



SS/WS 20.¹²/¹³.....

Praktikum: (P1/P2) (Mo/Di/Mi/Do) Gruppe-Nr:⁹

Name: ^{Backens}..... Vorname: ^{Stefan}.....

Name: ^{Schimassek}..... Vorname: ^{Rudolf}.....

Versuch: ^{Vier-pole und Leitungen}..... (~~mit~~/ohne) Fehlerrechnung

Betreuer: ^{Tobias Böhler}..... Durchgeführt am: ^{27.11.12}.....

Abgabe am: ^{04.12.12}.....

Rückgabe am:

Begründung:

2. Abgabe am:

Ergebnis: ⁽⁺⁾ / 0 / -)

Fehlerrechnung: ~~ja~~ / nein

Datum: ^{11.12.12}.....

Handzeichen: ^{Tobias Böhler}.....

Bemerkungen:

Musterprotokoll?



Versuche P1-53,54,55:

Vierpole und Leitungen

Raum F1-17

Bei diesem Versuch geht es um die Übertragungseigenschaften von Vierpolen, Vierpolketten und Kabeln. Die in der Praxis häufig vorkommenden R-C-Spannungsteiler (Differenzier- und Integrierglied bzw. Hoch- und Tiefpaß) werden untersucht, ebenso das L-C-Glied und eine Kette aus solchen Gliedern (Drosselkette). Anhand der Drosselkette werden Eigenschaften von Übertragungsleitungen diskutiert und ermittelt. Schließlich wird als Grenzfall der Drosselkette mit einem Koaxialkabel experimentiert. Bei den Experimenten spielt die Verwendung eines Oszilloskops eine gewichtige Rolle.

Aufgaben:

1. Bei dieser Aufgabe werden einfache passive lineare Vierpole, nämlich **R-C-Spannungsteiler**, bezüglich des **Abschwächungsverhältnisses** (unter diesem Aspekt heißen sie 'Hochpaß' bzw. 'Tiefpaß') und der **Phasenverschiebung** (unter diesem Aspekt heißen sie 'Phasenschieber') zwischen Ausgangs- und Eingangsspannung untersucht.

1.1 Legen Sie sinusförmige Wechselspannung ($f \cong 1,7\text{kHz}$; $u_e \cong 8V_{ss}$) an die Reihenschaltung von C ($\approx 1\text{nF}$) und R ($\approx 1 / 10 / 100 / 1000 \text{ k}\Omega$) und beobachten Sie als Ausgangsspannung u_a die Spannung an R oszilloskopisch: '**Hochpaß**'. Der Index „ $_{ss}$ “ bei der Spannungsangabe V_{ss} bedeutet, daß der zwischen Maximum und Minimum der Wechselspannung gemessene und am Oszilloskop besonders gut ablesbare Spitze-Spitze-Wert gemeint ist. Er beträgt das $2\sqrt{2}$ -fache der üblicherweise angegebenen Effektivspannung. Am Zweikanaloszilloskop wird gleichzeitig die Eingangsspannung u_e dargestellt. Verwenden Sie am Oszilloskopeingang für u_a den Tastkopf. (Warum?). Messen Sie sowohl den Betrag von u_a als auch die zeitliche Verschiebung Δt zwischen Ausgangs- und Eingangsspannung, und rechnen Sie um in das Abschwächungsverhältnis u_a/u_e und die Phasenverschiebung $\Delta\phi$ in Winkelgrad. Stellen Sie sowohl u_a/u_e als auch $\Delta\phi$ über $\log(f/f_0)$ mit $f_0 = 1 / 2\pi RC$ dar, und tragen Sie jeweils den berechneten Verlauf dazu ein.

1.2 Wie 1.1, jedoch wird jetzt als Ausgangsspannung u_a die Spannung an C beobachtet: '**Tiefpaß**'.

2. Dieselben Vierpole wie bei Aufgabe 1 werden benutzt, aber statt sinusförmiger Wechselspannung wird jetzt Dreieck- bzw. Rechteckwechselspannung angelegt. Bei geeigneter Dimensionierung spricht man von '**Differenzier- bzw. Integriergliedern**'.

2.1 Legen Sie **dreieckförmige** Wechselspannung ($f \cong 1,7\text{kHz}$; $u_e \cong 8V_{ss}$) an die Reihenschaltung von C ($\approx 1\text{nF}$) und R (wie bei 1.1) und beobachten Sie als Ausgangsspannung u_a die Spannung an R oszilloskopisch: '**Differenzierglied**', falls $f/f_0 \ll 1$. Am Zweikanaloszilloskop wird gleichzeitig die Eingangsspannung u_e dargestellt. Verwenden Sie am Oszilloskopeingang für u_a den Tastkopf. Vergleichen Sie die Meßergebnisse mit Rechenergebnissen.

2.2 Wie 2.1, jedoch wird jetzt als Ausgangsspannung u_a die Spannung an C beobachtet: '**Integrierglied**', falls $f/f_0 \gg 1$. Statt dreieckförmiger ist hier **rechteckförmige** Wechselspannung zweckmäßig.

2.3 Es ist interessant, außer den in den Aufgaben verlangten R-C-Kombinationen weitere zu verwenden oder etwa das Differenzierglied mit Rechteck- und das Integrierglied mit Dreieckspannung zu betreiben oder bei festem R und C die Frequenz der angelegten Spannung über weite Bereiche zu variieren. Machen Sie solche Untersuchungen.

3. Hier geht es um längssymmetrische **Vierpole** aus (idealisiert) reinen Blindwiderständen und ihre **Übertragungseigenschaften** (Betrag und Phase von u_a/u_e) sowie um die Wirkung der Verkettung mehrerer gleicher Vierpole. Dabei wird die '**Drosselkette**' untersucht, die einerseits als 'Impulsverzögerer' sowie als 'Tiefpaß mit steiler Flanke' praktische Bedeutung hat und andererseits das Funktionieren eines Kabels (Aufgabe 4) leichter verständlich macht.

3.1 Bestimmen Sie den **charakteristischen Widerstand** $Z_0(f \ll f_0)$ einer Drosselkette bei relativ geringer Frequenz. Legen Sie dazu an die sechsgliedrige Kette rechteckförmige Wechselspannung ($f \cong 20\text{kHz}$; $u_e \cong 6V_{ss}$) und beobachten Sie oszilloskopisch das Eingangssignal. Schalten Sie den

regelbaren Lastwiderstand Z_A ('Abschlußwiderstand') der Kette ein, und stellen Sie ihn so ein, daß die beobachtete Spannung das im wesentlichen unverfälschte Rechteck ist, das möglichst wenig durch **Reflexionen** vom Kettenende beeinträchtigt wird.

3.2 Bestimmen Sie die **Grenzfrequenz f_0** der Drosselkette. Legen Sie dazu an die 6-gliedrige Kette sinusförmige Wechselspannung (f bis 1MHz; $u \sim 6V_{SS}$). Stellen Sie den Lastwiderstand anfangs auf $Z_0(f \ll f_0)$ ein. Beobachten Sie zunächst die Eingangsspannung an der Kette, und überzeugen Sie sich davon, daß der Generator eine nahezu frequenzunabhängige Spannung liefert. Beobachten Sie dann die Ausgangsspannung der Kette beim Erhöhen der Frequenz. Dabei muß der Lastwiderstand Z_A entsprechend der theoretischen Frequenzabhängigkeit von Z_0 (f/f_0) nachgeregelt werden, um Reflexionen zu vermeiden. Suchen Sie jenen Frequenzbereich, in dem sich u_a stark mit f ändert, und lesen Sie die Grenzfrequenz f_0 von der Generatorskala ab (etwa an der Stelle $u_a/u_e = 1/10$).

3.3 Berechnen Sie aus Z_0 ($f \ll f_0$) und f_0 die **Kapazität $C/2 + C/2$** und die **Induktivität L** jedes Kettengliedes. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit den angegebenen Daten der Bauelemente.

3.4 Untersuchen Sie mit Hilfe des Zweikanaloszilloskops die **Phasenverschiebung** zwischen Ausgangs- und Eingangssignal in Abhängigkeit von der Frequenz (Sinusförmige Wechselspannung; $f \sim 10 / 100 / 300 / 500 / 600 / 650 / 690$ kHz) sowohl für das einzelne π -Glied als auch für die 6-gliedrige Kette. Sorgen Sie jeweils für reflexionsfreien Abschluß der Kette. Rechnen Sie aus der am Oszilloskop abgelesenen zeitlichen Verschiebung um auf die Verschiebung im Bogenmaß. Überzeugen Sie sich davon, daß bei der Grenzfrequenz die Phasenverschiebung über einen Vierpol gerade gleich π ist, und davon, daß bei einer n -gliedrigen Kette von Vierpolen gegenüber dem einzelnen Vierpol die Phasenverschiebung etwa n -facht wird. Sie können durch geschickte Benutzung des Zweikanaloszilloskops recht genau jene Frequenzen einstellen, die bei der 6-gliedrigen Kette Phasenverschiebungen von π , 2π , 3π , 4π und 5π ergeben. Ermitteln Sie aus diesen fünf Frequenzen nochmals die Grenzfrequenz f_0 .

3.5 Erzwingen Sie Reflexionen vom Kettenende ($Z_A = 0$), vermeiden Sie weitgehend Reflexionen am Kettenanfang (200 Ω -Steckwiderstand anstelle des Kurzschlußsteckers zwischen Generator und Kettenanfang einfügen) und verwenden Sie rechteckförmige Wechselspannung (ca. 20kHz). Welche **Signalform** erwarten Sie am Kettenanfang? Vergleichen Sie Vorhersage und Beobachtung.

4. Die Vierpolkette aus einzelnen Gliedern wird jetzt ersetzt durch eine **homogene Leitung**, nämlich ein übliches **Koaxialkabel**, wie es z.B. zur Impulsübertragung verwendet wird. Einige der Messungen an der Vierpolkette werden an dem Kabel in entsprechender Weise ausgeführt, um die Verwandtschaft zu erkennen.

4.1 Bestimmen Sie den **charakteristischen Widerstand Z_0** des Kabels, der wegen der sehr geringen Verluste als praktisch frequenzunabhängig angenommen werden darf. Wie 3.1, jedoch Kabel statt Vierpolkette und rechteckförmige Wechselspannung mit $f \sim 1.1$ MHz.

4.2 Bestimmen Sie die **Verzögerungszeit τ'** pro Längeneinheit des Kabels durch gleichzeitige Beobachtung von Eingangs- und Ausgangs-Rechteckspannung am Oszilloskop. (Oszilloskop-Betriebsart 'alternating'; Zeitachsendehnung maximal.)

4.3 Bestimmen Sie die Verzögerungszeit τ' pro Längeneinheit des Kabels in einer zu Aufgabe 3.5 analogen Weise: $Z_A = 0$ einstellen und die **Überlagerung von Generatorsignal (1MHz) und reflektiertem Signal** am Kabeleingang beobachten.

4.4 Vergleichen Sie die aus verschiedenen Messungen und aus geometrischen Kabeldaten gewonnenen Ergebnisse für die relative **Dielektrizitätskonstante**, $\epsilon\{C_\ell, r_i, r_a\}$; $\epsilon\{\tau'\}$; $\epsilon\{Z_0(f \ll f_0), r_i, r_a\}$.

Zubehör:

Funktionsgenerator: GW-Instek SFG-2104, für Sinus-, Rechteck- und Dreiecksspannungen (0,1 Hz bis 4 MHz)

Oszilloskop: z.B. Tektronix 2465 oder Hameg 205-2 ($R_e \approx 1 \text{ M}\Omega$; $C_e \approx 47 \text{ pF}$; $R_e(\text{Tastkopf}) \approx 10 \text{ M}\Omega$)

Steckkästchen mit Bananenbuchsen für RC-Glieder

Steckelemente 220Ω ; sowie 1; 10; 100; $1000 \text{ k}\Omega \pm 2\%$ und 1; 10; 100; $1000 \text{ nF} \pm 2\%$

Drosselkette aus $\{1+5\}$ π -Gliedern ($C/2 = 1 \text{ nF}$; $L = 96 \mu\text{H}$; $C/2 = 1 \text{ nF}$) mit vorschaltbarem Serienwiderstand (200Ω) und mit abschaltbarem einstellbarem Lastwiderstand (bis 500Ω)

Koaxial-Kabel (Typ RG174/U; $\ell = 10,0 \text{ m}$; $C_\ell = 925 \text{ pF}$; $r_1 = 0,5 \text{ mm}$; $r_a = 1,75 \text{ mm}$) mit abschaltbarem einstellbarem Lastwiderstand (max. 100Ω)

Verbindungskabel (Koaxialkabel mit BNC-Steckern und Laborleitungen mit Bananensteckern)

Übergangsstücke (Koaxial \rightarrow Banane, Banane \rightarrow Koaxial).

Literatur**zu Drosselkette und Kabel:**

Bergmann, Schaefer: *Lehrbuch der Experimentalphysik*, Bd. 2.: 9.Aufl., de Gruyter, 2006

Demtröder: *Experimentalphysik 2: Elektrizität und Optik*, 4. Aufl. Springer, 2006

Vilbig: *Lehrbuch der HF-Technik* (1960): Bd.1, Kap. 2 und 3

Crawford: *Berkeley-Physik-Kurs 3* (Schwingungen und Wellen)

Meyers Physik-Lexikon: 'Leitung'

Jüngst: *Vorbereitungshilfe zu 'Vierpole und Leitungen'*

zu R-C-Gliedern:

Ch. Weddigen, W. Jüngst: *Elektronik; Eine Einführung für Naturwissenschaftler und Ingenieure...*, 2. Aufl. Springer 1993

Surina, Klasche: *Angew. Impulstechnik*, Par.3

Speiser: *Impulsschaltungen* (1967), 3.1 bis 3.4

Tietze, Schenk: *Halbleiterschaltungstechnik*

Vorbereitung zum Versuch „Vierpole und Leitungen“

Stefan Backens

27.11.2012

0 Vierpole

Ein *Vierpol* ist ein System elektrischer Bauelemente mit zwei Eingangs- und zwei Ausgangspolen. Bei den Bestandteilen handelt es sich um Induktivitäten, Kapazitäten und ohmsche Widerstände.

Zur rechnerischen Beschreibung des Verhaltens von Vierpolen ist daher die komplexe Wechselstromrechnung nützlich, wobei den Bauelementen *Impedanzen* zugeordnet werden:

$$\text{Ohmscher Widerstand } R: \quad Z_R = R$$

$$\text{Induktivität } L: \quad Z_L = i\omega L$$

$$\text{Kapazität } C: \quad Z_C = \frac{1}{i\omega C}$$

Diese lassen sich durch Betrag und Winkel ($Z = |Z|e^{i\varphi}$) darstellen. Letzterer gibt in einer Erweiterung des Ohmschen Gesetzes für Wechselstrom die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung an. ω bezeichnet hierbei die Kreisfrequenz des Wechselstroms, der für einfachere Rechnung ebenfalls komplex angenommen wird:

$$I = \hat{I}e^{i\omega t}$$

$$U = ZI$$

$$\Rightarrow U = \hat{U}e^{i(\omega t + \varphi)}$$

$$\text{mit } \hat{U} = |Z|\hat{I}$$

Wie bei Widerständen kann man Ersatzimpedanzen für zusammengesetzte Schaltungen berechnen.

Serienschaltung:

$$Z_{ges} = \sum_i Z_i$$

Parallelschaltung:

$$\frac{1}{Z_{ges}} = \sum_i \frac{1}{Z_i}$$

1 Hochpass und Tiefpass

Eine Reihenschaltung eines Kondensators und eines ohmschen Widerstands zwischen den Eingangspolen heißt *Hochpass*, wenn die Ausgangspole am Widerstand angreifen, *Tiefpass*, wenn sie am Kondensator angreifen (siehe Abbildung 1). Als Zusammenhang zwischen Eingangsspannung U_a und Ausgangsspannung U_e erhält man unter Verwendung der entsprechenden Impedanzen:

$$\begin{aligned} \text{Hochpass: } \frac{U_a}{R} &= I = \frac{U_e}{R + \frac{1}{i\omega C}} \\ \Rightarrow \frac{U_a}{U_e} &= \frac{R}{R + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{\omega^2 R^2 C^2 + i\omega RC}{\omega^2 R^2 C^2 + 1} \\ \text{Tiefpass: } \frac{U_a}{\frac{1}{i\omega C}} &= I = \frac{1}{R + \frac{1}{i\omega C}} \\ \Rightarrow \frac{U_a}{U_e} &= \frac{1 - i\omega RC}{\omega^2 R^2 C^2 + 1} \end{aligned}$$

Die Abschwächungsverhältnisse ergeben sich aus den Beträgen:

$$\begin{aligned} \text{Hochpass: } \frac{|U_a|}{|U_e|} &= \frac{\omega RC}{\sqrt{\omega^2 R^2 C^2 + 1}} \\ \text{Tiefpass: } \frac{|U_a|}{|U_e|} &= \frac{1}{\sqrt{\omega^2 R^2 C^2 + 1}} \end{aligned}$$

Für die Phasenverschiebungen sind hingegen die Winkel von Bedeutung:

$$\begin{aligned} \text{Hochpass: } \tan(\Delta\varphi) &= \frac{1}{\omega RC} \\ \text{Tiefpass: } \tan(\Delta\varphi) &= \omega RC \end{aligned}$$

Eine Phasenverschiebung von $\Delta\varphi = \pi/2$ tritt in beiden Fällen bei der Frequenz $\omega_0 = (RC)^{-1}$ auf. Im Versuch wird am Oszilloskop die zeitliche Verschiebung Δt abgelesen, damit wird dann $\Delta\varphi = \omega\Delta t$ berechnet.

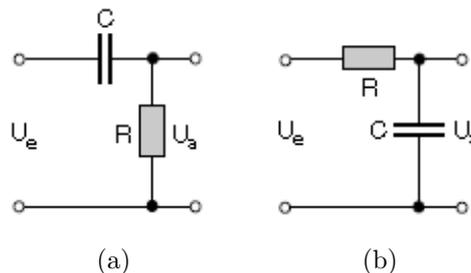


Abbildung 1: Schaltbild für (a) Hochpass und (b) Tiefpass

Tastkopf: Ein Tastkopf wird verwendet, um eine möglichst genaue Messung zu erhalten. Durch seinen hohen Eingangswiderstand verfälscht er die Werte nicht, zudem kann durch Abstimmung seiner Eigenschaften auf das Oszilloskop ein klares Signal aufgenommen werden. Weiterhin lässt sich die ans Oszilloskop gelieferte Spannung mit dem Tastkopf abschwächen.

2 Differenzier- und Integrierglied

Für eine nicht-sinusartige Spannung erhält man beim Hochpass

$$U_a = RI = R \frac{dQ_C}{dt} = RC \frac{dU_C}{dt} \approx RC \frac{dU_e}{dt},$$

U_a ist also proportional zur Ableitung von U_e (Differenzierer). Beim Anlegen einer Dreiecksspannung ist am Ausgang also eine Rechtecksspannung zu beobachten.

Ähnlich sollte bei am Tiefpass angelegter Rechtecksspannung am Ausgang eine Dreiecksspannung zu beobachten sein, weil U_a in diesem Fall abhängig vom Integral über U_e ist (Integrierer):

$$U_a = \frac{Q}{C} = \frac{1}{RC} \int (U_e - U_a) dt \approx \frac{1}{RC} \int U_e dt$$

Damit die obigen Näherungen gelten und diese Effekte beobachtet werden können, muss die Frequenz f im Fall des Hochpasses wesentlich kleiner als $f_0 = \omega_0/2\pi$, im Fall des Tiefpasses wesentlich größer sein. Dementsprechend müssen bei fester Frequenz R und C gewählt werden.

3 Drosselkette

Die im Folgenden verwendeten Formeln sind der Vorbereitungshilfe entnommen.

3.1 Charakteristischer Widerstand eines L-C-Glieds

Ein *L-C-Vierpol* besteht aus einer Längsinduktivität L mit der Impedanz $Z_L = i\omega L$ und zwei gleichen Querkapazitäten $C/2$ der Impedanz $Z_C = (i\omega C/2)^{-1}$, die sich zu beiden Seiten der Induktivität befinden. Die Eingangsimpedanz U_0/I_0 dieser Anordnung ist von der Lastimpedanz $Z_A = U_1/I_1$ auf der Ausgangsseite abhängig; ist dort die *charakteristische Impedanz* Z_0 angeschlossen, so nimmt die Eingangsimpedanz denselben Wert an. Dieser beträgt:

$$Z_0 = \frac{\sqrt{L/C}}{\sqrt{1 - (\omega/\omega_0)^2}} \left[\begin{array}{l} \omega \ll \omega_0 \\ \approx \end{array} \sqrt{\frac{L}{C}} \right]$$

mit $\omega_0 = \frac{2}{\sqrt{LC}}$

Im Allgemeinen ist diese Größe also frequenzabhängig. Beim Lastwiderstand Z_0 werden die Reflexionen minimal, sodass das Eingangssignal möglichst wenig verfälscht wird. Anhand dieser Eigenschaft lässt sich Z_0 im Experiment bestimmen.

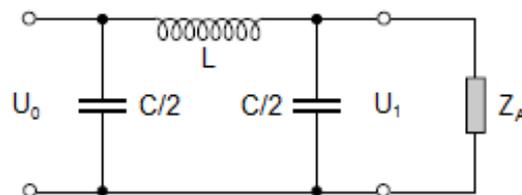


Abbildung 2: L-C-Element mit Abschlusswiderstand

3.2 Kette und Grenzfrequenz

Eine ideale, also insbesondere verlustfreie *Drosselkette* aus gleichartigen L-C-Gliedern hat als Spannungsübertragungsverhältnis:

$$\frac{U_n}{I_n} = \cosh(n\gamma) - Z_0 \frac{I_0}{U_0} \sinh(n\gamma)$$

mit $\gamma = \alpha + i\beta = \operatorname{arcosh} \left(\frac{Z_L}{Z_C} + 1 \right)$

Im Fall des Abschlusswiderstands Z_0 vereinfacht sich dies zu

$$\frac{U_n}{I_n} = e^{-n\gamma} = e^{-n\alpha} e^{-in\beta}$$

mit der Dämpfungskonstante $n\alpha$ und der Phasenkonstante $n\beta$.

Bei einer Frequenz $\omega < \omega_0$ nehmen diese

$$\alpha = 0 \quad ; \quad \beta = 2 \arcsin \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)$$

als Werte an, für $\omega > \omega_0$ ergibt sich hingegen

$$\alpha = 2 \operatorname{arcosh} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \quad ; \quad \beta = \pi.$$

Die ideale Drosselkette ist demnach unterhalb ω_0 verlustfrei, danach hingegen mit ansteigenden Verlusten behaftet, also wirkt sie als Tiefpass. Anhand dieser Eigenschaft lässt sich experimentell $f_0 = \omega_0/2\pi$ bestimmen.

3.3 Bestimmung der Kapazität und Induktivität

Aus der Grenzfrequenz und der charakteristischen Impedanz Z_0 für $\omega \ll \omega_0$ lassen sich die Eigenschaften der Bauteile der L-C-Glieder der Drosselkette bestimmen:

$$C = \frac{2}{\omega_0 Z_0}$$
$$L = \frac{2 Z_0}{\omega_0}$$

3.4 Lissajous-Figuren

Schließt man zwei Schwingungen mit ganzzahligem Frequenzverhältnis an das Zweikanaloszilloskop an, so sind in Abhängigkeit von der Phasenverschiebung φ sogenannte Lissajous-Figuren zu beobachten. Für $\varphi = n\pi$ handelt es sich beim hier verwendeten Frequenzverhältnis 1:1 einfach um diagonale Linien.

Aus den Frequenzen, bei denen die zu gewissen Phasenverschiebungen gehörenden Figuren auftreten, lässt sich dann mit obiger β -Formel $\omega_0 = 2\pi f_0$ berechnen.

3.5 Reflexion

Ohne Abschlusswiderstand ($Z_A = 0$) treten starke Reflexionen auf. Dann ergibt sich als Signal eine Überlagerung von Eingangsspannung und Reflexion. Die genaue Signalform hängt von der Phasenverschiebung (auf dem Weg und Phasensprung bei Reflexion) sowie der Dämpfung ab.

4 Koaxialkabel

Ein Koaxialkabel ist ein Grenzfall der Drosselkette für eine unendliche Zahl an Teilelementen. Zur spezifischen Längsinduktivität L' und Querkapazität C' kommen im Fall des realen Koaxialkabels noch ein spezifischer Längswiderstand R' und Querleitwert G' hinzu. Diese lassen sich also für ein infinitesimales Längenelement wie in Abbildung 3 darstellen.

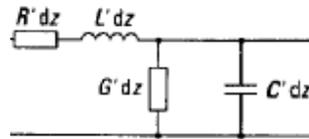


Abbildung 3: Ersatzschaltbild eines Koaxialkabelstücks

Wie bei der Drosselkette wird die charakteristische Impedanz Z_0 ermittelt. Zudem wird die Verzögerungszeit τ' pro Länge durch Vergleich am Oszilloskop und durch Überlagerung eines Eingangssignals mit der Reflexion (bei $Z_A = 0$) bestimmt.

Aus den Messwerten für τ' und Z_0 sowie einigen Daten des Kabels kann man dann auf verschiedene Weisen auf die Permittivität ϵ seines Dielektrikums schließen (mit Formeln aus der Vorbereitungshilfe):

$$\epsilon(C'_l, r_i, r_a) = \frac{C'_l}{2\pi \epsilon_0} \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)$$

$$\left[\frac{1}{\tau'} = v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}\right] \Rightarrow \epsilon(\tau') = \frac{c^2 \tau'^2}{\mu}$$

$$\epsilon(Z_0, r_i, r_a) = \frac{c^2 \mu_0^2 \mu}{4\pi^2 Z_0^2} \ln^2\left(\frac{r_a}{r_i}\right)$$

5 Literatur und Bildquellen

- [A] Demtröder: Experimentalphysik 2. 5. Auflage
5.5 Lineare Netzwerke; Hoch- und Tiefpässe; Frequenzfilter, S. 158-160
- [B] Jüngst: Vorbereitungshilfe zum Versuch „Vierpole und Leitungen“
- [C] Bergmann, Schaefer: Lehrbuch der Experimentalphysik. Band 2. 9. Auflage
5.2 Elektromagnetische Drahtwellen

Abbildung 1: [A] S. 158/159

Abbildung 2: selbst zusammengesetzt nach Abbildungen in [A]

Abbildung 3: [C] S. 9 der Vorbereitungsmappe

Vorbereitung für das Physikpraktikum 1

Versuch: Vierpole und Leitungen

Rudolf Schimassek

28. November 2012

1 Grundlagen

1.1 Vierpol

Ein Vierpol ist ein Bauteil mit zwei Eingängen und zwei Ausgängen. Dazwischen verbirgt sich eine Schaltung, die bestimmte Aufgaben erfüllen soll wie beispielsweise ein Frequenzfilter.

1.2 Hochpassfilter

[Quelle: [1, Seite 9]]

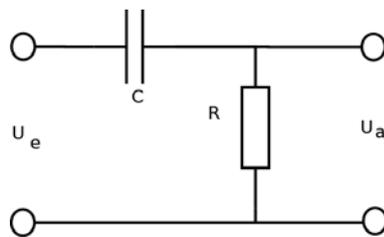


Abbildung 1: Schaltbild Hochpass

Ein Hochpassfilter ist ein Frequenzfilter, der für niedrige Frequenzen „sperrt“, hohe Frequenzen aber fast ungehindert durchlässt. Dies ist anhand des Schaltbildes (Abb. 1) und der Impedanzen der einzelnen Bauelemente ersichtlich: Die Ausgangsspannung U_a wird am Widerstand abgegriffen. Der Spannungsabfall errechnet sich damit als Widerstandsimpedanz geteilt durch Gesamtimpedanz (Die Gleichung wurde mit dem komplex konjugierten Nenner erweitert und die Wurzel gebildet):

$$U_a = \frac{R}{R + \frac{1}{i\omega C}} U_e \quad \Rightarrow |U_a| = \frac{\omega R C}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (1)$$

Daraus erhält man eine Relation zwischen U_e und U_a , anhand derer man sieht, dass hohe Frequenzen durchkommen, niedrige aber gefiltert werden:

$$\left| \frac{U_a}{U_e} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega R C)^2}}} \stackrel{\omega_0 = (RC)^{-1}}{=} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \quad (2)$$

Für die Phasenverschiebung gilt:

$$\phi = \arctan\left(\frac{1}{\omega R C}\right) \quad (3)$$

1.3 Tiefpassfilter

[Quelle: [1, Seite 10]]

Bei einem Tiefpassfilter sind der Widerstand und der Kondensator im Vergleich zum Hochpass gerade vertauscht. Setzt man wieder die Spannungsteilerrelation an, so kommt man auf:

$$U_a = \frac{1/(i\omega C)}{R + 1/(i\omega C)} U_e \quad \Rightarrow |U_a| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} U_e$$

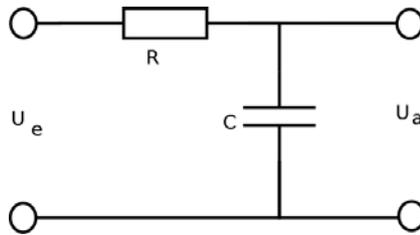


Abbildung 2: Schaltbild Tiefpass

Wie eben erhält man daraus mit $\omega_0 = (RC)^{-1}$:

$$\left| \frac{U_a}{U_e} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}} \quad (4)$$

Und für die Phasenverschiebung gilt:

$$\phi = \arctan(-\omega RC) \quad (5)$$

Anmerkung: Eine Größe mit Index „ss“ bedeutet, dass es sich um eine von Minimum zum Maximum bestimmten Größe handelt. Damit ist dieser Wert das $2\sqrt{2}$ -Fache des normalerweise angegebenen Wertes.

1.3.1 Tastkopf

Der Tastkopf ist ein Messmittel in der Elektronik, das vorrangig zur Spannungsmessung genutzt wird. Die Anforderungen an einen Tastkopf sind eine hohe Eingangsimpedanz um das Signal nicht zu verändern (Parallelschaltung). Damit sollte die Eingangskapazität möglichst klein und der Eingangswiderstand möglichst groß sein. Außerdem kann mit einem Tastkopf durch einen Spannungsteiler eine kleinere Eingangskapazität erreicht werden, wodurch die Signalquelle weniger belastet wird.

1.4 Differenzier- und Integrierglieder

1.4.1 Differenzierglied

Legt man an einen Hochpass keine sinusförmige Wechselspannung, sondern eine Dreiecksspannung, so erhält man für $\frac{f}{f_0} \ll 1$ eine Rechteckspannung, was der Ableitung der Eingangsspannung entspricht:

$$U_a = RI = R \frac{dQ}{dt} = RC \frac{dU_e}{dt}$$

Dabei wird davon ausgegangen, dass der Versuch bei ausreichend hohen Frequenzen durchgeführt wird, womit die Impedanz des Kondensators vernachlässigbar wird.

1.4.2 Integrierglied

Legt man an einen Tiefpass eine Rechteckspannung an. Für $\frac{f}{f_0} \ll 1$ erhält man eine Dreiecksspannung, da gilt:

$$U_a = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \int I dt = \frac{1}{RC} \int (U_e - U_a) dt$$

Anmerkung: Mit geeigneter Dimensionierung ist gemeint, dass $\frac{f}{f_0} \ll 1$ gelten soll.

1.5 Drosselkette

Ein Element einer Drosselkette ist in diesem Fall ein L-C-Vierpol. Er besteht aus einer Längsinduktivität und zwei Querkapazitäten gleicher Größe. Das Schaltbild eines solchen Elements ist in Abbildung 3 dargestellt. Die Gesamtimpedanz ergibt sich nach [2, Seite 2] zu:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right)}} \quad \text{wobei: } \omega_0 = \frac{2}{\sqrt{LC}} \quad (6)$$

Eine ideale Drosselkette besteht aus Vierpolen, also aus π -Gliedern mit Längsinduktivität L und zwei gleich großen Querinduktivitäten $C/2$. Die Verlustwiderstände der Vierpolteile sind vernachlässigbar.

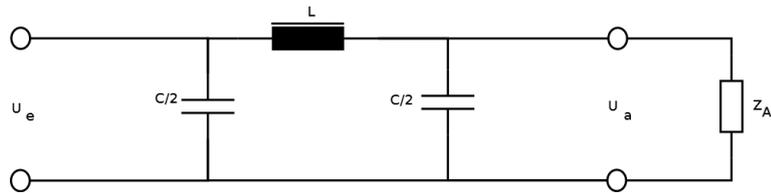


Abbildung 3: Element der Drosselkette mit Abschlusswiderstand

1.6 Ersatzschaltbild Koaxialkabel

Wie jeder Stromdurchflossene Leiter erzeugt auch ein Koaxialkabel ein Magnetfeld. Wenn es sich bei dem Strom um Wechselstrom handelt, so ist die Induktivität (pro Länge) zu beachten. Außerdem ergibt sich aus der Anordnung, dass sich ein elektrisches Feld zwischen den Leitern befindet, wenn diese auf unterschiedlichen Potentialen liegen. Diese Größen werden auch durch Idealisierungen nicht verschwinden, sie sind auch beim idealen Koaxialkabel zu beachten. In Abbildung 4 sind diese Größen als Größe pro Länge mit L' für die Induktivität und C' für die Kapazität bezeichnet.

Für reale Koaxialkabel kommt noch ein endlicher Leiterwiderstand hinzu der in gleicher Weise mit R' bezeichnet wird. Außerdem kommt beim realen Kabel noch hinzu, dass das Dielektrikum kein perfekter Isolator ist und somit auch ein Strom von einem Leiter zum anderen fließt. Dieser Widerstand des Dielektrikums pro Länge ist in Abbildung 4 mit G' bezeichnet.

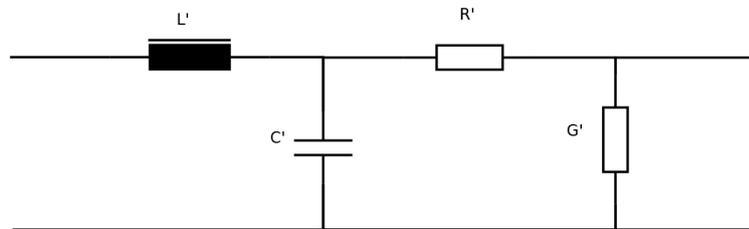


Abbildung 4: Ersatzschaltbild eines Koaxialkabels

2 Aufgaben

2.1 Versuch 1

2.1.1 Hochpass

In diesem Versuch soll ein Hochpass untersucht werden. Dazu wird Eingangs- und Ausgangsspannung mit einem Oszilloskop gemessen. Für die Ausgangsspannung U_a soll dabei ein Tastkopf verwendet werden.

2.1.2 Tiefpass

Hier sollen die gleichen Messungen wie in Versuch 1.1 durchgeführt werden, allerdings an einem Tiefpass.

2.2 Versuch 2

2.2.1 Differenzierglied

In diesem Versuch wird eine dreieckförmige Wechselspannung an einen Hochpass angeschlossen und die Eingangs- und Ausgangsspannungen gemeinsam auf einem Oszilloskop betrachtet. Die so erhaltenen Ergebnisse sollen mit den theoretischen ERgebnissen verglichen werden.

2.2.2 Integrierglied

Nun wird an einen Tiefpass eine Rechteckspannung angeschlossen und wie in Versuch 2.1 verfahren.

2.2.3 Weitere Untersuchen mit R-C-Kombinationen

Nun sollen weitere R-C-Kombinationen für die gleichen Versuche verwendet werden, Integrier- und Differenzierglied mit der anderen Wechselspannungsart betrieben werden und bei festem R und C die Frequenz der Spannung über weite Bereiche zu variieren.

2.3 Versuch 3

In diesem Versuch geht es um längssymmetrische Vierpole aus idealisiert reinen Blindwiderständen und ihre Übertragungseigenschaften. Außerdem geht es um die Wirkung einer Verkettung mehrerer gleicher Vierpole. Die in diesem Versuch verwendete Drosselkette besteht aus sechs L-C-Vierpolen.

2.3.1 charakteristischer Widerstand

Der charakteristische Widerstand Z_0 einer Drosselkette soll bei kleinen Frequenzen ($f \ll f_0$) bestimmt werden. Die Drosselkette wird an eine rechteckförmige Wechselspannung angeschlossen. Am Ende der Kette soll der regelbare Lastwiderstand Z_A eingefügt werden und so eingestellt werden, dass die Rechteckspannung möglichst wenig verfälscht wird.

Da die charakteristische Impedanz frequenzabhängig ist, allerdings nach Aufgabenstellung in einem Frequenzbereich mit $f \ll f_0$ gearbeitet wird, kann diese als

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

angenommen werden.

2.3.2 Grenzfrequenz f_0

An die Drosselkette wird nun eine sinusförmige Wechselspannung angelegt, und der Lastwiderstand auf Z_0 eingestellt. Anschließend soll man sich davon überzeugen, dass die Spannung nahezu frequenzunabhängig ist.

Nun soll die Ausgangsspannung bei Erhöhung der Frequenz beobachtet werden. Dabei ist darauf zu achten, dass man den Abschlusswiderstand entsprechend der theoretischen Frequenzabhängigkeit von Z_0 nachregelt, um Reflexionen zu vermeiden. Es soll der Bereich gesucht werden, in dem sich die Ausgangsspannung stark mit der Frequenz ändert. Dies ist etwa bei

$$\frac{|U_A|}{|U_e|} = \frac{1}{10}$$

zu erwarten.

2.3.3 Induktivität und Kapazität der Kettenglieder

Aus Z_0 (bei $f \ll f_0$) und f_0 sollen nun die Induktivität und Kapazität der Kettenglieder berechnet werden. Für diese gilt:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$
$$f_0 = \frac{1}{\pi \sqrt{LC}}$$

Daraus kann man L und C bestimmen:

$$L = \frac{Z_0}{\pi f_0} \quad (7)$$

$$C = \frac{1}{\pi Z_0 f_0} \quad (8)$$

Die so errechneten Werte sollen mit den angegebenen Werten verglichen werden.

2.3.4 Phasenverschiebung

In diesem Teilversuch soll sowohl das einzelne π -Glieder, als auch die gesamte Kette die Phasenverschiebung zwischen Eingangs- und Ausgangsspannung mittels Oszilloskop für unterschiedliche Frequenzen bestimmt werden. Dabei soll die Verschiebung – umgerechnet auf Bogenmaß – für ein einzelnes Glied gerade π sein; für mehrere Vierpole soll sich das Ergebnis entsprechend der Anzahl der Elemente vervielfachen.

Um den in der Aufgabenstellung geforderten reflexionsfreien Abschluss zu erhalten, muss folgende Formel gelten (Abschlusswiderstand R , siehe [1, Seite 13]):

$$p = \frac{U_{\text{reflektiert}}}{U_{\text{Eingang}}} = \frac{R - Z_0}{R + Z_0} \stackrel{!}{=} 0 \quad (9)$$

Da sich mit dem Oszilloskop im Zweikanalbetrieb die Frequenzen, für die die Phasenverschiebung ein ganzzahliges Vielfaches von π ist, recht genau einstellen lässt, soll nun diese Grenzfrequenz für $n\pi$ $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ erneut bestimmt werden. In der Nähe von ganzzahligen Frequenzverhältnissen kommen beim Oszilloskop im Zweikanalbetrieb sogenannte **Lissajous-Figuren** zustande. Dies sind durch offensichtlich Überlagerungen harmonischer Schwingungen. Ist das Frequenzverhältnis nicht ganz ganzzahlig, so verändert sich das Schrimbild: Es scheint eine sich langsam drehende dreidimensionale Figur zu entstehen. Dreht sich diese nicht mehr, so hat ist das Frequenzverhältnis ganzzahlig.

2.3.5 Signalform bei Reflexion am Kettenende

Nun soll – im Gegensatz zum Rest der Aufgabe – eine Reflexion am Kettenende erzwungen werden, indem der Abschlusswiderstand auf 0 gesetzt wird. Um Reflexionen am Kettenanfang zu vermeiden wird dort statt dem Kurzschluss nun ein 200Ω -Widerstand eingefügt. Da sich nun die angelegte Rechteckspannung und die reflektierte Spannung Überlagern, werden sich je nach Kettenlänge eine andere Signalformen einstellen. Da es sich um Rechteckspannungen handelt werden sich diese entweder auslöschen oder verstärken. Für ein einfaches Kabel und Abschlusswiderstand $R = 0$ ergibt sich eine stehende Welle im Kabel, da der Reflexionsfaktor (siehe (9)) $p = -1$ ist.

2.4 Versuch 4

In diesem Versuch soll sich zeigen, in wie weit sich Koaxialkabel und Vierpolkette ähneln.

2.4.1 charakteristischer Widerstand

Analog zum Versuch 3.1 soll der charakteristische Widerstand des Koaxialkabels bestimmt werden. Da Koaxialkabel auf Grund ihrer Anwendungsgebiete genormt sind, ist der Erwartungswert $Z_0 = 50\Omega$.

2.4.2 Verzögerungszeit des Koaxialkabels

Nun soll die Verzögerungszeit τ' des Koaxialkabels pro Längeneinheit gemessen werden. Dazu werden Eingangssignal und Ausgangssignal für unterschiedliche Längen betrachtet.

$$\tau' = \frac{\Delta t}{l} \quad (10)$$

2.4.3 Verzögerungsmessung durch Überlagerung

Nun soll analog zu Versuch 3.5 die Verzögerungszeit mittels Überlagerung von Eingangssignal und Reflektiertem Signal vom Kabelende bestimmt werden. Dazu wird der Abschlusswiderstand $Z_A = 0$ gesetzt und am Kabeleingang gemessen.

2.4.4 Dielektrizitätskonstante

Nun sollen die aus den verschiedenen Messungen gewonnenen und den geometrischen Kabeldaten die relative Dielektrizitätskonstante bestimmt werden und die Werte miteinander verglichen werden. Die Werte berechnen sich aus folgenden Formeln (siehe [1, Seite 12]):

$$\epsilon(C_l, r_i, r_a) = \frac{C_l}{2\pi\epsilon_0} \log\left(\frac{r_a}{r_i}\right) \quad (11)$$

$$\epsilon(\tau') = \frac{(c\tau')^2}{\mu_r} \quad (12)$$

$$\epsilon(Z_0, r_i, r_a) = \frac{c^2\mu_0^2\mu_r}{4\pi^2 Z_0^2} \left(\log\left(\frac{r_a}{r_i}\right)\right)^2 \quad (13)$$

3 Quellen

Alle Abbildungen wurden selbst erstellt.

Literatur

- [1] Literaturliste
- [2] Vorbereitungshilfe für den Versuch Vierpole und Leitungen

PA-54

1.1.

$\frac{1}{10}$ gemessen

$f = 17 \text{ kHz}$
 $U_{SS} = 8 \text{ V}$

R	$U_{A,SS}$	Δt
$1 \text{ k}\Omega$	13,0 mV 3,0 mV	-138,6 μs
$10 \text{ k}\Omega$	74,0 mV	-138,6 μs
$100 \text{ k}\Omega$	534 mV	-75,6 μs
$1 \text{ M}\Omega$	755 mV	$\left\{ \begin{array}{l} -11,5 \mu\text{s} \\ -8,67 \mu\text{s} \end{array} \right.$

1.2.

$\frac{1}{10}$ gemessen

R	$U_{A,SS}$	Δt	R_{gemessen}
$1 \text{ k}\Omega$	770 mV	2,185 μs	0,99 k Ω (20 k Ω)
$10 \text{ k}\Omega$	770 mV	10,44 μs	10,06 k Ω (20 k Ω)
$100 \text{ k}\Omega$	534 mV	73,66 μs	100,2 k Ω (200 k Ω)
$1 \text{ M}\Omega$ $1 \text{ }\Omega$	76,5 mV	135,85 μs	1,006 M Ω (2 M Ω)

AL1

2.1.

DSC_0006.jpg 1 nF; 1 k Ω

Verschiebung DSC_0007_8.jpg

1 nF; 100 k Ω

0005 [← Nummer ist Bildnummer]

2.2. 1 nF; 1 k Ω 0010

1 nF; 100 k Ω 0011/12

1 nF; 1 M Ω 0013

ToSies Buehl

2.3. Wechselspannung	C	R	Hoch/Tief	Bild
	1nF	1MΩ	T	0014
	1nF	1kΩ	T	0015
	1nF	1kΩ	H	0016 ← mit CH2 0017
	1nF	1MΩ	H	0018

kleine Kurve Ausgangswerte

A3:

3.1.

$$R_A = 237 \Omega \quad (\text{2k Messbereich})$$

0019
0020

3.2.

f	$U_{A, SS}$	$U_{E, SS}$	
20 kHz	5,32V	6,02V	20 kHz
40 kHz	5,44V	5,52V	4 kHz
100 kHz	5,64V	5,52V	100 Hz
200 kHz	5,00V	5,90V	80 kHz
400 kHz	4,64V	5,90V	200 kHz
450 kHz	4,14V	5,98V	1 MHz
500 kHz	4,28V		

f	$U_{A, SS}$
640 kHz	3,90V
650 kHz	3,30V
660 kHz	2,81V
670 kHz	2,53V
680 kHz	2,85V
700 kHz	2,43V
710 kHz	1,32V
720 kHz	0,705V
730 kHz	0,406V
740 kHz	0,240V
750 kHz	0,155V
760 kHz	0,103V
770 kHz	0,071V

f	$U_{A, SS}$
790 kHz	0,0362V
850 kHz	8,6mV
900 kHz	4,2mV
701 kHz	2,32V
702 kHz	2,19V
703 kHz	2,08V
704 kHz	1,95V
705 kHz	1,84V
706 kHz	1,72V
707 kHz	1,62V
708 kHz	1,52V
709 kHz	1,43V
710 kHz	1,34V

größte Änderung

630 kHz → 4,36V

A3:

3.4

f	Δt
10 kHz	392 ns
100 kHz	407 ns
300 kHz	437 ns
500 kHz	467,2 ns
600 kHz	450,9 ns
650 kHz	445,2 ns
650 kHz	436,1 ns

1 π -Glied

Phasenverschiebungen:

f	π
0 Hz	0
188 kHz	1
365 kHz	2
522 kHz	3
680 kHz	4
625,5 kHz	4
658,3 kHz	5

6 π -Glieder (Kette)

f	Δt
10 kHz	3,165 μ s
100 kHz	2,648 μ s
300 kHz	2,674 μ s
500 kHz	2,800 μ s
600 kHz	3,002 μ s
650 kHz	3,252 μ s
690 kHz	3,400 μ s

3.5

$R_1 = 220 \Omega$

Messwert 220 Ω (2h Messbereich)

$f = 20 \text{ kHz}$ $\sqrt{\quad}$

0022
0023

A4:

4.1

$R_4 = 48,5 \Omega$

$f = 1,1 \text{ MHz}$

4.2

$\Delta t = 52,46 \text{ ns}$

4.3

$\Delta t = 108,5 \text{ ns}$

Tobias Buehl

Auswertung des Versuchs „Vierpole und Leitungen“ (P1-54)

Stefan Backens, Rudolf Schimassek

16. Januar 2013

1 Versuch

1.1 Hochpass

In diesem Versuch wird ein R-C-Vierpol untersucht, wozu eine sinusförmige Wechselspannung angelegt wird. Dabei wird die Spannung am Widerstand abgegriffen, sodass es sich um einen Hochpassfilter handelt. Es werden unterschiedliche Widerstände zwischen $1\text{ k}\Omega$ und $1\text{ M}\Omega$ verwendet. Aus den gemessenen Ausgangsspannungen und der Verschiebung dieser bezüglich der Eingangsspannung lassen sich die Phasenverschiebung und das Abschwächungsverhältnis berechnen und darstellen:

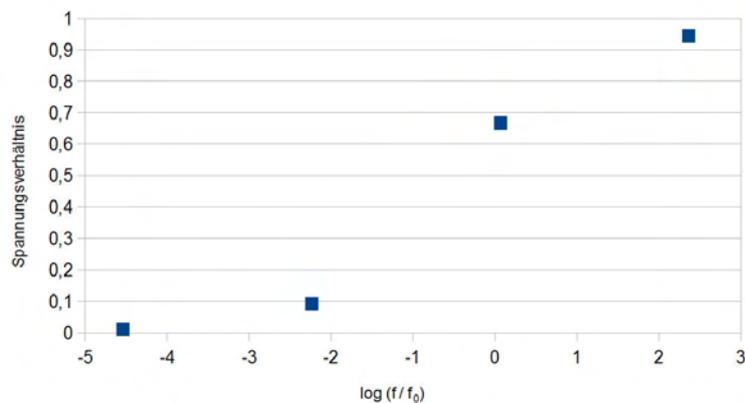


Abbildung 1: Spannungsverhältnis am Hochpassfilter

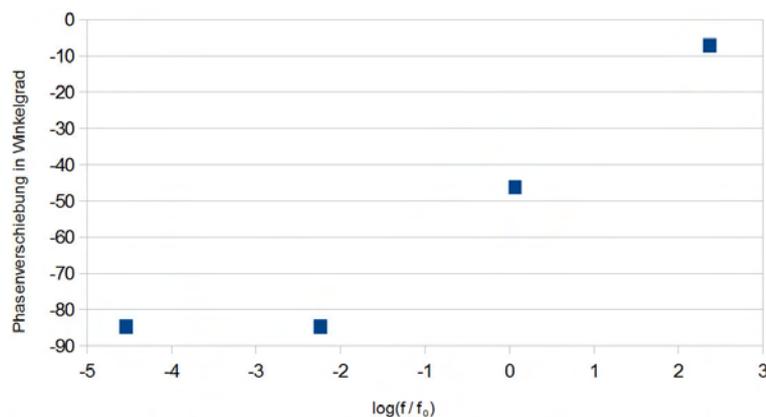


Abbildung 2: Phasenverschiebung am Hochpassfilter

An Abbildung 1 kann man gut erkennen, dass große Frequenzen wenig, kleine Frequenzen stark abgeschwächt werden. Auch die Phasenverschiebung verhält sich wie erwartet: Für größere Frequenzen geht sie gegen null, für kleine Frequenzen gegen -90° , wie Abbildung 2 zu entnehmen ist.

1.2 Tiefpass

Nun wird an den gleichen Schaltungen wie in Versuch 1.1 die Spannung am Kondensator abgegriffen. Damit erhält man einen Tiefpassfilter. Das bedeutet, dass genau umgekehrt zum Hochpassfilter die niedrigen Frequenzen wenig abgeschwächt werden. Anstelle einer negativen Phasenverschiebung erhält man eine positive, die für kleiner werdende Frequenzen gegen null strebt. Für große Frequenzen strebt die Phasenverschiebung gegen 90° .

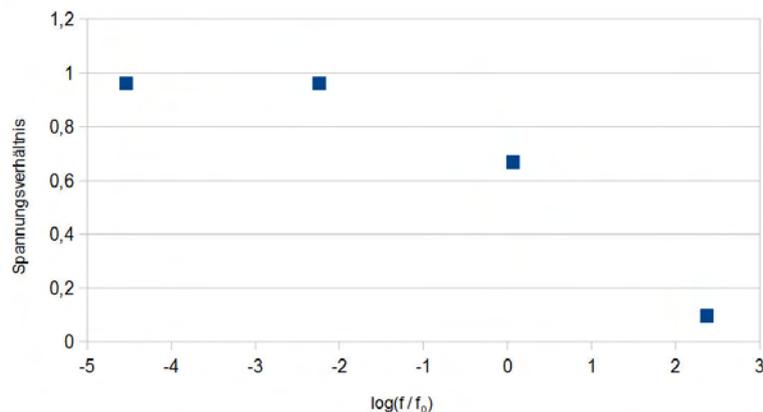


Abbildung 3: Spannungsverhältnis am Tiefpassfilter

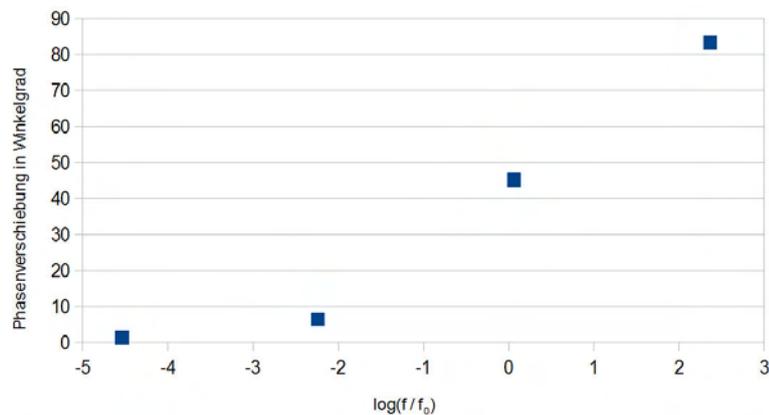


Abbildung 4: Phasenverschiebung am Tiefpassfilter

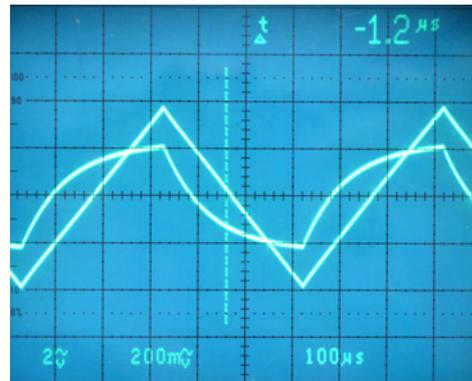
2 Versuch

2.1 Differenzierglied

Nutzt man einen Hochpass nicht mit sinusförmiger, sondern mit dreieckförmiger Wechselspannung, so erhält man für ausreichend kleine Widerstände und dementsprechend große Frequenzen $f_0 = (2\pi RC)^{-1}$ ein Differenzierglied, wie in Abbildung 5 dargestellt ist. Dabei ist die Kurve mit größerer Amplitude die eingehende Dreiecksspannung und die andere Kurve stellt die Ausgangsspannung über die Zeit dar.



(a) mit kleinem Widerstand



(b) mit großem Widerstand

Abbildung 5: Der Hochpass als Differenzierglied

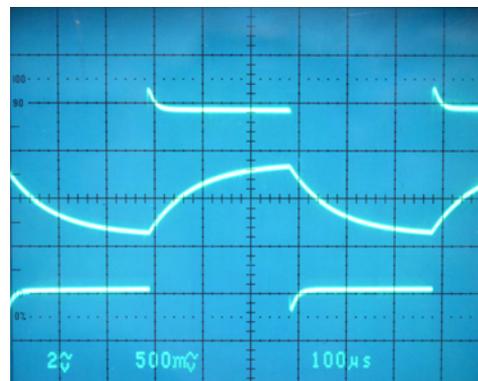
Die Ausgangsspannung in Abbildung 5(a) entspricht sehr gut der Ableitung der Eingangsspannung. Daran, dass der Graph der ausgehenden Spannung in Abbildung 5(b) hingegen keine Differentiation mehr darstellt, kann man erkennen, dass die Bedingung $f/f_0 \ll 1$ nicht mehr erfüllt ist. Ursache ist der verwendete größere Widerstand – von dem f_0 abhängt –, da nur er sich im Vergleich zu Abbildung 5(a) geändert hat.

2.2 Integrierglied

Nutzt man einen Tiefpass mit Rechteckspannung, so erhält man für $f/f_0 \gg 1$ ein Integrierglied, wie an der dreieckförmigen Ausgangsspannung in Abbildung 6(a) gut zu erkennen ist.



(a) mit großem Widerstand



(b) mit kleinem Widerstand

Abbildung 6: Der Tiefpass als Integrierglied

Analog zum Differenzierglied in Versuch 2.1 sieht man an Abbildung 6(b), dass die Integration nicht mehr stimmig ist. Daraus kann auf eine nicht mehr erfüllte Ungleichung $f/f_0 \gg 1$ wegen eines zu kleinen Widerstands geschlossen werden, da sich wieder nur dieser geändert hat.

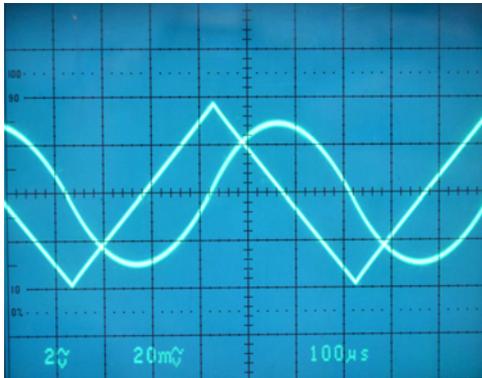
2.3 Weitere interessante R-C-Kombinationen

Außer den bereits verwendeten Konfigurationen von Hoch- / Tiefpass und Wechselspannungsart gibt es noch andere, die bemerkenswert sind.

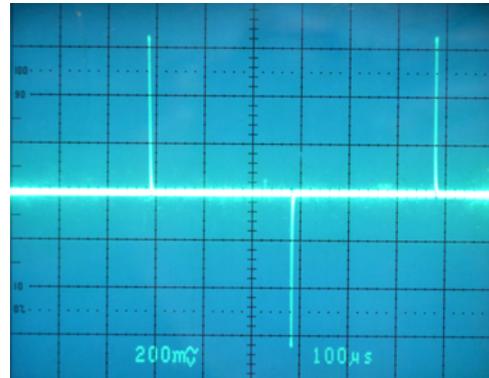
So kann man beispielsweise eine Dreiecksspannung integrieren, was in Abbildung 7(a) dargestellt ist. Wie bei einer Integration zu erwarten, ergibt sich aus der Dreiecksspan-

nung kein Sinus als Ausgangsspannung, sondern eine Funktion, die aus Parabeln zweiter Ordnung zusammengesetzt ist.

Andererseits kann man an ein Differenzierglied eine Rechteckspannung anlegen, was mathematisch zu Deltafunktionen führt. Entsprechende Spitzen lassen sich am Oszilloskop beobachten (Abbildung 7(b)).



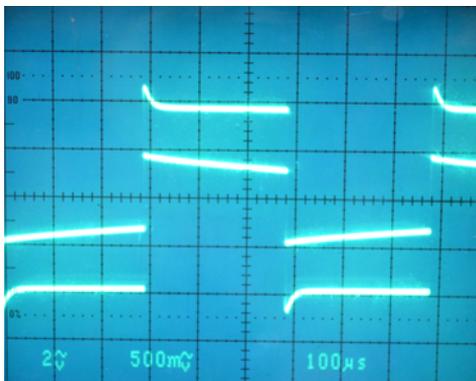
(a) Integration über eine Dreiecksspannung



(b) Differentiation einer Rechteckspannung

Abbildung 7: Weitere R-C-Kombinationen

Wie auch schon in den vorangehenden Teilversuchen führt eine unpassende Dimensionierung von Widerstand und Kondensator zu anderen Ergebnissen, die keiner Differentiation oder Integration entsprechen. Dies ist an den Abbildungen 8 erkennbar, da es sich bei diesen eigentlich um eine Integration (Abbildung 8(a)) und eine Differentiation (Abbildung 8(b)) handeln sollte.



(a) mit großem Widerstand



(b) mit kleinem Widerstand

Abbildung 8: Hoch- und Tiefpass, die nicht als Differenzierer oder Integrierer wirken

3 Versuch

3.1 charakteristischer Widerstand

Um den charakteristischen Widerstand einer Drosselkette bei niedriger Frequenz zu bestimmen, schließt man einen veränderbaren Widerstand an deren Ende und stellt ihn so ein, dass eine rechteckförmige Eingangsspannung möglichst wenig durch Reflexionen verformt wird. Dieser Widerstand wird dann bestimmt, in unserem Fall mittels eines digitalen Multimeters (Typ ELV 72812). Der gemessene Wert beträgt:

$$Z_0 = 257 \Omega$$

Das Schirmbild für diesen Wert ist in Abbildung 9 dargestellt.

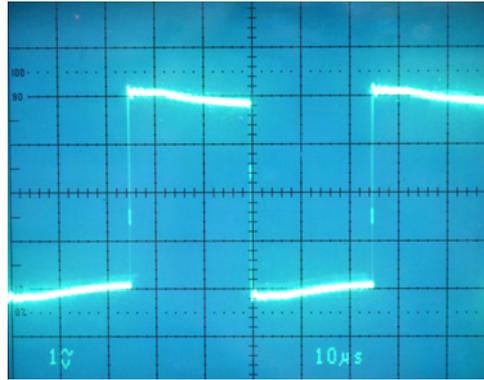


Abbildung 9: Rechteckspannung bestmöglicher Form

3.2 Grenzfrequenz

Nachdem man sich von der Frequenzunabhängigkeit der Spannung des Sinusgenerators überzeugt hat, ermittelt man durch gezielter werdende Messungen den Frequenzbereich, in dem sich die Ausgangsspannung am stärksten ändert. Dieser liegt bei ungefähr:

$$f_0 = 703 \text{ kHz}$$

Dabei handelt es sich also in etwa um die Grenzfrequenz.

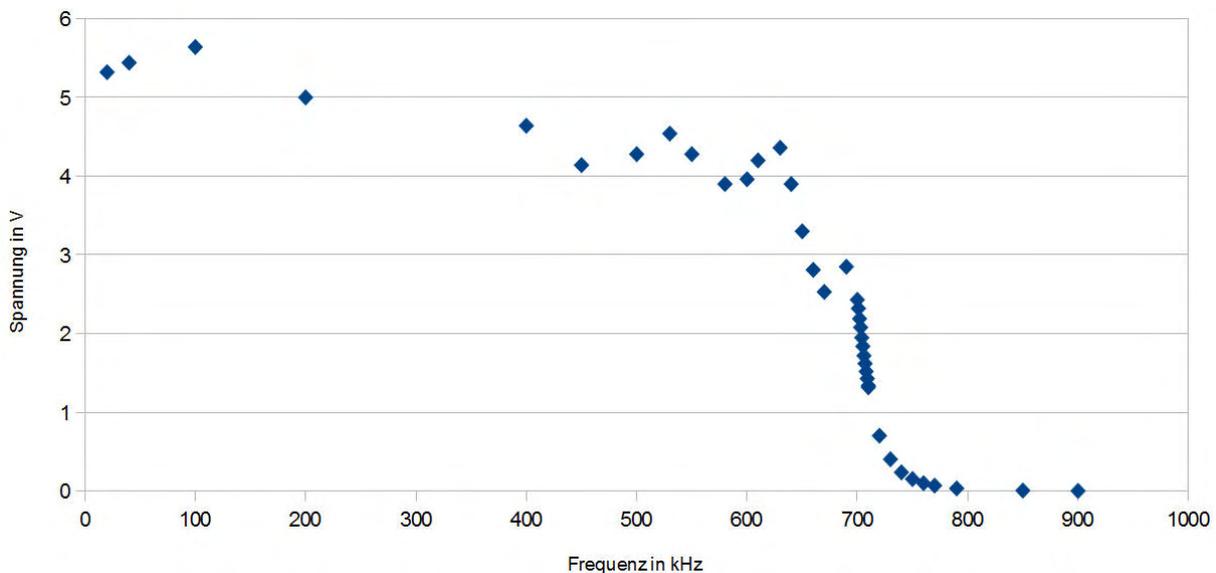


Abbildung 10: Ausgangsspannung in Abhängigkeit von der Frequenz

3.3 Kapazität und Induktivität eines Kettengliedes

Nachdem Z_0 und f_0 bekannt sind, lassen sich nun Kapazität und Induktivität eines Kettengliedes bestimmen:

$$C = \frac{1}{\pi f_0 Z_0} = 1,76 \text{ nF}$$

$$L = \frac{Z_0}{\pi f_0} = 116 \text{ } \mu\text{H}$$

Die angegebenen Werte sind $C = 2 \text{ nF}$ und $L = 96 \text{ } \mu\text{H}$. Die Messwerte stimmen in etwa mit ihnen überein, die relativen Abweichungen sind:

$$\delta C = 12,0 \%$$

$$\delta L = 20,8 \%$$

Ursache für diese Abweichungen könnte eine Überschätzung des charakteristischen Widerstands Z_0 in Versuch 3.1 sein.

3.4 Phasenverschiebungen

Für ein π -Glied und für die Kette wurden die Phasenverschiebungen bei bestimmten Frequenzen gemessen ($f \in \{10, 100, 300, 500, 600, 650, 690\} \text{ kHz}$). Falls sich die Phasenverschiebung von einem π -Glied zu n Gliedern ver- n -facht, so ergibt sich eine Gerade mit Steigung n , wenn man diese Phasenverschiebungen übereinander aufträgt. Bei der verwendeten Kette mit $n = 6$ sollte sich die Phasenverschiebung versechsfachen. Der beschriebene Zusammenhang ist in Abbildung 11 dargestellt.

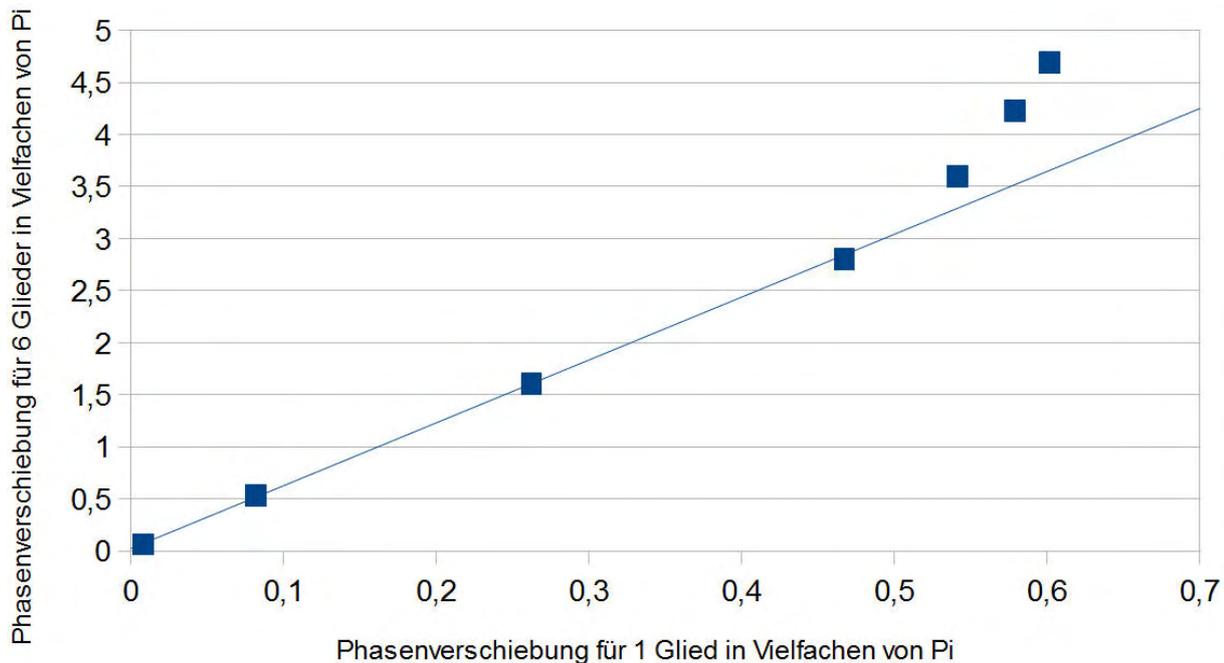


Abbildung 11: Zusammenhang der Phasenverschiebungen

Aus der Abbildung geht hervor, dass die Messwerte bei hohen Frequenzen (ab 600 kHz) für das einzelne π -Glied zu klein sind, da diese zum einen gegen π streben sollten und zum anderen die Punkte über der Geraden durch die vorangehenden Punkte liegen. Diese Gerade hat eine Steigung von $6,03 \approx n$, womit die Werte in etwa der Theorie folgen.

Da die Grenzfrequenz nicht im Messbereich liegt, kann nur abgeschätzt werden, ob das π -Glied die entsprechende Phasenverschiebung aufweist. Allerdings weisen die späteren Messwerte darauf hin, dass dies nicht der Fall ist, sondern ein kleinerer Wert angenommen wird.

Diese Diskrepanzen könnten daran liegen, dass sich ein einzelnes π -Glied bei hohen Frequenzen anders als die Kette verhält und sein f_0 größer als deren in Versuch 3.2 bestimmtes ist.

Aus den aufgenommenen Frequenzen f , die sich aus den Lissajous-Figuren für die Phasenverschiebungen φ um ganzzahlige Vielfache von π bei der Drosselkette ergeben,

lässt sich ihre Grenzfrequenz f_0 berechnen:

$$\frac{\varphi}{n} = \beta = 2 \arcsin \left(\frac{f}{f_0} \right)$$

$$\Rightarrow f = f_0 \sin \left(\frac{\varphi}{2n} \right)$$

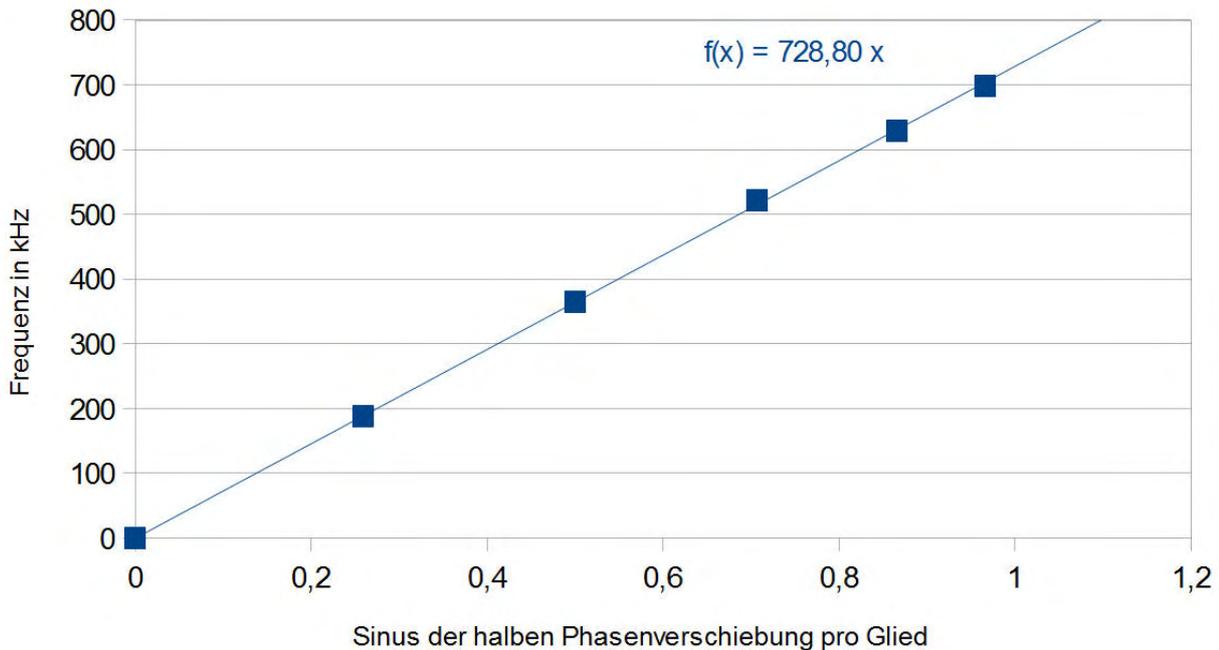


Abbildung 12: Lineare Regression für die Grenzfrequenz

Dieser lineare Zusammenhang ist in Abbildung 12 dargestellt. Die Grenzfrequenz ergibt sich als Steigung der Regressionsgeraden:

$$f_0 = 728,8 \text{ kHz}$$

Dieser Wert liegt circa 25,8 kHz über dem Wert aus Versuch 3.2, was einer recht geringen Abweichung von 3,7% entspricht.

3.5 Reflexion

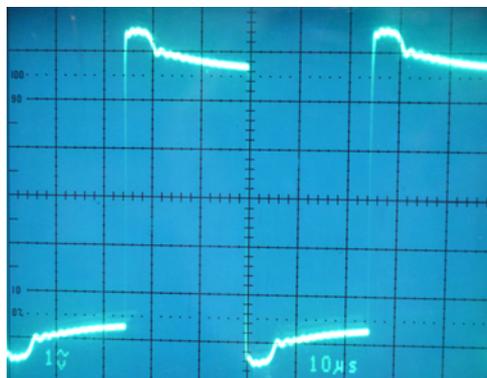


Abbildung 13: reflexionsbedingte Überlagerung

Nun wird – im Gegensatz zum Rest des Versuchs – Reflexion am Ende der Kette erzwungen, indem der Abschlusswiderstand auf 0 gesetzt wird, am Anfang hingegen mit

einem $220\ \Omega$ -Widerstand vermieden. Dabei kommt es zu einer Phasensprung von π , der destruktive Interferenz verursachen kann. Dabei ist allerdings die Verzögerung zu beachten, weshalb es zu einer Überlagerung von zwei verschobenen Rechteckspannungen kommen sollte. Auf Grund der Dämpfung hat die reflektierte Welle eine kleinere Amplitude, sodass sie die andere Welle nur abschwächt und nicht auslöscht.

Die resultierende Welle ist in Abbildung 13 dargestellt. Gut zu erkennen sind die Phasenverschiebung sowie die kleinere Amplitude der reflektierten Welle, da sich die resultierenden Impulse kurz nach ihrem Beginn abschwächen.

4 Versuch

4.1 charakteristischer Widerstand des Koaxialkabels

Analog zu Versuch 3.1 wird der charakteristische Widerstand des Koaxialkabels bestimmt. Der Wert des Abschlusswiderstands ergibt sich durch Messung mit einem Multimeter (Typ ELV 72812) zu:

$$Z_0 = 48,5\ \Omega$$

4.2 Verzögerungszeit pro Länge

Die Verzögerungszeit des Kabels wird bestimmt, indem man sowohl Eingangs- als auch Ausgangsspannung betrachtet und deren zeitlichen Unterschied misst. Teilt man diesen Wert durch die Länge des Kabels, so erhält man die Verzögerungszeit pro Länge τ' :

$$\tau' = \frac{\Delta t}{l} = \frac{52,46\ \text{ns}}{10,0\ \text{m}} = 5,246\ \frac{\text{ns}}{\text{m}}$$

4.3 Verzögerungszeitmessung durch Überlagerung

In diesem Versuch wird erneut die Verzögerungszeit τ' des Koaxialkabels bestimmt, nur diesmal durch Überlagerung von Generatorsignal und reflektiertem Signal am Kabeleingang. Wie in Versuch 3.5 wird Reflexion am Kabelende erzwungen. Damit kann aus dem Signal, das am Oszilloskop betrachtet werden kann, abgelesen werden, wann die Welle zurückgelaufen ist. Wegen des doppelten Laufweges ergibt sich als Verzögerungszeit:

$$\tau' = \frac{\Delta t}{2l} = \frac{108,5\ \text{ns}}{2 \cdot 10,0\ \text{m}} = 5,43\ \frac{\text{ns}}{\text{m}}$$

Das Ableseverfahren verdeutlicht Abbildung 14.



Abbildung 14: resultierende Welle in Versuch 4.3

4.4 Bestimmung der elektrischen Permittivität

Aus den nun bekannten Werten und Angaben zum Koaxialkabel kann auf drei unterschiedliche Weisen die elektrische Permittivität berechnet werden (mit $\mu_r = 1$):

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{C_l}{l 2\pi \varepsilon_0} \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) &&= 2,08 \\ \varepsilon_r &= \frac{(c \tau')^2}{\mu_r} &&= \begin{cases} 2,47 & \tau' \text{ aus Versuch 4.2} \\ 2,65 & \tau' \text{ aus Versuch 4.3} \end{cases} \\ \varepsilon_r &= \frac{c^2 \mu_0^2 \mu_r}{4\pi^2 Z_0^2} \left(\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)\right)^2 &&= 2,40\end{aligned}$$

Die ausgerechneten Werte liegen im typischen Bereich für ε_r , also sind die Werte plausibel. Dabei fällt auf, dass die Werte aus Messdaten deutlich näher beieinander liegen als der erste, der aus angegebenen Werten berechnet wurde. Daraus folgt, dass entweder die Angaben nicht zum Kabel passen oder die Messwerte einen systematischen Fehler aufweisen.

5 Quellen

Die Diagramme sind mit LibreOffice Calc erstellt,
die Bilder mit einer Nikon D5100.

Inhaltliche Quellen: siehe Vorbereitungen