



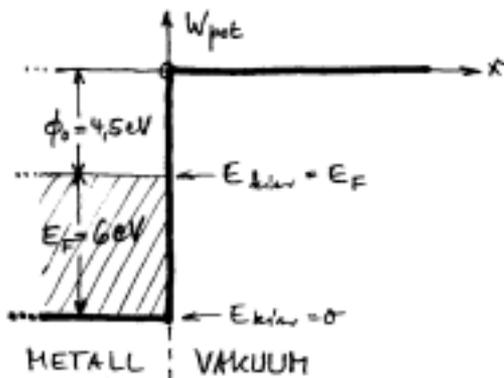
Versuch P2-62: Vorbereitungshilfe zu Glüh- und Feldemission

Raum F1-29

Vereinfachte und zusammenfassende Darstellung einiger Lehrbuchabschnitte, die für den Versuch von Interesse sind. Eine eingehendere Befassung mit der Theorie wird von den Praktikanten nicht verlangt.

**Austrittsarbeit:** Im Metall gibt es außer den jeweils fest an 'ihr' Atom gebundenen Elektronen auch solche, die dem Metallverband als ganzem angehören und *freie* oder *Leitungselektronen* genannt werden. Ganz frei sind sie jedoch nicht. Abgesehen von den unvermeidlichen Gitterfehlern und von den Gitterschwingungen aufgrund der Temperatur, welche die Elektronenbewegung durch das Metall behindern und für den elektrischen Widerstand verantwortlich sind, ist im Zusammenhang mit Glühemission und Feldemission die Kraft, welche die Elektronen am Verlassen des Metallverbandes hindert, besonders wichtig.

Bezüglich des kräftefreien Außenraumes, in dem einem Elektron die potentielle Energie  $W_{pot} = 0$  eV zugeschrieben wird, hat es im Metall eine negative potentielle Energie. Die kinetischen Energien der Leitungselektronen erstrecken sich über einen gewissen Bereich (schraffiert in Figur 1), bei der Temperatur  $0^\circ\text{K}$  von Null bis zu einer definierten Grenzenergie, der sogenannten *Fermienergie*  $E_F$ . Anders als etwa beim Gas ist der Energieinhalt der Leitungselektronen bei  $T = 0^\circ\text{K}$  nicht Null. Die Energie, die bei  $T = 0^\circ\text{K}$  den energiereichsten Elektronen noch fehlt, um das Metall zu verlassen, heißt *Austrittsarbeit*  $\phi_0$ . Man sagt, die Elektronen befinden sich in einem  $E_F + \phi_0$  tiefen 'Potentialtopf' und füllen ihn bei  $T = 0^\circ\text{K}$  vom Boden bis zur Höhe  $E_F$ . Bei höheren Temperaturen,  $T > 0^\circ\text{K}$ , bleiben unterhalb  $E_F$  einige 'Zustände' unbesetzt, und dafür sind oberhalb einige mit Elektronen besetzt. Figur 2 erläutert das nochmals.



Figur 2 Energiedichte im Potentialtopf

Figur 1 Energieverteilung im Potentialtopf (schematisch)

$f(E) \cdot \Delta E$  ist die Anzahl der Elektronen in einem  $\Delta E$  breiten Energiebereich bei der Energie  $E$ . Je höher  $T$  ist, desto höhere Energie  $E$  erreichen einige Elektronen. Erreicht oder überschreitet die Energie die Potentialtopftiefe und ist die Richtung der Geschwindigkeit auf die Oberfläche hin gerichtet, so können solche Elektronen aus der Metalloberfläche austreten. Man nennt das *Glühemission*.

**Richardson-Formel:** Die Fermi-Dirac-Statistik liefert als Anzahl der Elektronen in den Geschwindigkeitsintervallen  $dv_x, dv_y, dv_z$  um  $v_x, v_y, v_z$

$$dN = \frac{2 \cdot V \cdot m^3}{h^3} \cdot \frac{dv_x \cdot dv_y \cdot dv_z}{\exp\left\{\frac{(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \cdot m/2 - E_F}{k \cdot T} + 1\right\}}$$

oder näherungsweise für  $E - E_F > k \cdot T$

$$dN \approx \frac{2 \cdot V \cdot m^3}{h^3} \cdot \exp\left\{\frac{E_F - (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \cdot m/2}{k \cdot T}\right\} \cdot dv_x \cdot dv_y \cdot dv_z$$

Sei die  $x$ -Richtung die Flächennormale und  $v_x \geq (2(E_F + \phi)/m)^{1/2}$ , dann verlässt von diesen  $dN$  Elektronen der Anteil  $dN \cdot v_x \cdot \Delta t \cdot \Delta A / V$  in der Zeit  $\Delta t$  durch die Oberfläche  $\Delta A$  das Metall. Die Gesamtzahl der emittierten Elektronen pro  $\Delta t$  und  $\Delta A$  ist dann

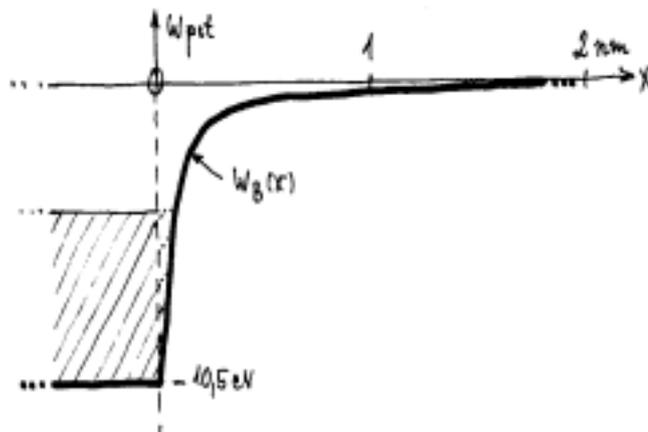
$$N(\Delta A, \Delta t) = \int_{v_z = \sqrt{\frac{2(E_F + \Phi)}{m}}}^{\infty} \int_{v_y = -\infty}^{\infty} \int_{v_x = -\infty}^{\infty} \frac{v_x \cdot \Delta t \cdot \Delta A}{v} dN$$

$$= \frac{2 \cdot \Delta t \cdot \Delta A \cdot m^3}{h^3} \cdot e^{-\Phi/kT} \cdot \frac{kT}{m} \cdot \sqrt{\frac{2\pi kT}{m}} \cdot \sqrt{\frac{2\pi kT}{m}}$$

Daraus folgt die emittierte Stromdichte:

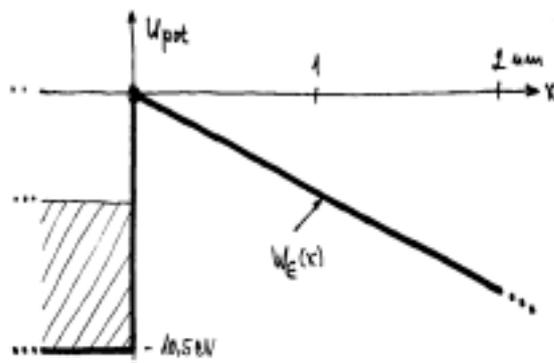
$$j = \frac{N(\Delta A, \Delta t) \cdot e}{\Delta A \cdot \Delta t} = \frac{4\pi e m k^2}{h^3} \cdot T^2 \cdot e^{-\Phi/kT}$$

**Bildkraft:** In Wahrheit ist der in Figur 1 an der Metalloberfläche eingezeichnete Sprung der potentiellen Energie von  $-(E_F + \phi)$  nach 0 nicht so steil, denn auch außerhalb des Metalls wirkt auf das Elektron noch eine rücktreibende Kraft, die sogenannte *Bildkraft*. Das Elektron influenziert auf der Oberfläche Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens, an denen die von seiner Ladung ausgehenden Feldlinien enden. Das Feldlinienbild sieht im Vakuum genau so aus, als gäbe es die influenzierten Ladungen nicht und stattdessen eine Spiegelladung  $e^+$  im Metall, also im Abstand  $2x$  von  $e^-$ . Die zugehörige potentielle Energie ist  $W_B(x) = -e^2/16\pi\epsilon_0 x$ . In atomaren Abständen von der Oberfläche gilt diese Beziehung nicht mehr. Dort muss für  $x$  gegen 0 gelten  $W_B(x) \rightarrow -(E_F + \phi)$ .

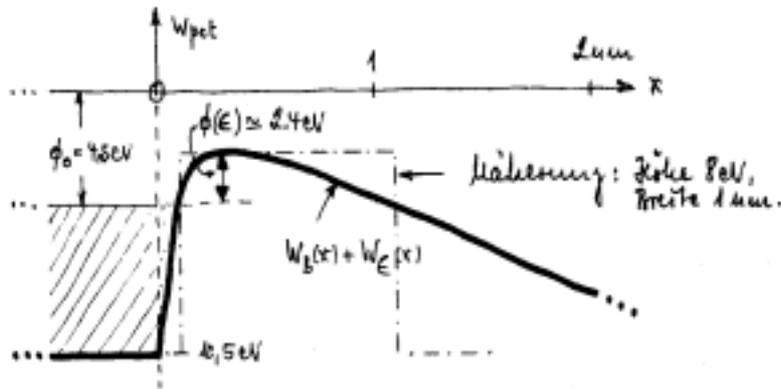


**Figur 3**

**Schottky-Effekt:** Gäbe es die Bildkraft nicht, so wäre der Effekt eines homogenen (nur der Einfachheit wegen) elektrischen Feldes  $E$  an der Metalloberfläche so, wie in Figur 4 gezeigt, nämlich die potentielle Energie  $W_E(x) = -eEx$ . Die Austrittsarbeit wäre die gleiche geblieben. Superponiert man aber beide Effekte, ergibt sich der in Figur 5 wiedergegebene Verlauf von  $W_{pot}(x) = -e^2/16\pi\epsilon_0 x - eEx$ . Man sieht, dass die Austrittsarbeit  $\phi(E)$  kleiner ist als  $\phi_0$  ohne Feld.



**Figur 4** ( $E = 4 \cdot 10^9$  V/m)



**Figur 5**

**Schottky-Formel:**  $dW_{pot}/dx = 0$  liefert den Ort des Extremums,  $x = (e/(16\pi\epsilon_0 E))^{1/2}$ , und dort die Erniedrigung der Austrittsarbeit bzw. die effektive Austrittsarbeit,

$$W_{pot}(Extremum) = -\frac{e}{2} \cdot \sqrt{\frac{eE}{\pi\epsilon_0}}, \quad \Phi(E) = \Phi_0 - \frac{e}{2} \cdot \sqrt{\frac{eE}{\pi\epsilon_0}}$$

**Beispiel 1:** Zylindersymmetrisches Problem,  $r_i = 6,5 \cdot 10^{-5} \text{m}$ ,  $r_a = 8,75 \cdot 10^{-4} \text{m}$ ,  $U = 100 \text{V}$ ,  
 $E(r_i) = 100 \text{V} / (6,5 \cdot 10^{-5} \text{m} \cdot \ln(8,75 \cdot 10^{-4} \text{m} / 6,5 \cdot 10^{-5} \text{m})) \cong 6 \cdot 10^5 \text{V/m}$ ;  $\Phi_0 - \Phi(E) \cong 0,03 \text{eV}$ .

**Beispiel 2:** Rotationsparaboloid mit Krümmungsradius  $r_0 = 2 \cdot 10^{-7} \text{m}$  im Scheitel, Anodenabstand  $d = 5 \text{cm}$ ,  
 $U = 5 \text{kV}$ ,  $E(r_0) \cong 2,5 \cdot 10^3 \text{V} / [2 \cdot 10^{-7} \text{m} \cdot \ln(5 \cdot 10^{-2} \text{m} / 2 \cdot 10^{-7} \text{m})] \cong 4 \cdot 10^9 \text{V/m}$ ;  $\Phi_0 - \Phi(E) \cong 2,4 \text{eV}$ .

Auch bei einer um 2,4eV von 4,5eV auf 2,1eV reduzierten Austrittsarbeit wäre bei kalter Kathode (300°K) die Anzahl der emittierten Elektronen noch verschwindend gering, wenn der Potentialberg zu 'über'-winden wäre. Die Richardson-Formel ergibt  $j \cong 6 \cdot 10^{-29} \text{A/m}^2$  bei einer emittierenden Fläche von etwa  $2 \cdot 10^{-13} \text{m}^2$  einen Strom von  $I \cong 10^{-41} \text{A}$ .

**Tunneleffekt:** Das Teilchen Elektron zeigt aber auch Welleneigenschaften. Seine deBroglie-Wellenlänge ist  $\lambda = h/mv$ . Eine Welle wird an der Wand des Potentialtopfes nicht total reflektiert, sondern dringt - wenn auch mit exponentiell abklingender Amplitude - in das 'verbotene' Gebiet ein. Ist der Weg durch dieses Gebiet kurz genug, d.h. der Potentialberg nicht zu breit, und/oder das exponentielle Abklingen nicht zu rapide, d.h. der Potentialberg nicht zu hoch, dann hat das Elektron eine endliche Chance, 'den Berg zu durchtunneln'. Die quantenmechanische Rechnung ergibt für einen Potentialberg mit Rechteckprofil der Höhe  $W$  und der Breite  $a$  und für ein Teilchen der Energie  $E$  eine Durchdringungswahrscheinlichkeit

$$D = \left\{ 1 + \frac{W^2}{4E(W-E) \cdot \sinh^2 \left[ a \cdot \sqrt{8\pi^2 m(W-E)/h^2} \right]} \right\}^{-1}$$

Nähert man den in Figur 5 dargestellten Potentialberg durch ein Rechteck mit  $W = 8 \text{eV}$  und  $a = 10^{-9} \text{m}$  an und rechnet mit der Elektronenenergie  $E = E_F = 6 \text{eV}$ , so ergibt sich  $D \approx 1,5 \cdot 10^{-6}$ . Man wird also aufgrund des Tunneleffekts mit einem beträchtlichen Feldemissionsstrom rechnen können.

**Fowler-Nordheim-Beziehung:** Eine Rechnung, welche die wahre Form des Potentialberges und die Energieverteilung aller Elektronen berücksichtigt, liefert die *Fowler-Nordheim-Beziehung* für die Feldemissionsstromdichte  $j$  in Abhängigkeit von der Oberflächenfeldstärke  $E$

$$j = A \cdot E^2 \cdot e^{-B/E}$$

Die erreichbaren Stromdichten sind sehr hoch. Das Demonstrations-Feldelektronenmikroskop beim Praktikumsversuch liefert etwa  $1\text{A/mm}^2$  ( $2 \cdot 10^{-7}\text{A}$  von etwa  $2 \cdot 10^{-13}\text{m}^2$  Fläche). Zum Vergleich damit beträgt die Stromdichte der K81A-Glühkathode bei  $T=2500^\circ\text{K}$  etwa  $0,005\text{ A/mm}^2$  ( $20\text{mA}$  von etwa  $4\text{mm}^2$  Kathodenfläche). Die hohe Feldemissionsstromdichte hat Raumladungseffekte zur Folge, die Abweichungen von der Fowler-Nordheim-Beziehung bewirken. Lokale Feldstärkeüberhöhungen aufgrund imperfekter Oberflächen sowie die Paraboloid-Näherung für die Kathodenform führen ebenfalls zu Differenzen mit theoretischen Werten für die Parameter A und B.

**Langmuir-Schottkysches Raumladungsgesetz:** Negative Ladungen im Raum zwischen Kathode und Anode einer Vakuumdiode modifizieren die Feldverteilung gegenüber dem Vakuumfall. Feldlinien enden statt an der Kathode an solchen Ladungen. In Kathodennähe ist die Feldstärke reduziert.

Quantitativ lässt sich das Problem leicht behandeln, wenn einerseits eine ebene Geometrie (planparallele Kathode und Anode, Fläche A, Abstand d) und Abhängigkeit aller Variablen nur von x (Flächennormale von Kathode und Anode) sowie andererseits  $E_{\text{kin}} = 0$  für die an der Kathode startenden Elektronen angenommen wird.

Die Poissonsche Potentialgleichung liefert dann  $d^2\varphi/dx^2 = -\rho(x)/\epsilon_0$  ( $\varphi$  = elektr. Potential,  $\rho$  = Ladungsdichte bei x).

Wegen  $\varphi(x) = \varphi_{\text{Kathode}} + U(x)$  gilt auch  $d^2U/dx^2 = -\rho(x)/\epsilon_0$ .

Wegen  $\rho(x) \cdot A \cdot v(x) (\equiv dq/dt) = j \cdot A$  folgt  $d^2U/dx^2 = -j/\epsilon_0 v(x)$ , wobei die Stromdichte von x unabhängig ist (Kontinuität des Stromes).

Wegen  $m \cdot v^2(x)/2 = e \cdot U(x)$  folgt  $d^2U/dx^2 = -j/\epsilon_0 \cdot [m/(2eU(x))]^{1/2} = \kappa / U^{1/2}(x)$ .

Erweitern mit  $2 \cdot dU/dx$  und Integration von 0 bis x bzw. von 0 bis U(x) liefert  $dU/dx = 2 \kappa^{1/2} U^{1/4}$ .

Abermals integriert folgt

$$\int_0^U \frac{1}{\sqrt{U} dU} = 2\sqrt{\kappa} \cdot \int_0^d dx; \quad \kappa = \frac{16}{9} \frac{U_a^{3/2}}{4d^2}; \quad |j| = \epsilon_0 \cdot \sqrt{\frac{2e}{m}} \cdot \frac{4}{9} d^2 \cdot U_a^{3/2}$$