

Vorbereitungshilfe Resonanz

(I) Das CASSY Meßsystem

Das CASSY¹-System stellt ein vollständiges Messsystem mit einer seriellen RS-232 (oder USB-) Schnittstelle dar. Die Steuerung erfolgt über den PC mit der CASSY-Lab-2 Software unter Windows XP. Eine detaillierte Beschreibung dieser Software ist im umfangreichen Handbuch zu finden (z.B.: www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/~simonis/praktikum/Manuals/CassyLab-2-Handbuch.pdf). Eine Kurzfassung des Handbuchs wird in der Literaturliste zur Verfügung gestellt. In dieser Vorbereitungshilfe werden nur die grundlegenden und für den Versuch wichtigen Optionen kurz skizziert.

Das CASSY Grundmodul (Sensor-CASSY) stellt 2 Eingangskanäle zur Verfügung, die verschiedene Messgrößen erfassen können. Im Resonanzversuch mit dem Drehpendel wird an den Kanal A eine sogenannte BMW-Box angeschlossen die es erlaubt, die Lichtschrankenimpulse der Drehpendelbewegung als Wegstrecke zu erfassen. Mit Kanal B können gleichzeitig die Spannungssignale aus dem Winkelgeber erfasst werden, um die Bewegung des anregenden Motors aufzuzeichnen.



Abbildung 1: CASSY-Setup

Nach dem Start der „CASSY-Lab-2“-Software (Doppelklick auf das Desktop-Symbol), erscheint das in Abbildung 1 gezeigte Dialogfenster. Es zeigt, dass die Software die CASSY-Hardware gefunden hat inclusive der auf Kanal A aufgesteckten BMW-Box. In diesem Dialogfenster („CASSYs“) können die für die Messung relevanten Kanäle gewählt werden, wobei alle zugehörigen Einstellungen auch später im Unterfenster („Einstellungen“) des Hauptprogramms verwaltet werden. Hat man die Eingangsgrößen gewählt und die Messbereiche festgelegt, kann man dieses Fenster bedenkenlos schließen.

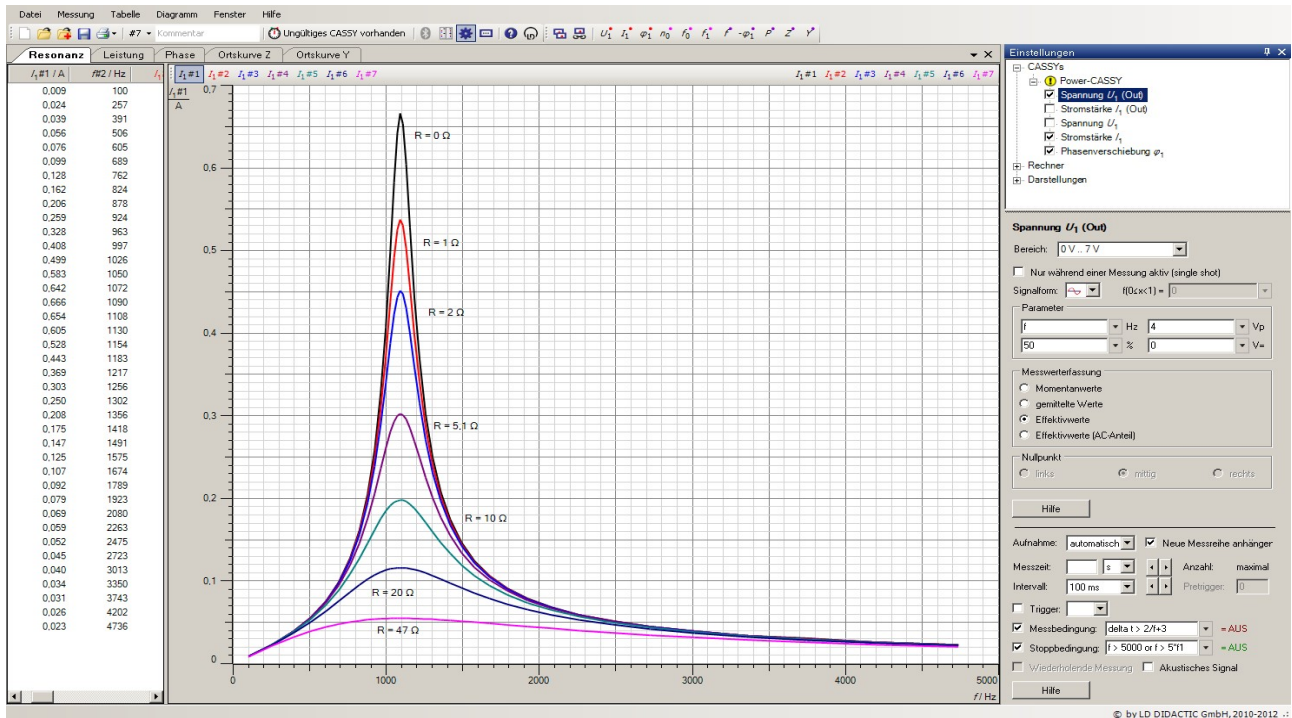



Abbildung 2: Die Cassy – Programm-Umgebung

Im Programmfenster (Abb. 2) kann man rechts unter „Einstellungen“ die Messgrößen und die Genauigkeit sowie den Messbereich vorgeben. Zusätzlich gibt es die für die Winkelmessung wichtige Option „->0<-“, mit deren Hilfe der Nullpunkt der Messung festgelegt wird. Dies sollte vor dem Beginn einer Messung unbedingt durchgeführt werden.

Nachdem die Eingänge konfiguriert sind, kann man den eigentlichen Messvorgang festlegen. Es können die Einstellungen zur Anzahl der Messpunkte sowie zum zeitlichen Abstand der Messpunkte gemacht werden. Üblicherweise wird in diesem Versuch die Einstellung „*automatische Aufnahme*“ gewählt. Ebenfalls sollte man Messreihen nicht hintereinander hängen.

Die Icons in der Werkzeugleiste sind in der CASSY-Anleitung dokumentiert. Das folgende:  ist besonders wichtig: „Messung starten“

 Dieses Icon ermöglicht das Ein- und Ausblenden des Einstellungsfensters. Das Einstellungsfenster hat drei Unterpunkte: „CASSYs“, „Rechner“ und „Darstellung“. Unter „CASSYs“ werden, wie schon beschrieben, die Einstellungen für Hardwareanschlüsse sowie die Messparameter zusammengefasst. Unter „Rechner“ können eigene Parameter und Formeln definiert werden. Ein weiterer wichtiger Unterpunkt ist hier die Definition von zeitlichen Ableitungen (achten Sie darauf, von welcher Größe die Ableitung gebildet wird!). Unter dem dritten Punkt „Darstellungen“ können verschiedene Darstellungen für die Messdaten definiert werden. Mit dem Unterpunkt „Kurven“ können einer definierten Darstellung weitere Kurven hinzugefügt werden.

Beispiel: Die über Eingang A gemessene Wegstrecke s_{A1} muss in einen Winkel (im Bogenmaß!) umgerechnet werden. Dazu definieren Sie in Einstellungen -> Rechner -> Formel eine neue Größe (Winkel = $s_{A1}/0,0919$) (Messgröße/Radius des Pohl'schen Rads in m). Damit Sie Ihre selbstdefinierten Größen auch in den Darstellungen wiederfinden, müssen Sie noch die Felder „Symbol“ und „Einheit“ für die neue Messgröße definieren.

Jede definierte Größe kann als Funktion der Zeit aufgetragen werden. Es können auch Paare von Größen in zweidimensionalen Darstellungen gegeneinander dargestellt werden. Nutzt man diese Optionen, so kann man recht leicht das „Phasenraumdiagramm“ einer Bewegung erzeugen. Man wählt dann für die x-Achse den Winkel und für die y-Achse die Winkelgeschwindigkeit als darzustellende Größen aus. Sie müssen überhaupt alle Größen, die Sie darstellen wollen erst einmal definieren. Sie finden dann in dem CASSY-Lab-Fenster neben dem Standarddiagramm alle Darstellungen anwählbar.

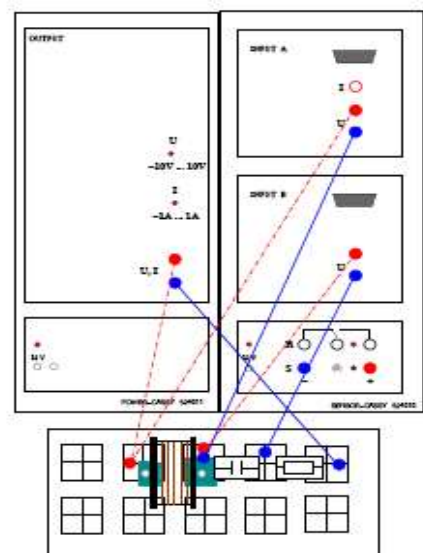
Mit der Option „FFT“ unter Einstellungen -> Rechner erhält man die Fourier-Transformierte einer Weg-Zeit-Funktion; dies ist gerade bei Schwingungsvorgängen eine vorteilhafte Art der Visualisierung – statt Weg gegen Zeit werden nun Amplituden gegen die jeweilige Frequenz aufgetragen. Insbesondere der Einschwingvorgang einer erzwungenen Schwingung zeigt sich so in einem neuen Licht.

Ein wichtiger Tipp zur Visualisierung der Daten: mit einem „Rechtsklick“ auf den Achsenbereich kann man die Skalierung von X bzw. Y leicht anpassen. Ein „Rechtsklick“ ins Diagrammfenster liefert nützliche Analysewerkzeuge.

Versuchsaufbau Serienschwingkreis

Einem elektrischen RLC-Serienschwingkreis wird eine Sinusschwingung der Frequenz f mit konstanter Amplitude aufgeprägt. Dabei stellt sich nach einer kurzen Einschwingzeit im Schwingkreis ebenfalls eine Schwingung der Frequenz f ein. Untersucht wird der Effektivwert des fließenden Stroms I und die Phasenlage ψ des Stroms zur aufgeprägten Spannung in Abhängigkeit von der Frequenz f und dem ohmschen Dämpfungswiderstand R .

Eine Spule (35 mH), ein Kondensator (0,32 μ F) und ein Ohmscher Widerstand (8,2 Ω ; 47 Ω oder 100 Ω) werden in Serie geschaltet und an eine Wechselspannung gelegt. Als Spannungsquelle dient das Power-CASSY Interface, das sowohl die anliegende Wechselspannung, als auch den Gesamtstrom im Kreis und die Phasenlage angibt. Der Spannungsabfall an der Spule wird über den Eingang A



und der Spannungsabfall am Kondensator über den Eingang B des Sensor-CASSY gemessen. Dazu muss natürlich die BMW-Box vom Eingang A des Sensor-CASSY entfernt werden.

Konfigurieren der Hardware: Zunächst müssen die beiden Spannungseingänge des Sensor-CASSY auf „Effektivwerte“ gestellt werden.

Das Power-CASSY ist ein Funktionsgenerator und kann verschiedenartige Wechselspannungen mit bis zu ± 10 V Amplitude und mit variablen Frequenzen liefern. Im Dialogfenster „Power-CASSY“ wird zuerst die Messwerterfassung auf „Effektivwerte“ und der Stellbereich auf 0-7 V gestellt. Wählen Sie eine sinusförmige Wechselspannung $V_p = 3$ V.

Dann muß die Funktion „f2“ als erster Frequenzparameter eingetragen werden, die für die automatische Anpassung der Frequenzwerte benötigt wird. Außerdem müssen noch die grün unterlegten Größen Strom und Phase (I_2 und Φ_2) per Häkchen angewählt werden.

Unter „Rechner“ muss f2 dann definiert werden. Eine einfach Formel wäre $f2 = f0 + (n - 1) \cdot 20$ mit $f0$ als Startfrequenz. Diese würde bewirken, daß die vom Power-CASSY erzeugte Frequenz sukzessive ab der Startfrequenz $f0$ in 20-Hz-Schritten bis zum maximal vorgegebenen Frequenzwert erhöht würde. Für eine genaue Vermessung der Kurve im Bereich der Resonanz wäre das jedoch zu grob. Eine feinere Schrittweite würde aber eine lange Messzeit bedeuten. Daher hat Leybold eine Funktion zur schrittweisen Erhöhung der Frequenz vorgeschlagen, die in Resonanznähe die Schrittweite verdichtet. Dazu müssen folgende Größen neu definiert werden:

1) die Parameter (als Symbol):

Anzahl der Messwerte: $n0 = 25$

Frequenz: $f0 = 10$ Hz (Startfrequenz)

Frequenz: $f1 = f_{res}$ (erwartete Resonanzfrequenz, muss im Vorfeld aus L und C berechnet werden)

2) die Formel:

Symbol: f2

Frequenz f2

$f0 + (t < 0 \text{ and } n < 1) \cdot (f1 - f0) \cdot (1 + \text{sgn}(\text{last } n - n0) \cdot (10^{(\text{abs}(\text{last } n - n0)/n0) - 1})/9)$

Einheit : Hz von : 0 Hz bis : 5000 Hz

Dezimalstellen : 0

Zusätzlich muss eine Messbedingung eingeführt werden, die eine Messwertaufnahme bis 3 kHz (oder der 5-fachen Resonanzfrequenz) begrenzt, und den nächsten Messpunkt frühestens nach $2/f2 + 2$ s nach einer Frequenzerhöhung (Einschwingzeit) aufnimmt:

$f2 < 5 \cdot f1$ and $f2 < 3000$ and $\text{delta } t > 2/f2 + 2$

Achtung: Es werden nur dann Effektivwerte von den Messgeräten gemessen, wenn die Intervallzeit auf 100 ms gesetzt wird!

Durch die Wahl der Frequenz f2 im Power-CASSY wird automatisch die Schrittweite angepasst gemäß den Vorgaben für die Anzahl $n0$, die Startfrequenz $f0$ und die ungefähre Resonanzfrequenz $f1$. Um $f2 = f_{res}$ herum werden die Werte besonders dicht gesetzt.

Es empfiehlt sich, wegen der Übersichtlichkeit unter „Darstellungen“ geeignete Diagramme zu definieren z.B. „Resonanzkurve“ I_2 , „Impedanz“ Z gegen $f2$, oder „Resonanzüberhöhung“ $UA1, UB1, U2$ gegen $f2$, etc..

(II) Theoretische Grundlagen

Bewegungsgleichung eines gedämpften harmonischen Oszillators:

Die Bewegungsgleichung für gedämpfte harmonische Drehschwingungen ergibt sich aus der Summe aller wirkenden Drehmomente: zurücktreibendes Moment der Schneckenfeder $-D^* \varphi$, bremsendes Moment der Wirbelstrombremse und sonstiger Reibung $-\gamma \cdot d\varphi/dt$ und das Reaktionsmoment $\Theta \cdot d^2\varphi/dt^2$:

$$\Theta \cdot \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} = -D^* \varphi(t) - \gamma \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

bzw.

$$\frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} + 2\beta \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt} + \omega_0^2 \cdot \varphi(t) = 0$$

mit

$$\omega_0^2 = \frac{D^*}{\Theta} \quad \text{Eigenfrequenz des ungedämpften Oszillators; } \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad \text{mit } T = \text{Periodendauer}$$

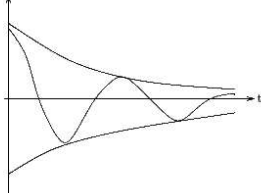
$$\beta = \frac{\gamma}{2\Theta} \quad \square \quad \text{Dämpfungskonstante.}$$

Mit dem Ansatz $\varphi(t) = c \cdot e^{-\lambda t}$ erhält man als Lösungen: $\lambda_{1/2} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$. Man unterscheidet drei Fälle:

a) *Schwingfall* (schwache Dämpfung): $\beta < \omega_0 \rightarrow$ exponentiell abklingende Schwingung:

$$\varphi(t) = e^{-\beta t} (c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t})$$

Auslenkung z



Die Integrationskonstanten c_1 und c_2 der allgemeinen Lösung werden durch die Anfangsbedingungen, z.B. $\varphi(t=0) = A$ und $d\varphi/dt = 0$, festgelegt.

$$\varphi(t) = A \cdot e^{-\beta t} \cos(\omega t + \psi)$$

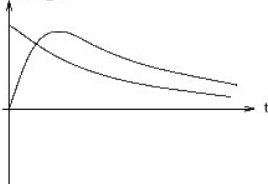
mit der Frequenz: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.

Die Eigenfrequenz des Systems wird durch die Dämpfung herabgesetzt und die Amplitude nimmt exponentiell mit der Zeit ab. Aus dem Logarithmus des Dämpfungsverhältnisses $\Lambda = \ln k = \ln \frac{\varphi(t)}{\varphi(t+T)} = \beta T$

kann die Dämpfungskonstante ermittelt werden. Der Kehrwert der Dämpfungskonstante $\tau = 1/\beta$ ist die *Relaxationszeit*, innerhalb der die Amplitude A auf den Wert A/e abnimmt.

b) *Kriechfall*: $\beta > \omega_0 \rightarrow$ langsames Abklingen:

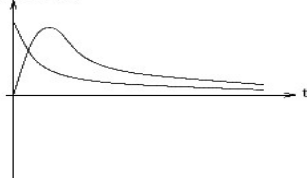
Auslenkung z



$$\begin{aligned} \varphi(t) &= A \cdot e^{-\beta t} (c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}); \quad \omega = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \\ &= A \cdot e^{-\beta t} \cosh(\omega t) \end{aligned}$$

c) *Aperiodischer Grenzfall*: $\beta = \omega_0 \rightarrow$ optimale Dämpfung: (schnellste Rückkehr in Ruhelage)

Auslenkung z



$$\varphi(t) = A \cdot (1 + Bt) \cdot e^{-\beta t}$$

Erzwungene Schwingungen:

Bewegungsgleichung bei einem von außen angreifenden, periodischen Drehmoment $M_0 \cdot \cos \Omega t$:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2\beta \frac{d\varphi}{dt} + \omega_0^2 \varphi = k \cos \Omega t$$

mit $k = M_0 / \Theta$

Es handelt sich um eine inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung deren allgemeine Lösung gegeben ist als die Summe der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung.

$$\varphi(t) = A_f \cdot e^{-\beta t} \cos(\omega t + \psi_f) + A_s \cdot \cos(\Omega t + \psi_s)$$

Nach einer Einschwingzeit, die durch das Ausdämpfen der freien Schwingung bestimmt ist, stellt sich als stationärer Zustand (für $\beta < \omega_0$) eine periodische Schwingung mit der Kreisfrequenz Ω der von außen wirkenden Kraft Ω ein:

$$\varphi(t) = A \cdot \cos(\Omega t + \psi)$$

Für die Amplitude A und die Phasenverschiebung ψ (relativ zur periodischen Anregungskraft) der Schwingung gilt:

$$A = \frac{k}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\beta\Omega)^2}}$$

$$\psi = \tan^{-1}\left(-\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)$$

Man erkennt, dass

- 1) die erzwungene Schwingung die gleiche Frequenz wie das äußere Drehmoment und eine zeitlich konstante Amplitude hat. Äußeres Drehmoment und Auslenkwinkel sind jedoch um ψ gegeneinander phasenverschoben.
- 2) sowohl A als auch ψ von der Erregerfrequenz abhängig sind. Für ψ gilt immer $\psi \leq 0$, d.h. der Auslenkungswinkel $\varphi(t)$ hängt dem erregenden Drehmoment $M(t)$ hinterher.

Einige Spezialfälle:

- | | | |
|--------------------------|-----------------|----------------------------------|
| a) $\Omega \ll \omega_0$ | $\psi = 0$ | Bewegung ist in Phase mit $M(t)$ |
| b) $\Omega = \omega_0$ | $\psi = -\pi/2$ | Resonanz |
| c) $\Omega \gg \omega_0$ | $\psi = -\pi$ | Bewegung erfolgt $M(t)$ entgegen |

Für die Amplituden φ gilt, wenn

- | | |
|--------------------------|--|
| a) $\Omega = 0$ | $A = \frac{k}{\omega_0^2} = \frac{M_0}{D^*}$ □ |
| b) $\Omega = \omega_0$ | je kleiner β , desto größer ist A. |
| c) $\Omega \gg \omega_0$ | die Amplitude A nimmt mit $1/\omega^2$ ab. |

Die maximale Amplitude tritt nicht exakt bei $\Omega_{res} = \omega_0$ auf, sondern bei $\Omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ □ d.h. die Resonanz verschiebt sich infolge der Dämpfung zu kleineren Ω -Werten hin. (Überlegen Sie sich anhand der obigen Grenzfälle die Form der Kurven A und ψ in Abhängigkeit von Ω und der Dämpfungskonstanten β .)

Die Energie in einem schwingenden System pendelt immer zwischen kinetischer und potentieller Energie hin und her und nimmt aufgrund der Dämpfung ab. Das Verhältnis $Q = \frac{2\pi \cdot \text{Schwingungsenergie}}{\text{Energieverlust pro Periode}} = \frac{\omega_0}{2\beta}$ heißt

Gütefaktor. Es stellt eine nützliche Größe zur Beschreibung der Eigenschaften eines schwingenden Systems dar. Als Maß für die Breite wird häufig die Bandbreite $\Delta\omega$ verwendet. Sie wird bei den Frequenzen mit der

Amplitude $\frac{A_{res}}{\sqrt{2}}$ abgegriffen und beträgt: $\Delta\omega \approx 2\beta = \frac{\omega_0}{Q}$

Serienschwingkreis von L, R und C

Bei einem Serienschwingkreis, bestehend aus einer Spule der Induktivität L , einem Kondensator der Kapazität C und einem ohmschen Widerstand R (Abb.4), führt eine angelegte Wechselspannung $U(t)$ zu einem meist phasenverschobenen Strom $I(t)$, der in allen Komponenten des Schwingkreises den gleichen Momentanwert besitzt. Aus diesem Strom errechnet man mit den speziellen Wechselstromwiderständen die Spannungsabfälle an diesen Komponenten. Mit Hilfe der Kirchhoffschen Maschenregel folgt dann daraus die Schwingungsgleichung des Schwingkreises:

$$\begin{aligned} U(t) &= U_L(t) + U_R(t) + U_C(t) \\ &= L \frac{dI(t)}{dt} + R \cdot I(t) + \frac{\int I(t) dt}{C} \end{aligned}$$

Differentiation nach der Zeit und Division durch L führt zu der bekannten Form der Differentialgleichung 2. Ordnung einer gedämpften erzwungenen Schwingung:

$$\frac{d^2 I(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{LC} I(t) = \frac{1}{L} \cdot \frac{dU(t)}{dt}$$

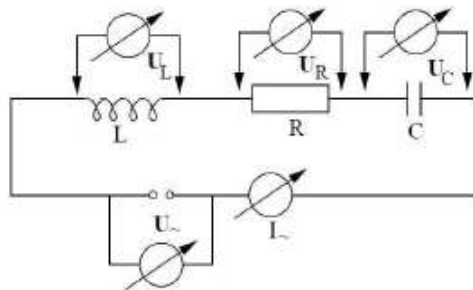


Abbildung 4: Serienschwingkreis

Diese Gleichung löst man ganz analog zur Bewegungsgleichung mechanischer Schwingungen. Die allgemeine Lösung ist eine Superposition der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung

$$I(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \cos(\omega t + \psi) \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung. Auch hier beschreibt die Lösung der homogenen Gleichung einen Vorgang mit zeitlich abnehmender Amplitude, so dass nach einer gewissen Einschwingzeit nur noch die spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung $I(t) = I_0 e^{i\omega t + \psi}$ die Bewegung beschreibt. Es ergibt sich für die Phasenverschiebung:

$$\tan \psi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

und für die Amplitude:

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U_0}{Z}$$

Z ist die Impedanz des Kreises. Amplitude und Phasenverschiebung sind von der Frequenz der erregenden Spannung abhängig. Im Resonanzfall ($\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$) wird Z minimal, I_0 maximal und die Phasenverschiebung wird 0.

Für die Spannungsamplituden an den Kreiskomponenten gilt im Resonanzfall:

$$|U_L(\omega_0)| = \left| L \cdot \frac{dI}{dt} \right| = \omega_0 \cdot \frac{L}{R} \cdot U_0 = QU_0$$

$$|U_C(\omega_0)| = \left| \frac{1}{C} \int Idt \right| = \frac{1}{\omega_0 C} \cdot \frac{1}{R} \cdot U_0 = QU_0$$

Da der Gütefaktor $Q = \frac{\pi}{\Lambda} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ deutlich größer werden kann als 1, können U_L und U_C deutlich U_0 übersteigen. Man spricht von Spannungsüberhöhung im Resonanzfall. Wie im Fall der mechanischen Schwingungen beeinflusst die Höhe der Dämpfung $\frac{R}{2L}$ die Breite der Resonanz. Die Breite wird als Frequenzdifferenz an den Stellen der Amplitude $\frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$ bestimmt. Die relative Breite bezeichnet man auch als Verlustfaktor des Schwingkreises:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{R}{\omega_0 L} = R \cdot \omega_0 C = R \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{Q}$$

Je geringer die Dämpfung ist, umso größer ist die Güte des Schwingkreises und desto schmaler die Resonanzkurve.

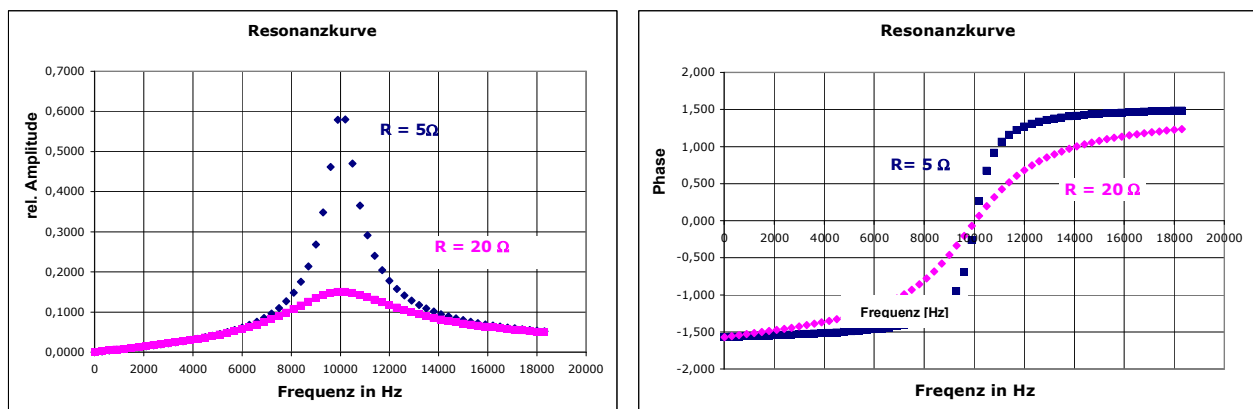


Abbildung 5: Resonanzkurve eines Serienschwingkreis mit $L = 4,5 \text{ mH}$ und $C = 2,2 \mu\text{F}$