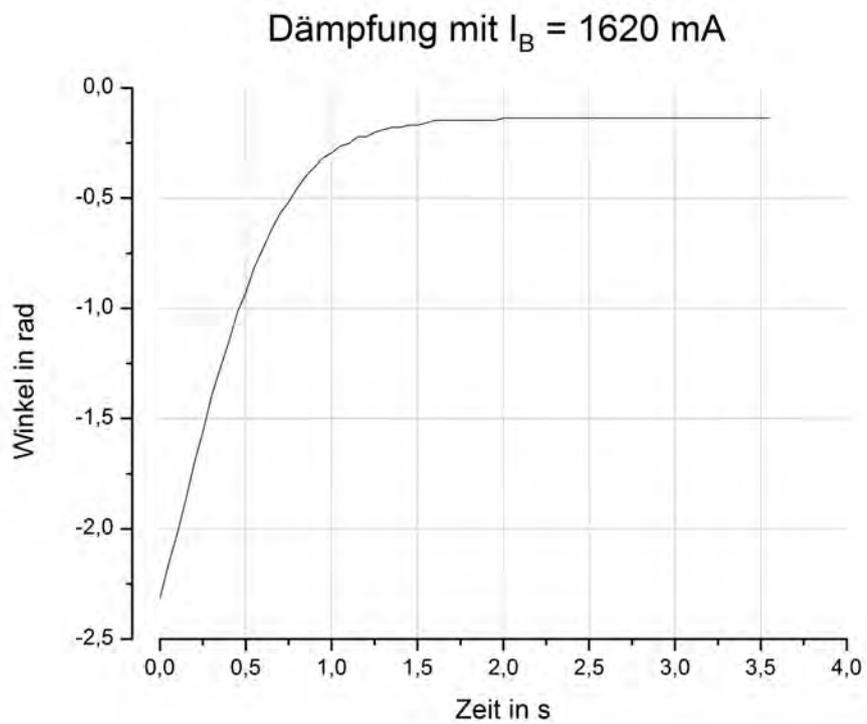


Abbildung 11: Auslenkung beim Kriechfall; dabei ist zu erkennen, dass der Kriechfall deutlich erreicht wurde, d.h. der Bremsstrom bei aperiodischen Grenzfall muss kleiner sein; dies bestätigt die Rechnung oben

17 Auswertung Aufgabe 3: Statische Messung der Winkelrichtgröße D^*

Um D^* zu bestimmen, wird das Pohlsche Rad mit einem bekannten Drehmoment ausgelenkt. Um dies zu erreichen, wird ein Faden mit den Gewichten 5, 10 und 15 g so an den Zeiger gehängt, dass er entlang der Randnut verläuft. Somit wirkt die Gewichtskraft nur tangential zum Rad, das Drehmoment M beträgt $M = F_G \cdot r_a$. Das Rad pendelt sich bei einer zu bestimmenden Auslenkung φ_n ein. In diesem statischen Fall sind die Drehmomente gleich groß, $F_G \cdot r_a = D^* \cdot \varphi_n$, und das Trägheitsmoment ergibt sich zu

$$D^* = \frac{F_G \cdot r_a}{\varphi_n} = \frac{m_n \cdot g \cdot r_a}{\varphi_n}. \quad (65)$$

Folgende Auslenkungen und Winkelrichtgrößen wurden ermittelt:

Gewicht	Auslenkung φ_n in rad	Winkelrichtgröße D^* in $\frac{Nm}{rad}$
5g	0,3263	0,01424
10g	0,6421	0,01447
20g	1,2737	0,01459

Die Werte unterscheiden sich nur sehr gering und da es sich um eine statische Messung mit drei unterschiedlichen Gewichten handelt, sind sie auch ziemlich genau. Für die weitere Rechnung wird der Mittelwert $D^* = 0,01443 \frac{Nm}{rad}$ verwendet.

Mit der Winkelrichtgröße kann nun auch das Trägheitsmoment berechnet werden. Es gilt nach der Vorbereitung:

$$\Theta = \frac{D^* \cdot T(0)^2}{4\pi^2} = 1,334 \cdot 10^{-3} kg \cdot m^2 \quad (66)$$

Dies passt sehr gut mit dem Wert $\Theta_0 = 1,387 \cdot 10^{-3} kg \cdot m^2$, der in der Vorbereitung mit Gleichung (41) berechnet wurde, überein. Die Abweichung beträgt lediglich rund 3,8 %. Dabei ist wohl der gemessene Wert dem berechneten vorzuziehen, da die Rechnung beispielsweise die Speichen nicht miteinbezieht und so das Ergebnis verfälscht.

18 Auswertung Aufgabe 4: Drehpendel, erzwungene Schwingungen

Nun wird die Schwingung des Drehpendels von außen angeregt. Die Bewegung und damit die Erregerfrequenz wird über einen Winkelgeber ebenfalls aufgezeichnet. Es werden zwei Messreihen mit 200 mA und 400 mA Stromstärke der Wirbelstrombremse durchgeführt, wobei man vor dem Ablesen der Amplitude jeweils warten muss, bis sich das System eingeschungen hat, was

besonders bei der geringeren Dämpfung bei 200 mA eine gewisse Zeit dauert.

Die gemessenen Werte werden im folgenden Schaubild mit einer Ausgleichskurve der Form

$$A = \frac{\frac{M_0}{\Theta}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\beta\Omega)^2}} \quad (67)$$

angenähert. Die Ausgleichskurve hat hier die Form

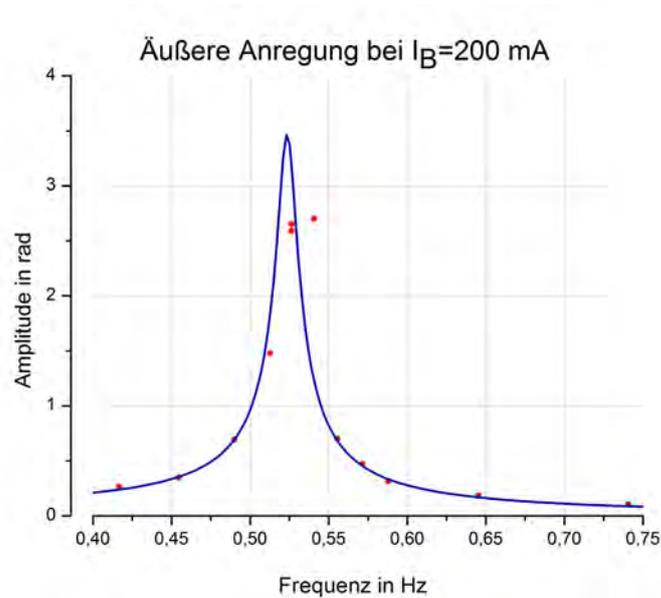


Abbildung 12: Amplitude über Frequenz bei einer Dämpfung von 200 mA

$$A_{200} = \frac{0,95}{\sqrt{(10,822s^{-2} - (2\pi f)^2)^2 + (4\pi \cdot 0,0416s^{-1} \cdot f)^2}} \quad (68)$$

und es ergeben sich die Maximalwerte $\varphi_{max} = 3,455$ rad und $\Omega_{max} = 0,523$ Hz.

Dabei ist zu bemerken, dass das Pendel in Resonanznähe an die Begrenzer zu beiden Seite angeschlagen hat, d.h. eine höhere Amplitude war technisch nicht möglich. Daraus resultiert auch der einzelne abweichende Messwert.

Hier hat die Ausgleichskurve die Form

$$A_{400} = \frac{0,84}{\sqrt{(10,822s^{-2} - (2\pi f)^2)^2 + (4\pi \cdot 0,1538s^{-1} \cdot f)^2}} \quad (69)$$

und es ergeben sich die Maximalwerte $\varphi_{max} = 0,832$ rad und $\Omega_{max} = 0,522$ Hz = $3,28 \frac{rad}{s}$.

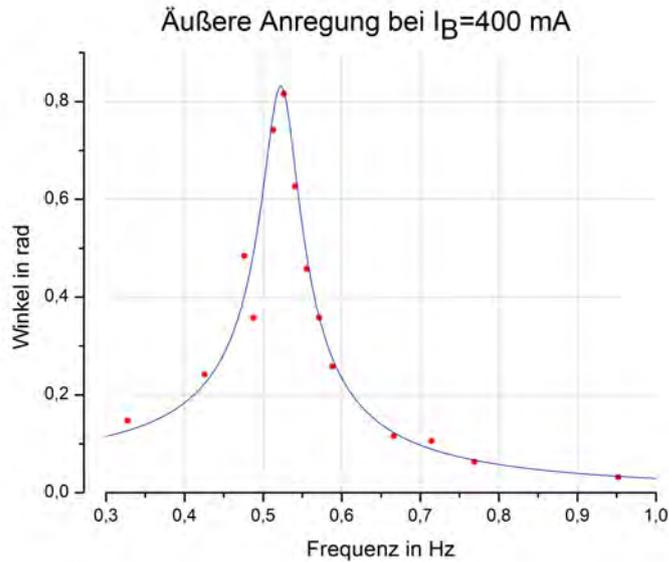


Abbildung 13: Amplitude über Frequenz bei einer Dämpfung von 400 mA

Verglichen mit den theoretischen Werten bei $\Omega_{Res} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ (siehe Vorbereitung)

$$\Omega_{200} = 3,29 \frac{rad}{s} = 0,523 Hz \quad \Omega_{400} = 3,2 \frac{rad}{s} = 0,522 Hz \quad (70)$$

ergibt sich eine schöne Übereinstimmung. Dabei wurden die berechneten Werte für β aus Aufgabe 2 verwendet. Allerdings ist der Unterschied zwischen den Resonanzfrequenzen bei diesen Dämpfungen sehr gering.

Wie in der Vorbereitung schon thematisiert, beobachtet man eine Phasenverschiebung der anregenden gegenüber der angeregten Schwingung. Die Phasenverschiebung war 0 bei kleinen Frequenzen und etwa $-\pi$ für Frequenzen deutlich über der Resonanzfrequenz.

Nun soll noch die Güte des Systems bestimmt werden. Bei der Amplitude $A_B = \frac{A_{res}}{\sqrt{2}}$ beträgt die Bandbreite $\Delta\omega \approx 2\beta = \frac{\omega_0}{Q}$.

Die Ergebnisse werden in folgender Tabelle dargestellt:

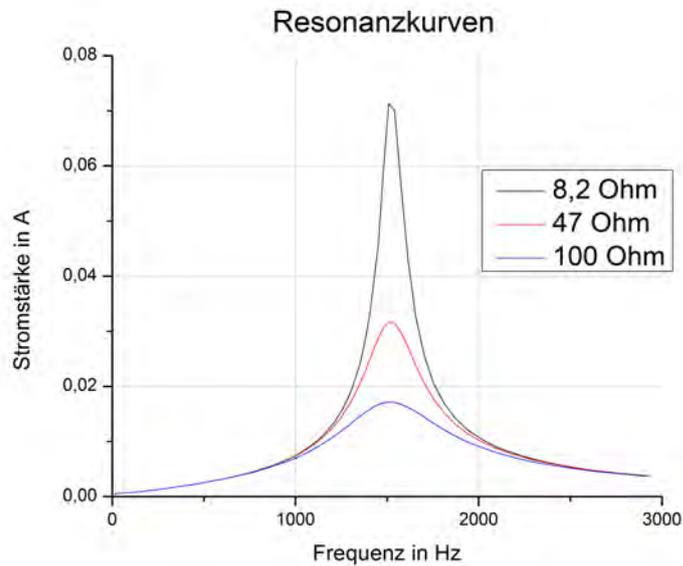
I_B	φ_{max} in rad	$\frac{\varphi_{max}}{\sqrt{2}}$ in rad	Δf in Hz	Q
200 mA	3,455	2,443	0,0132	39,57
400 mA	0,832	0,588	0,049	10,68

Verglichen mit Aufgabe 2 unterscheiden sich die Güten doch erheblich voneinander, weshalb sich die Vermutung äußern lässt, dass die Güten nicht zusammenhängen.

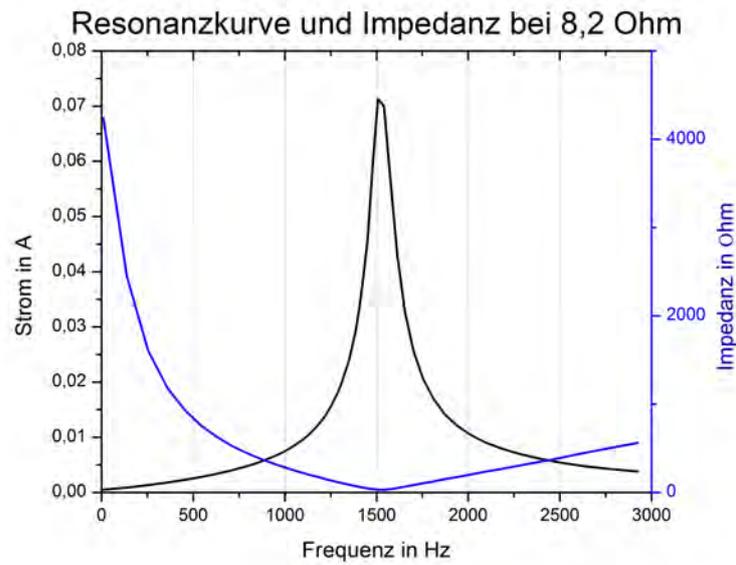
19 Auswertung Aufgabe 5: Serienschwingkreis, erzwungene Schwingungen

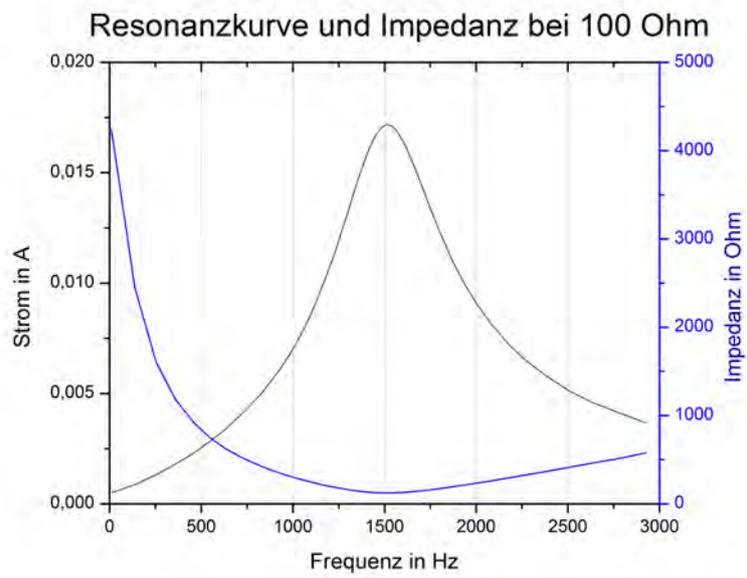
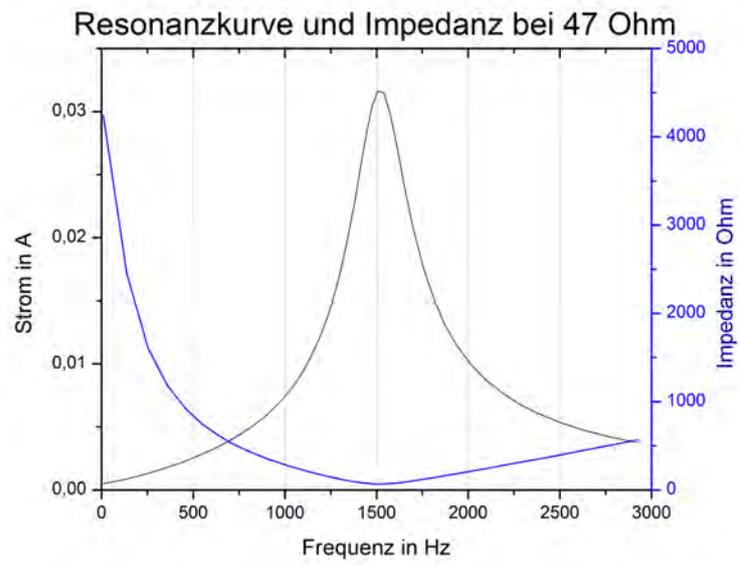
Aus zeitlichen Gründen ist es uns nicht gelungen, den Versuch selbst durchzuführen und deshalb greifen wir zur Bearbeitung der Aufgaben auf das Material unserer Partnergruppe Di-36 zurück.

Der Schwingkreis besteht aus in Reihe geschaltetem Widerstand, Kondensator, Spule und POWER CASSY als Wechselspannungsquelle. Untersucht man die Resonanzkurven $I(\omega)$ bei den Dämpfungswiderständen $8,2\Omega$, 47Ω und 100Ω erhält man folgende Kurven, aus denen man den Wert für die Resonanzfrequenz bei etwa 1510 Hz abschätzen kann.



Vergleicht man dieses Ergebnis mit dem theoretischen Wert von 1321 Hz, beträgt die Abweichung ungefähr 14,3%. Dieser deutliche Unterschied kann zum einen auf kleine Fehler beim Bestimmen der Messwerte zurückgeführt werden, zum anderen können die Angaben zur Größe von Kondensator, Widerstand und Spule nicht exakt sein. Trägt man wie gefordert die Impedanz und die Schwingungsamplitude als Funktion der Frequenz auf, erhält man für die einzelnen Widerstände folgende Darstellungen:





Aus den Darstellungen geht hervor, dass die Impedanz bei allen Widerständen ihr Minimum bei der Resonanzfrequenz hat. Vergleicht man die Kurven unter Berücksichtigung der verschiedenen Widerstände, stellt man fest, dass je kleiner der Widerstand, desto markanter das Minimum der Impedanz und umso breiter die Resonanzkurve der Schwingungsamplitude. Aus der Bandbreite bestimmen wir die Güten der einzelnen Schwingkreise.

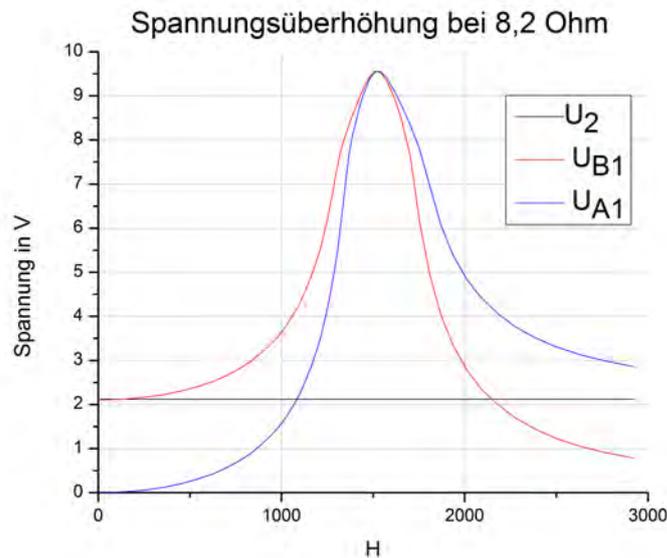
Dabei gilt:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{R}{\omega_0 L} = R \cdot \omega_0 C = R \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{Q} \quad (71)$$

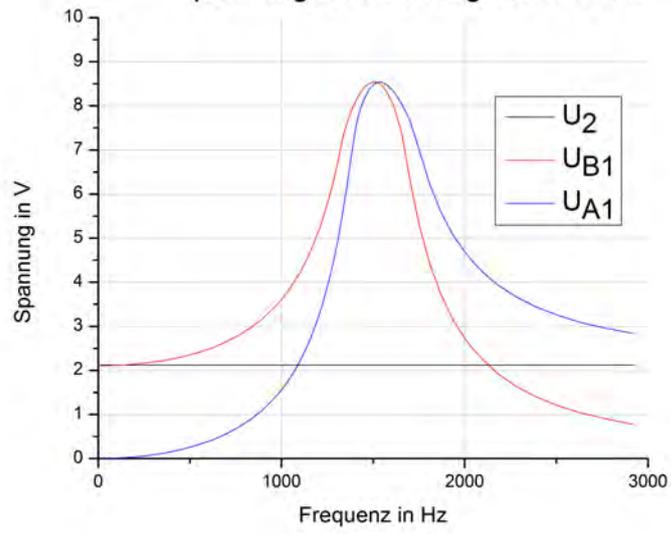
Ist die Güte gering, wird der Schwingkreis stark gedämpft und die Bandbreite ist groß. Es ergeben sich die folgenden Werte, wobei $\omega_0 = 9487,6 \frac{rad}{s}$:

Widerstand	8,2 Ω	47 Ω	100 Ω
Bandbreite $\Delta\omega$ in $\frac{rad}{s}$	829,38	1916,37	3499,73
Güte Q	11,44	4,95	2,72

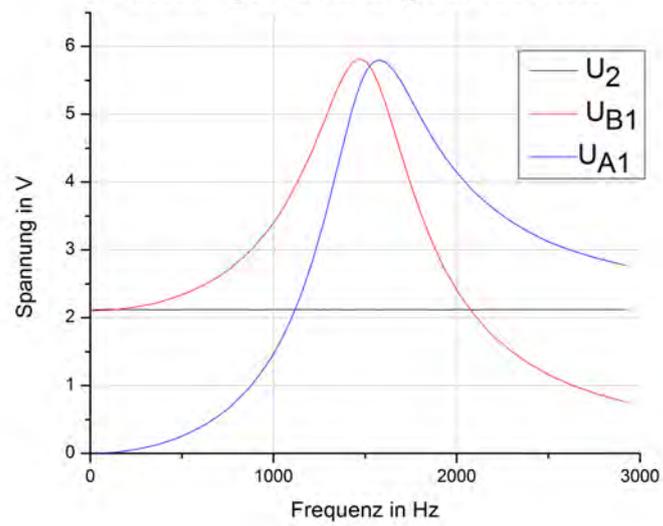
Trägt man die Spannungsverläufe von Spule und Kondensator über der Frequenz auf, erhält man eine Darstellung der Spannungsüberhöhung. Die Gerade ist die Funktion der anliegenden Spannung U_2 , U_{B1} ist die Spannung am Kondensator, U_{A1} ist die Spannung an der Spule.



Spannungsüberhöhung bei 47 Ohm



Spannungsüberhöhung bei 100 Ohm



Bei allen drei Widerständen ist die Spannung U_{B1} für $\omega < \omega_0$ größer als die anliegende Spannung U_2 und für $\omega > \omega_0$ ist U_{A1} größer als U_2 . Bei geringen Frequenzen fällt am Kondensator nahezu die gesamte Spannung ab, weil es möglich ist, dass er sich bei jeder Schwingung (fast) vollständig lädt und entlädt. Hier verhält sich der Kondensator wie ein großer Widerstand, während die Spule in den unteren Frequenzbereichen kaum Auswirkungen auf den Spannungsverlauf hat. In den hohen Frequenzbereichen wird der Kondensator kaum geladen, in der Spule jedoch entstehen zusätzliche Induktionsspannungen. Für Frequenzen nahe der Eigenfrequenz steigen die Spannungen an Kondensator und Spule auf ein Vielfaches der angelegten Spannung. Dieser Ausschlag nennt man Spannungsüberhöhung.

Aus den Kurven kann nun auf eine weitere Art die Güte des Schwingkreises errechnet werden. Dabei gilt:

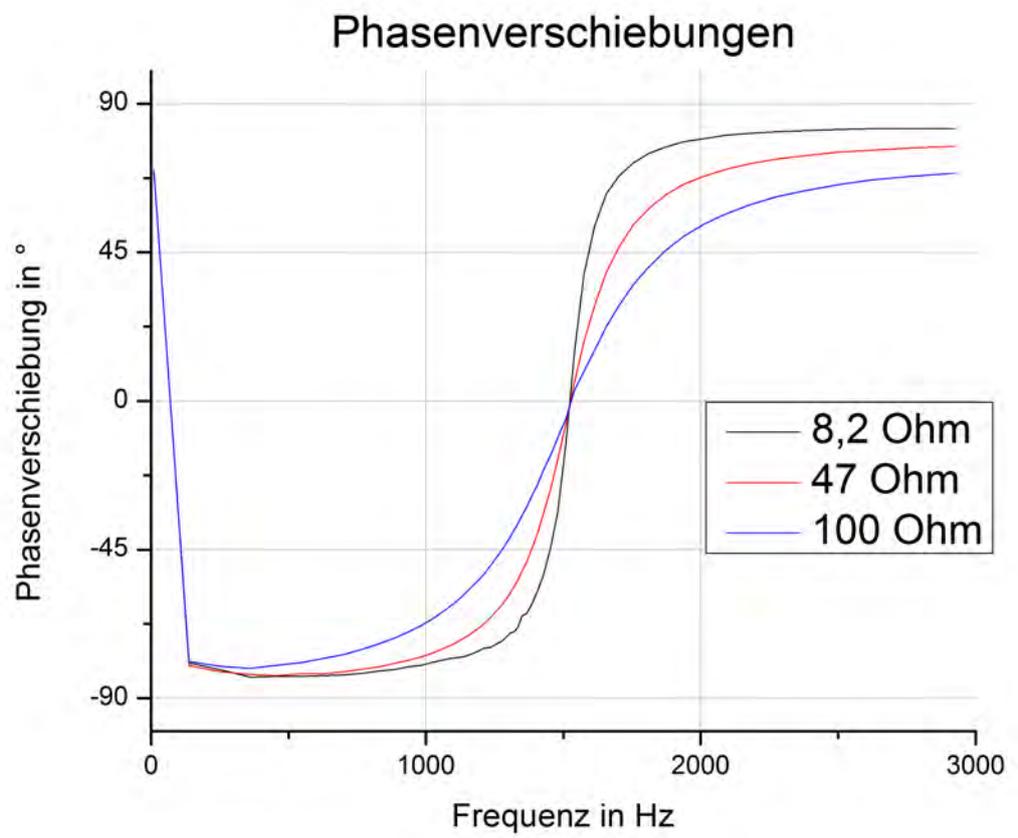
$$Q = \frac{U_{B1,max}}{U_2} \quad \text{oder} \quad Q = \frac{U_{A1,max}}{U_2} \quad (72)$$

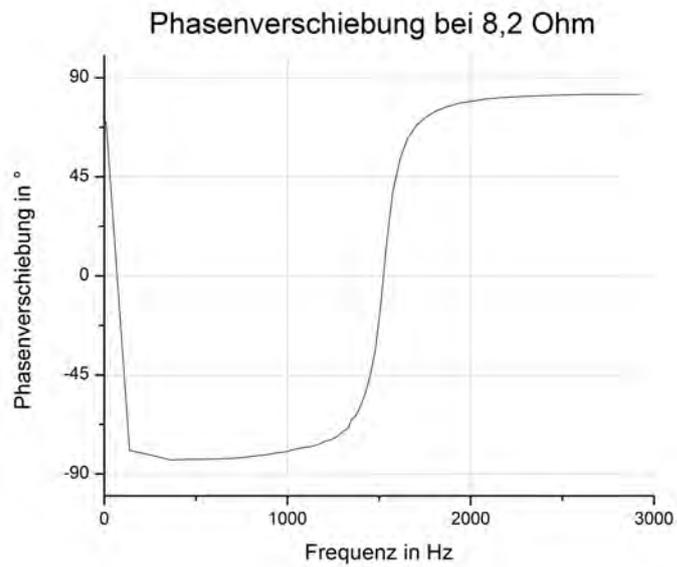
und man erhält mit $U_2 = 2,12 \text{ V}$:

Widerstand	8,2 Ω	47 Ω	100 Ω
$U_{B1,max}$ in V	9,55	8,54	5,80
Güte Q	4,50	4,03	2,74

Die Güten bei 8,2 Ω und 47 Ω weichen doch erheblich von den oben bestimmten ab. Da wir den Versuch selbst nicht durchgeführt haben, können wir etwaige Messfehler nicht ausschließen.

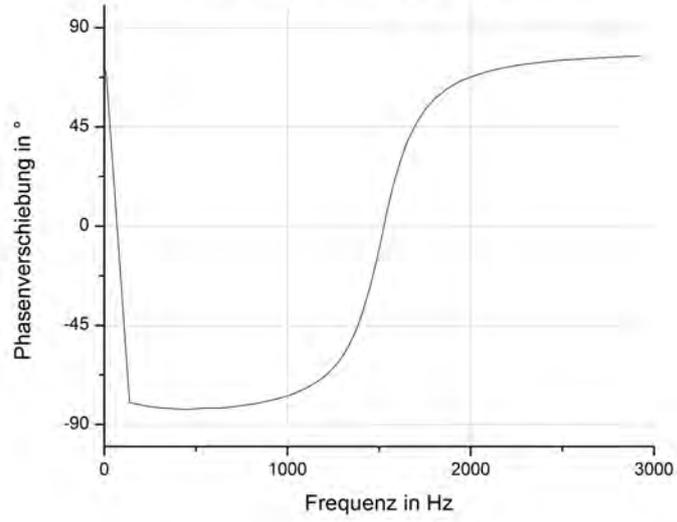
In den Schaubildern werden die Phasenverschiebungen in Abhängigkeit der Frequenz untersucht.



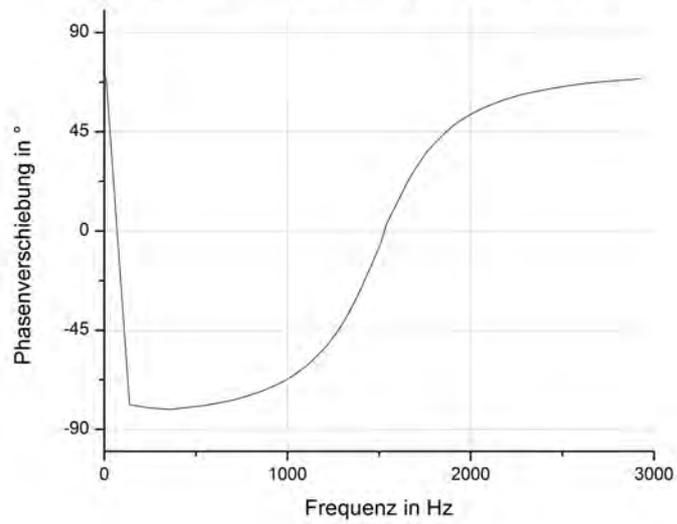


Man sieht, dass bei $\omega < \omega_0$ die Phasenverschiebung -90° beträgt, bei ω_0 einen Sprung macht und bei $\omega > \omega_0 + 90^\circ$ ist. Die Größe des Widerstands beeinflusst den Übergangsbereich - je größer der Widerstand, umso größer die Dämpfung und desto "weicher" der Übergang bei ω_0 .

Phasenverschiebung bei 47 Ohm



Phasenverschiebung bei 100 Ohm



20 Literatur

- **Vorlesungen über Physik**, Band 1, von Richard P. Feynman, Robert B. Leighton und Matthew Sands, 4. Auflage
- **Praktikum der Physik**, von Wilhelm Walcher, 8. Auflage
- **Musterprotokoll**, von Alexander Schiele und Johannes Weis
- **Das Neue Physikalische Grundpraktikum**, von H. J. Eichler, H.-D. Kronfeldt und J. Sahn, 2. Auflage
- **Vorbereitungshilfe Resonanz**, Fakultät für Physik, Universität Karlsruhe