

Moderne Experimentalphysik III: Kerne und Teilchen (Physik VI)

Günter Quast, Roger Wolf, Pablo Goldenzweig
18. Mai 2017

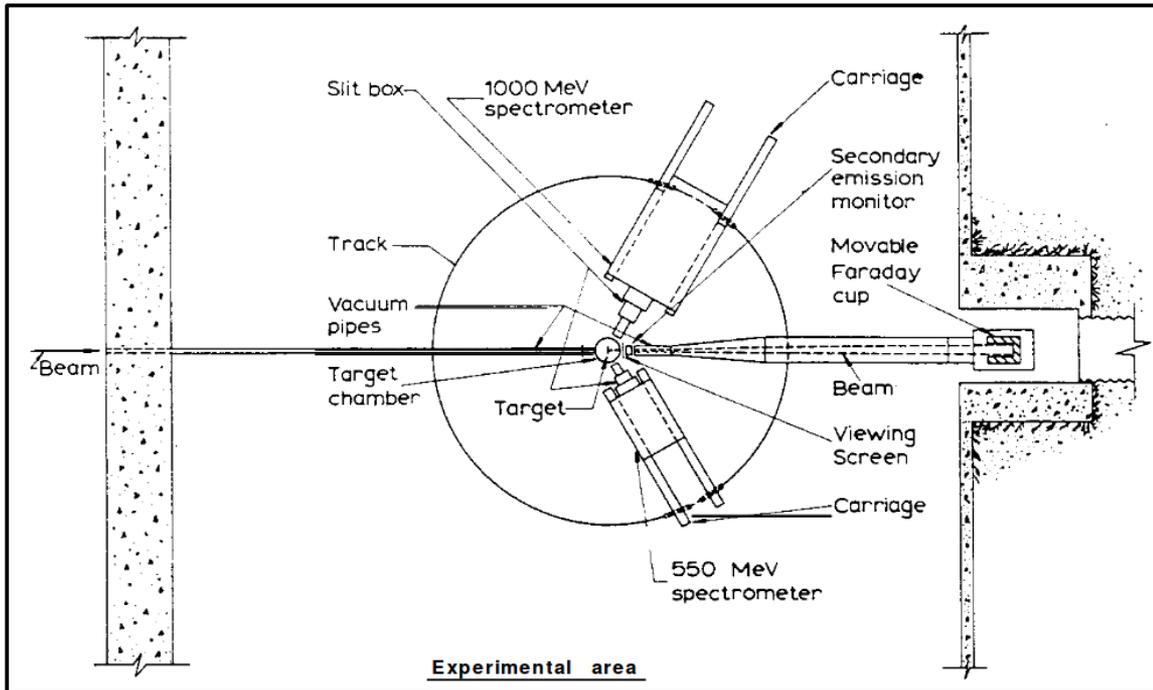
INSTITUTE OF EXPERIMENTAL PARTICLE PHYSICS (IEKP) – PHYSICS FACULTY



Kapitel 3.1: Kernradien und Formfaktoren

Untersuchung der Struktur von Atomkernen

- **Hochenergetische Elektronen-Kern Streuung** an ruhenden Kernen (→ fixed target) z.B. am Stanford Linear Accelerator (**SLAC**) in den 50er Jahren



- Theoretische Beschreibung durch **Mott-Wirkungsquerschnitt**:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} = \frac{(2Z\alpha(\hbar c))^2 E_f^2}{q^4 c^4} \cdot \frac{E_f}{E} \cdot \left(1 - \beta \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

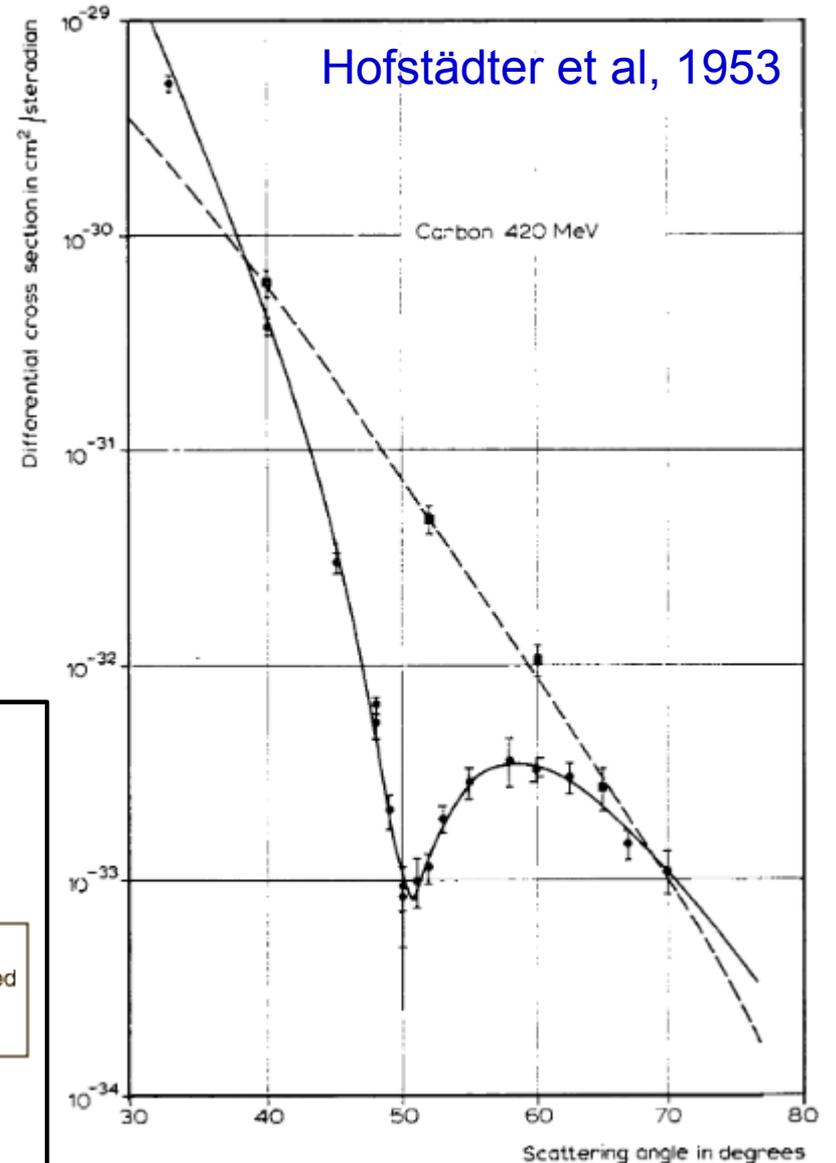
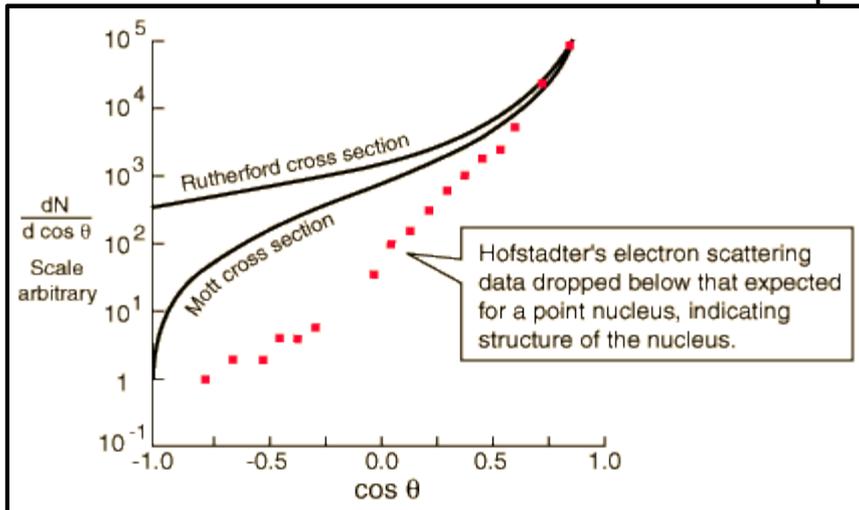
Streuung von Spin- $\frac{1}{2}$
Teilchen an Kern (ohne
Spin)

Beobachtung

- Wirkungsquerschnitt **fällt schneller ab**, als für Mott-Wirkungsquerschnitt erwartet
- Ausgeprägte Minima und Maxima (erinnern an Beugung an Lochblende)
- Beschreibung erweitert durch **Formfaktor**:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \cdot |F(\vec{q})|^2$$

(vgl mit [Beugungsmuster am Spalt](#))



Rutherford-Wirkungsquerschnitt (QM) (III)

- **Wirkungsquerschnitt** (“alles zusammengefaßt”):

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{V^2 E_f^2}{(2\pi)^2 (\hbar c)^4} \left| \frac{z Z e^2 \hbar^2}{\epsilon_0 q^2 V} \int_V f(\vec{x}) e^{i\vec{q}\vec{x}/\hbar} d^3x \right|^2 & \alpha &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = \frac{1}{137} \\ &= \frac{V^2 E_f^2}{(2\pi)^2 (\hbar c)^4} \left(\frac{4\pi z Z \alpha \hbar^3 c}{q^2 V} \right)^2 \left| \int_V f(\vec{x}) e^{i\vec{q}\vec{x}/\hbar} d^3x \right|^2 & & \text{(vgl VL-03 Folie 12)} \\ &= \frac{(2 z Z \alpha (\hbar c))^2 E_f^2}{q^4 c^4} \underbrace{\left| \int f(\vec{x}) e^{i\vec{q}\vec{x}/\hbar} d^3x \right|^2}_{\equiv 1 \text{ für } f(\vec{x}) = \delta(\vec{x})} & & \text{(vgl VL-03 Folie 13)} \end{aligned}$$

- **Formfaktor:**

$$F(\vec{q}) = \int_V f(\vec{x}) e^{i\vec{q}\vec{x}/\hbar} d^3x \quad \text{(Formfaktor)}$$

$$F(q) = 4\pi \int_0^\infty f(r) \frac{\sin(|q| r/\hbar)}{|q| r/\hbar} r^2 dr \quad \text{(für radialsymmetrische Ladungsverteilungen)}$$

Allgemeine Eigenschaft aller Streuexperimente (→ Spalt, Gitter, Kern, Nukleon, ...)

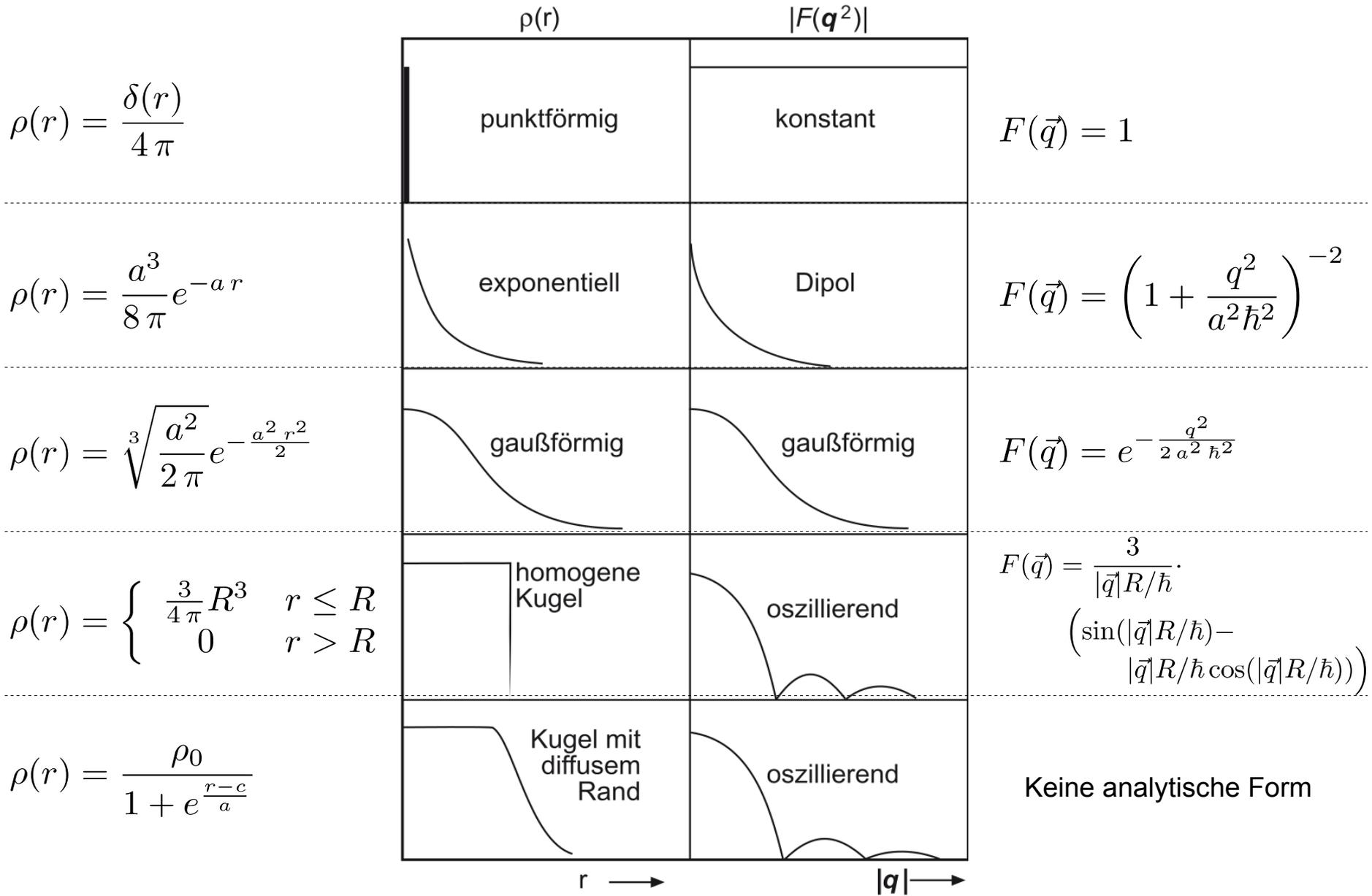
Gestalt der Kerne

- Aus Rücktransformation des Formfaktors \rightarrow Dichte der Ladungsverteilung

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_V F(\vec{q}) e^{i\vec{q}\vec{x}/\hbar} d^3q$$

ABER: in Praxis nur begrenzte Bereiche in q meßbar, außerdem nur Messung von $|F(\vec{q})|^2$

- Daher **üblicherweise Modellanpassung**



Ladungsverteilungen

- Für schwere Kerne: homogene **Kugel mit diffusem Rand**

- Fermi-Verteilung:
$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{\frac{r-c}{a}}}$$

$$c = 1.07 \text{ fm} \cdot A^{1/3}$$

$$a = 0.54 \text{ fm}$$

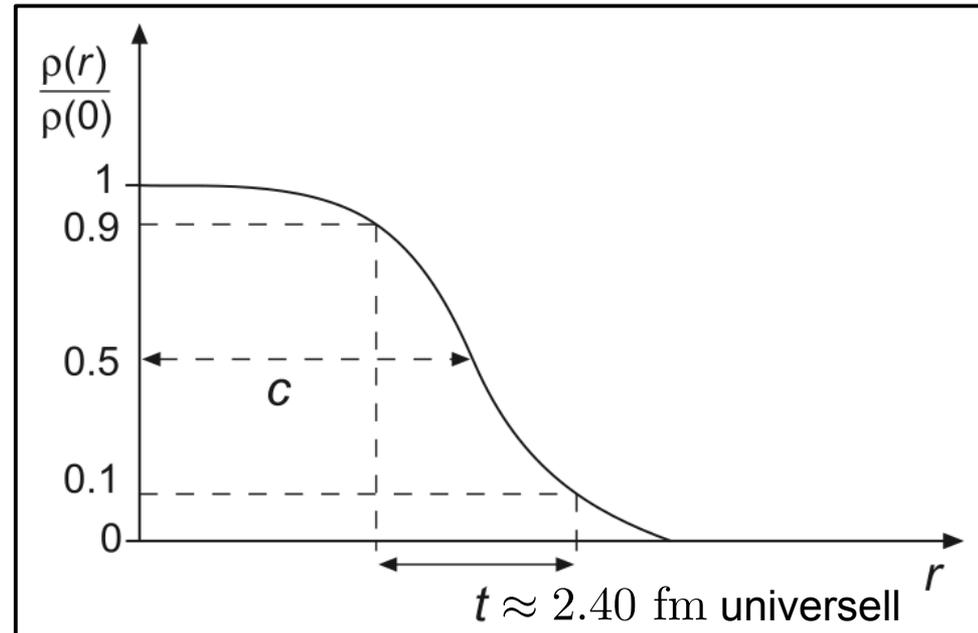
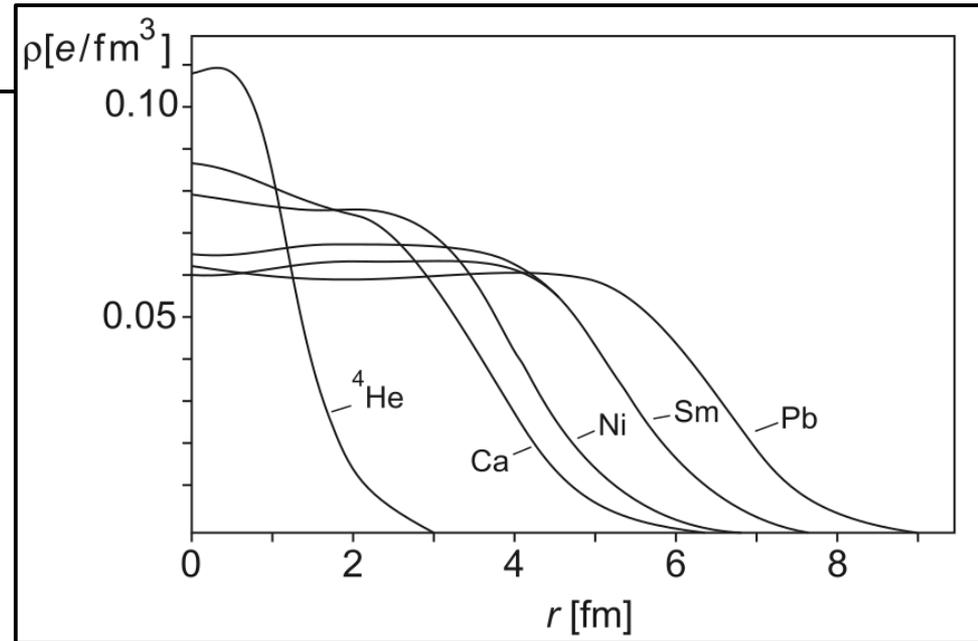
- Erwartungswert für den quadratischen Radius:

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = 0.94 \text{ fm}$$

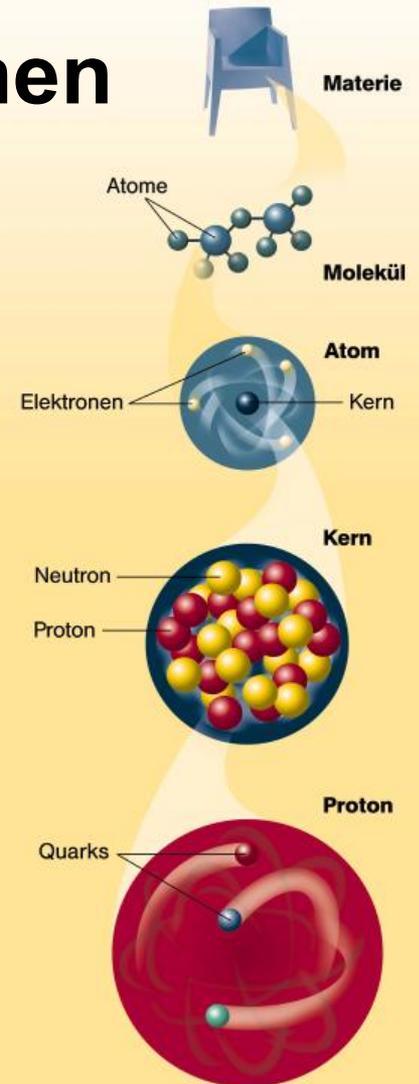
- Oft wird der Kernradius durch eine homogene Kugel beschrieben. Für den Radius dieser Kugel gilt dann:

$$R^2 = \frac{5}{3} \langle r^2 \rangle$$

$$R = 1.21 \text{ fm} \cdot A^{1/3}$$

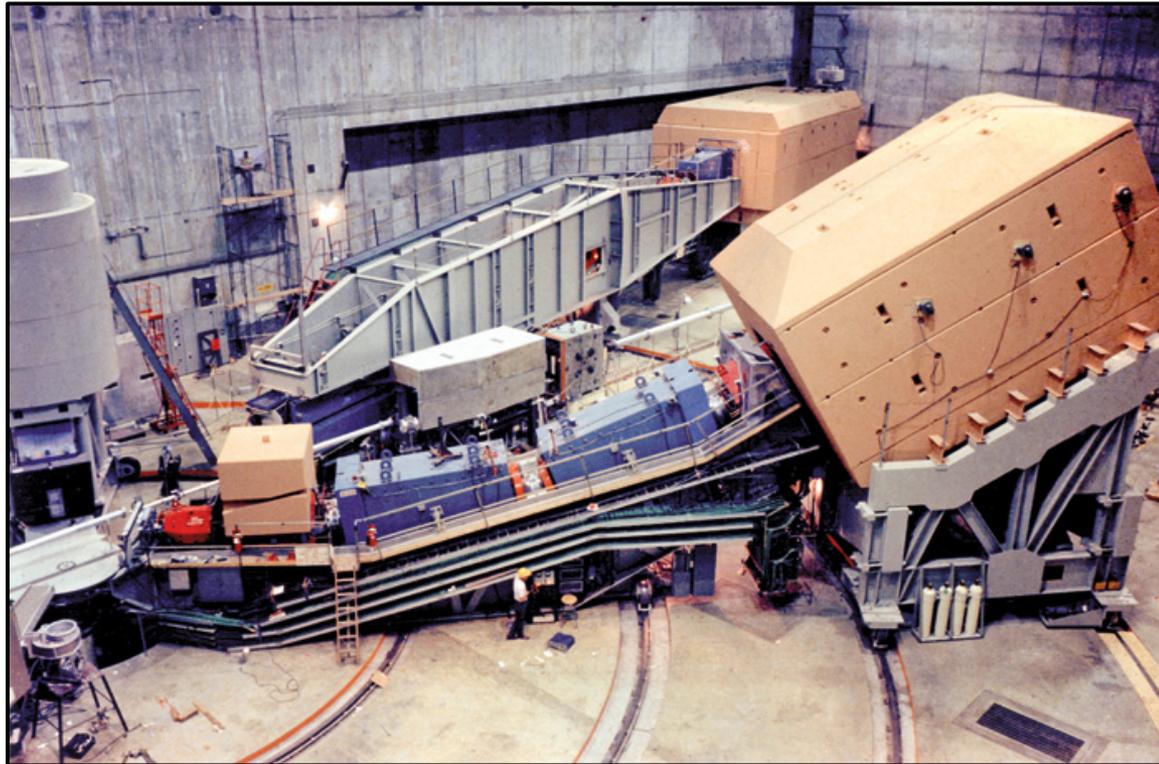


Kapitel 3.2: Struktur der Nukleonen



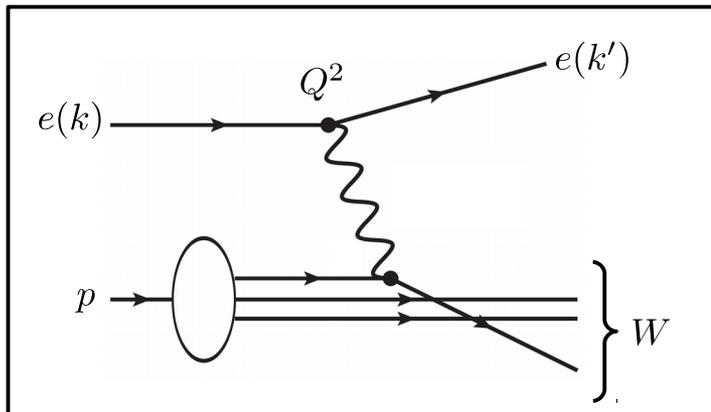
Elektronen-Nukleon Streuung

- Z.B. bei [SLAC](#) in den 60er und 70er Jahren
- Protonstruktur aus 1_1H -Target; Neutronstruktur aus 2_1H -Target
- Eleganter: Streuung thermischer Reaktor-Neutronen an Elektronen aus Atomhülle



Unterschiede zu Elektron-Kern Streuung

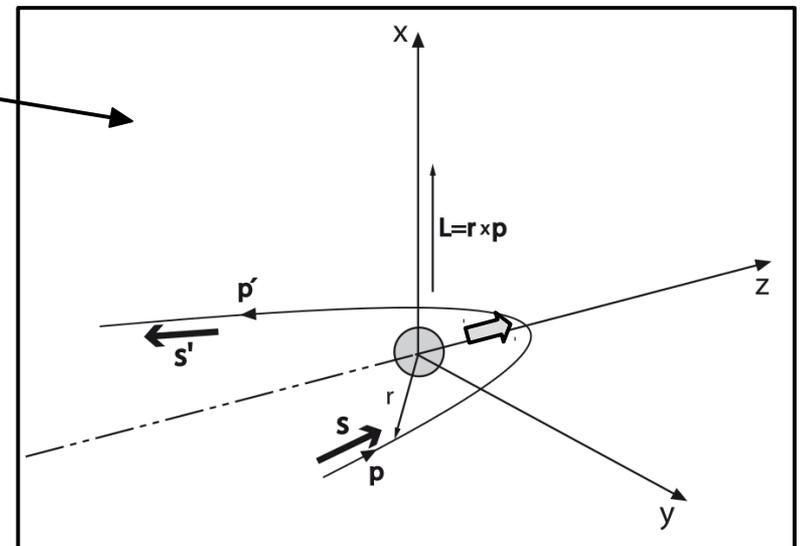
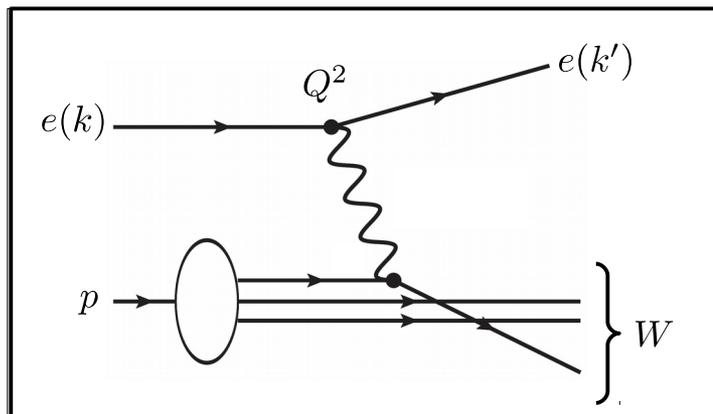
- **Höhere Auflösung** → **höhere Impulsüberträge**, Energie des Elektronenstrahls vergleichbar mit Nukleonmasse ($m_p = 938 \text{ MeV}$), erfordert relativistische Rechnung



Unterschiede zu Elektron-Kern Streuung

- **Höhere Auflösung** → **höhere Impulsüberträge**, Energie des Elektronenstrahls vergleichbar mit Nukleonmasse ($m_p = 938 \text{ MeV}$), erfordert relativistische Rechnung
- Proton & Neutron selbst **Fermionen mit Spin-1/2**
- Elektronladung ↔ Nukleonladung
- Elektronstrom ↔ magnetisches Moment des Nukleons

→ i.e. Spin-Flip des Elektrons nun erlaubt (vgl mit [VL-07 Folie 24](#))

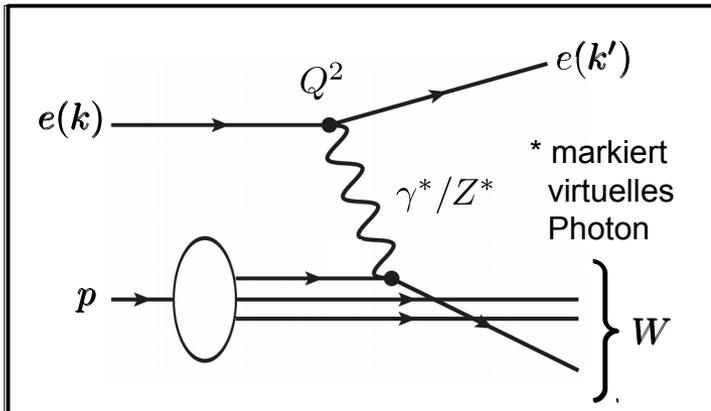


Impulsübertrag bei Elektronstreuung

$$\begin{aligned}
 q^2 &= \left(\left(\begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} E' \\ 0 \\ E' \sin \theta \\ E' \cos \theta \end{pmatrix} \right) \right)^2 \\
 &= (E - E')^2 - E'^2 \sin^2 \theta - E^2 + 2 E E' \cos \theta - E'^2 \cos^2 \theta \\
 &= E^2 - 2 E E' + E'^2 - E^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - E'^2 + 2 E E' \cos \theta \\
 &= -2 E E' + 2 E E' \cos \theta = -2 E E' (1 - \cos \theta) = \underbrace{-2 E E' \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)}_{\text{„Masse des Photons“}} \leq 0
 \end{aligned}$$

„Masse des Photons“

- **Definiere:** $Q^2 = -q^2$
- $Q^2 \rightarrow 0$ Forwärtstreuung bei fester Energie \rightarrow **reelles Photon**
- $Q^2 > 0 \rightarrow$ **virtuelles Photon**



Erinnerung magnetisches Moment

- (Geladenes) Teilchen mit **Spin besitzt magnetisches Moment**:

- Elektron (Spin- $\frac{1}{2}$, punktförmig):

$$\mu = \frac{g}{2} \cdot \frac{q \hbar}{2m} \rightarrow \frac{e \hbar}{2m_e}$$

$g \equiv 2$: Landé-Faktor aus Dirac-Gleichung

- Proton (Spin- $\frac{1}{2}$, mit Struktur):

$$\mu = \frac{g_p}{2} \cdot \frac{e \hbar}{2m_p} = +2.79 \cdot \mu_N$$

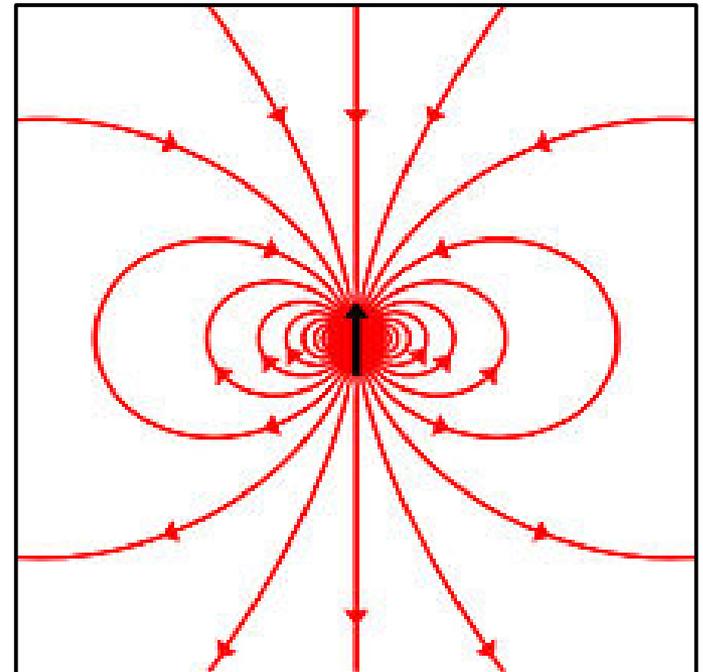
$$\mu_p \equiv \frac{e \hbar}{2m_p} : \text{Kernmagneton}$$

m_p : Protonmasse

- Neutron (Spin- $\frac{1}{2}$, mit Struktur):

$$\mu = \frac{g_n}{2} \cdot \frac{e \hbar}{2m_p} = -1.91 \cdot \mu_N$$

Wie kann ein elektrisch
neutrales Teilchen ein
magnetisches moment
haben?



Dirac-Wirkungsquerschnitt

- Wirkungsquerschnitt für Streuung von **zwei Punktteilchen mit Spin-1/2**:

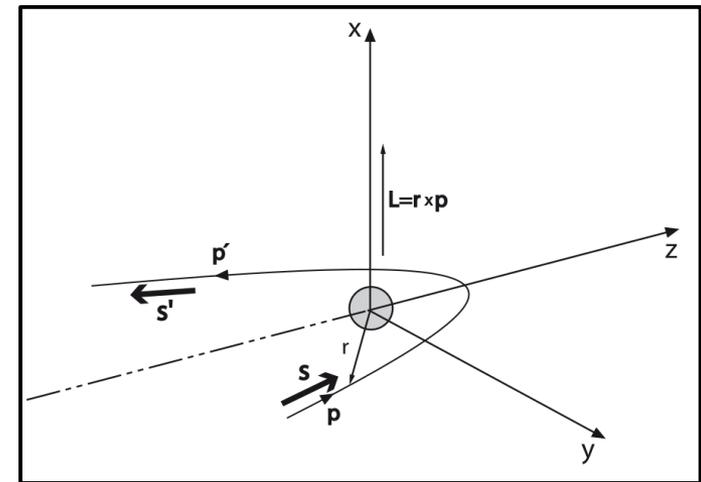
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Dirac}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} \left[1 + 2\tau \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad \text{mit: } \tau \equiv \frac{Q^2}{4M^2c^2}$$

- Plausibilitätsbetrachtungen:**

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} \cdot \frac{E_f}{E} \cdot \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Gleiches Argument der Drehimpulserhaltung aber für Fortwärtstreuung für "Umklappen" des Spins → zusätzlicher Term in Wirkungsquerschnitt

(Vgl mit VL-07 Folie 24)



$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} \cdot \frac{E_f}{E} \cdot \left(\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \kappa \cdot \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)$$

$$\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Dirac-Wirkungsquerschnitt

- Wirkungsquerschnitt für Streuung von **zwei Punktteilchen mit Spin**

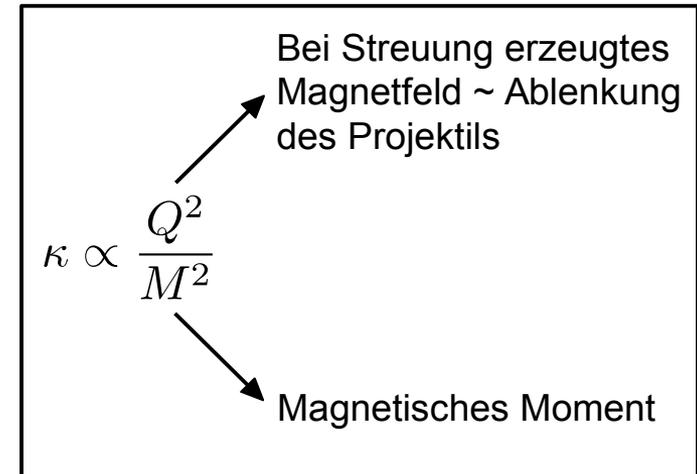
Wahrscheinlichkeit
für Spin-Flip

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Dirac}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} \left[1 + 2\tau \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad \text{mit: } \tau \equiv \frac{Q^2}{4M^2c^2}$$

- Plausibilitätsbetrachtungen:**

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} \cdot \frac{E_f}{E} \cdot \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Gleiches Argument der Drehimpulserhaltung aber für Fortwärtstreuung für "Umklappen" des Spins → zusätzlicher Term in Wirkungsquerschnitt



$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} \cdot \frac{E_f}{E} \cdot \left(\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \kappa \cdot \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)$$

$$\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Rosenbluth-Formel

- Dirac-Wirkungsquerschnitt für **ausgedehnte Objekte**:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \left[\frac{G_E^2(Q^2) + \tau G_M^2(Q^2)}{1 + \tau} + 2\tau G_M^2(Q^2) \tan^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]$$

$$\tau \equiv \frac{Q^2}{4M^2c^2}$$

(Rosenbluth-Formel)

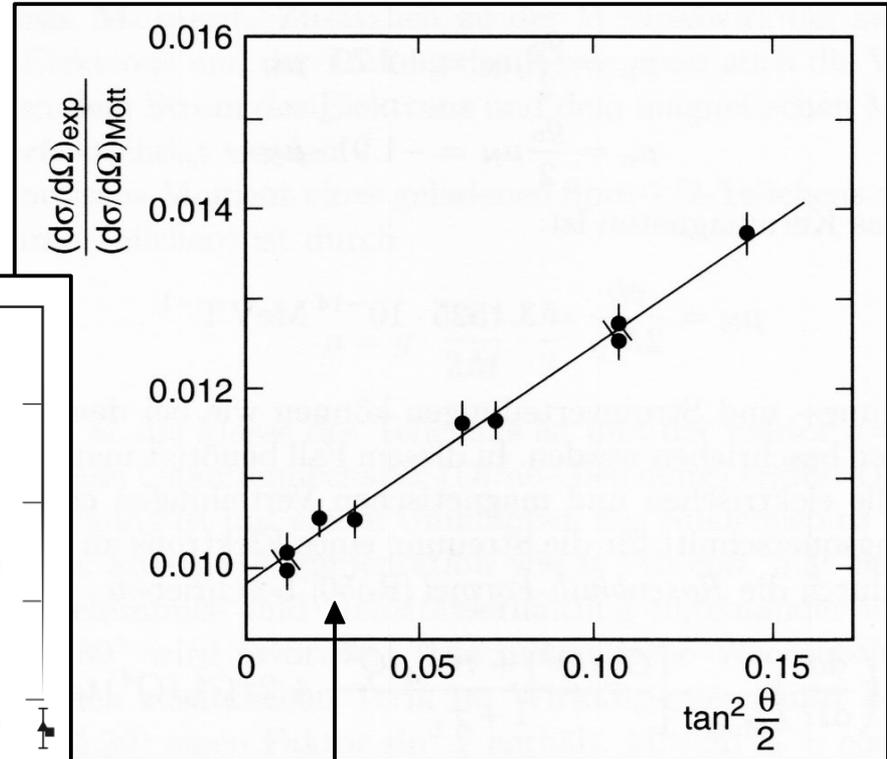
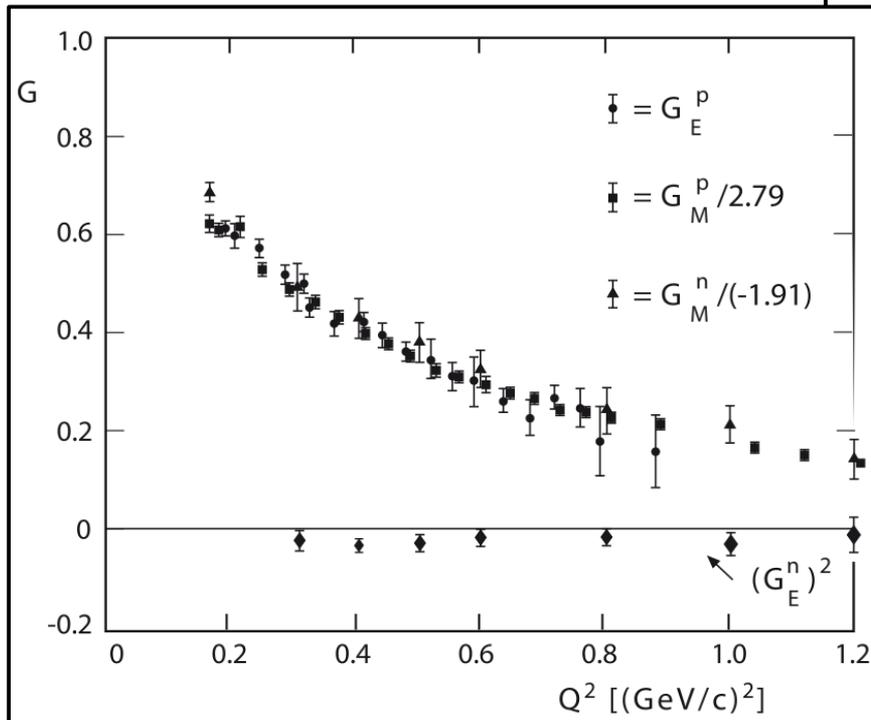
Größe	Normierung		Kommentar
	Proton	Neutron	
$G_E(Q^2)$	1	0	elektrischer Formfaktor
$G_M(Q^2)$	+2.794	-1.91	magnetischer Formfaktor

Normierung für $Q^2 = 0$

- Formfaktoren **analog zu Elektron-Kern Streuung** → Fouriertransformierte der Ladungs-/Stromdichte im Nukleon
- Bestimmung mittels Rosenbluth-Plot

Rosenbluth-Plot

- Bestimme $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{exp} / \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott}$ als Funktion von $\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ bei festem Q^2
- Variierende Energie des Elektronstrahls
- Bestimme G_E und G_M aus Steigung und Achsenabschnitt der sich daraus ergebenden Geraden



Beispiel für $Q^2 = 2.5 \text{ GeV}^2$

Schätzen Sie den Wert von G für $Q^2 = 2.5 \text{ GeV}^2$ ab. Streuung an Proton oder Neutron?



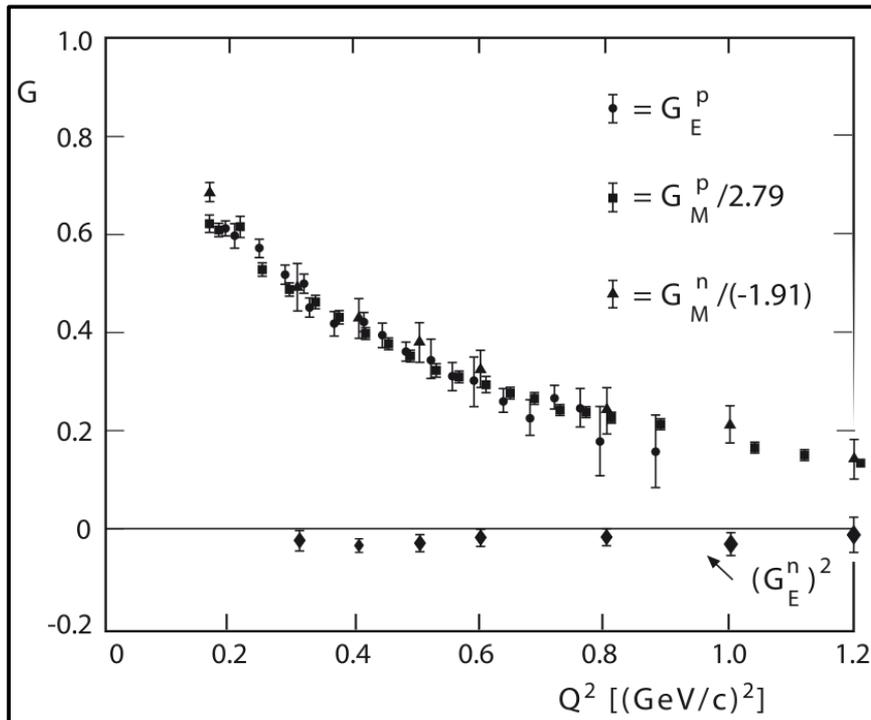
Rosenbluth-Plot (Ergebnis)

- Bestimme $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{exp} / \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott}$ als Funktion von $\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ bei festem Q^2
- Variierende Energie des Elektronstrahls
- Bestimme G_E und G_M aus Steigung und Achsenabschnitt der sich daraus ergebenden Geraden

- Beide Proton Formfaktoren haben den gleichen(!) Dipolcharakter

$$G(Q^2) = \left(1 + \frac{Q^2}{0.71 \text{ GeV}^2}\right)^{-2}$$

Welcher Form der Ladungs-/Stromverteilung entspricht das?



Rosenbluth-Plot (Ergebnis)

- Bei festem Q^2 bestimme $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{exp} / \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott}$ als Funktion von $\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ (bei variierender Strahlenergie)
- Bestimme G_E und G_M aus Steigung und Achsenabschnitt der sich daraus ergebenden Geraden

- Beide Proton Formfaktoren haben den gleichen(!) Dipolcharakter

$$G(Q^2) = \left(1 + \frac{Q^2}{0.71 \text{ GeV}^2}\right)^{-2}$$

Welcher Form der
Ladungs-/Stromverteilung
entspricht das?

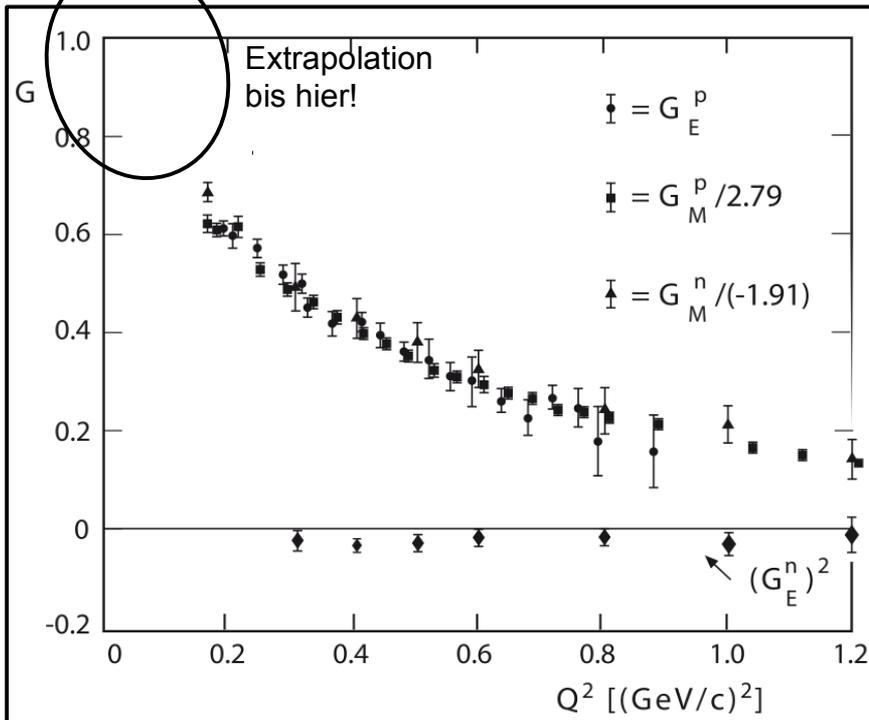


- Eher diffuse Ladungsverteilung

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle_p} = 0.862 \text{ fm}$$

kann bestimmt werden aus:

$$\langle r^2 \rangle = -6\hbar^2 \left. \frac{dG(Q^2)}{dQ^2} \right|_{Q^2=0}$$



Elastische Wirkungsquerschnitte...

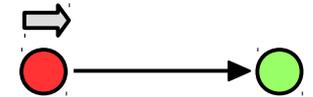
- ... für Teilchen ohne Ausdehnung/Struktur:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} = \frac{(2zZ\alpha(\hbar c))^2 E^2}{q^4 c^4}$$

Projektil Target



$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} \cdot \frac{E_f}{E} \cdot \underbrace{\left(1 - \beta \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}_{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ für } \beta \rightarrow 1}$$



$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Dirac}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} \left[1 + 2\tau \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \quad \text{mit: } \tau \equiv \frac{Q^2}{4M^2 c^2}$$



Elastische Wirkungsquerschnitte...

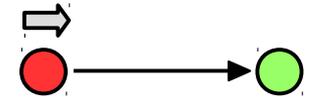
- ... für Teilchen mit **Ausdehnung/Struktur**:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} = \frac{(2zZ\alpha(\hbar c))^2 E^2}{q^4 c^4}$$

Projektil Target



$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} \cdot \frac{E_f}{E} \cdot \underbrace{\left(1 - \beta \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}_{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ für } \beta \rightarrow 1} \cdot |F(\vec{q})|^2$$



$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Dirac}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} \left[1 + 2\tau \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \quad \text{mit: } \tau \equiv \frac{Q^2}{4M^2 c^2}$$

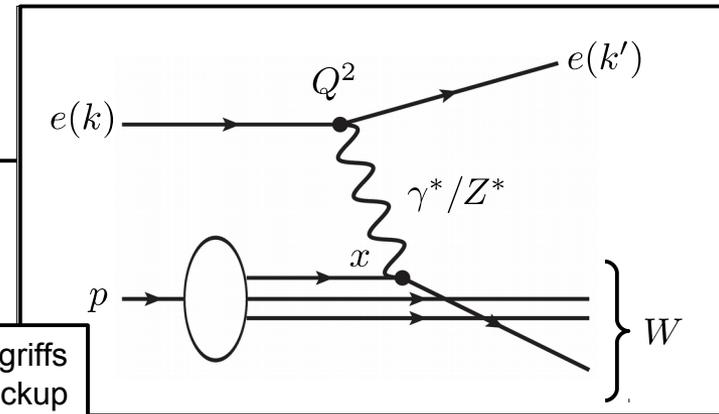


$$\frac{G_E^2(Q^2) + \tau G_M^2(Q^2)}{1 + \tau}$$

$$G_M^2(Q^2)$$

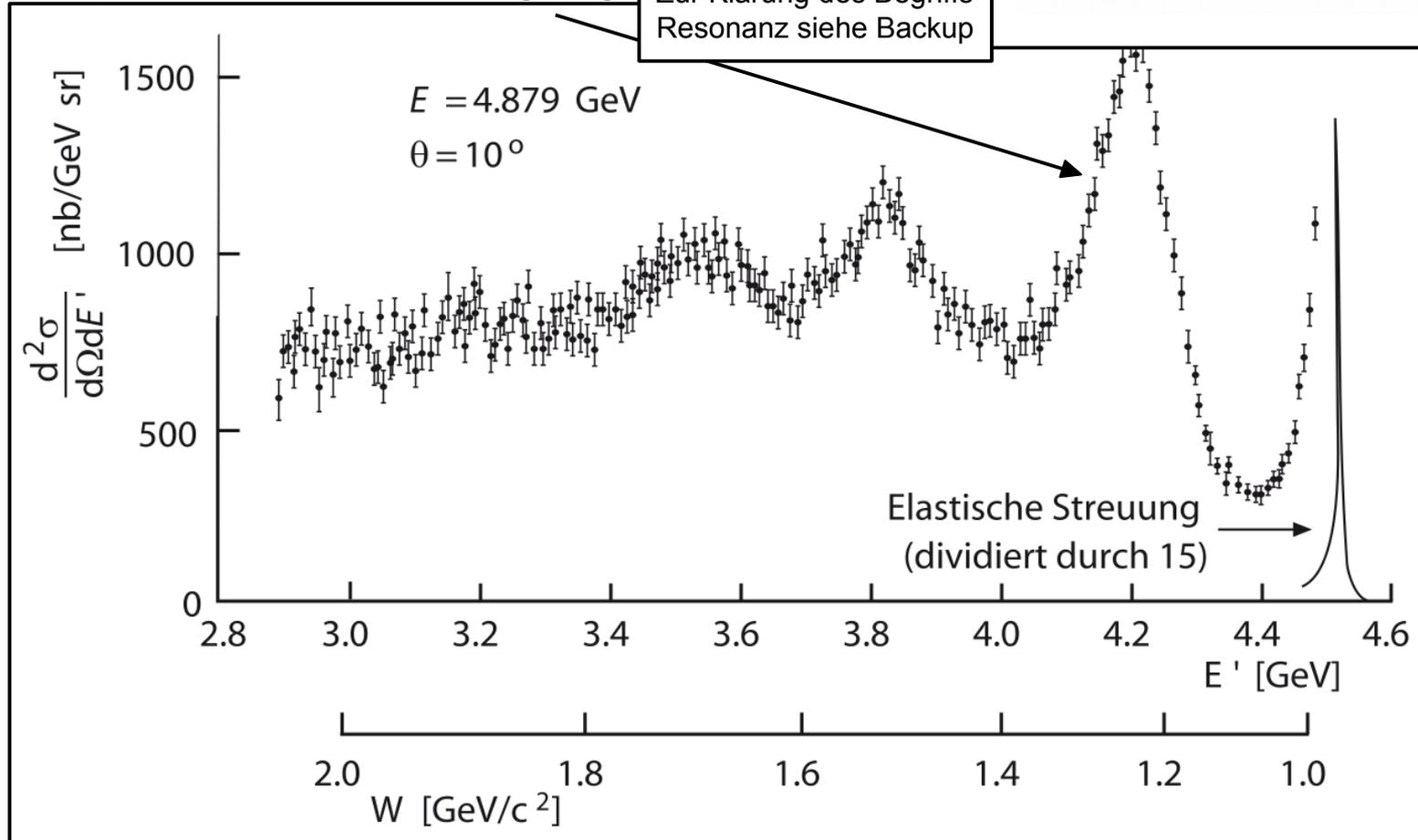
Inelastische Streuung

- Für Elektronenenergien oberhalb von 1–2 GeV:



Beispiel: Resonanzerzeugung

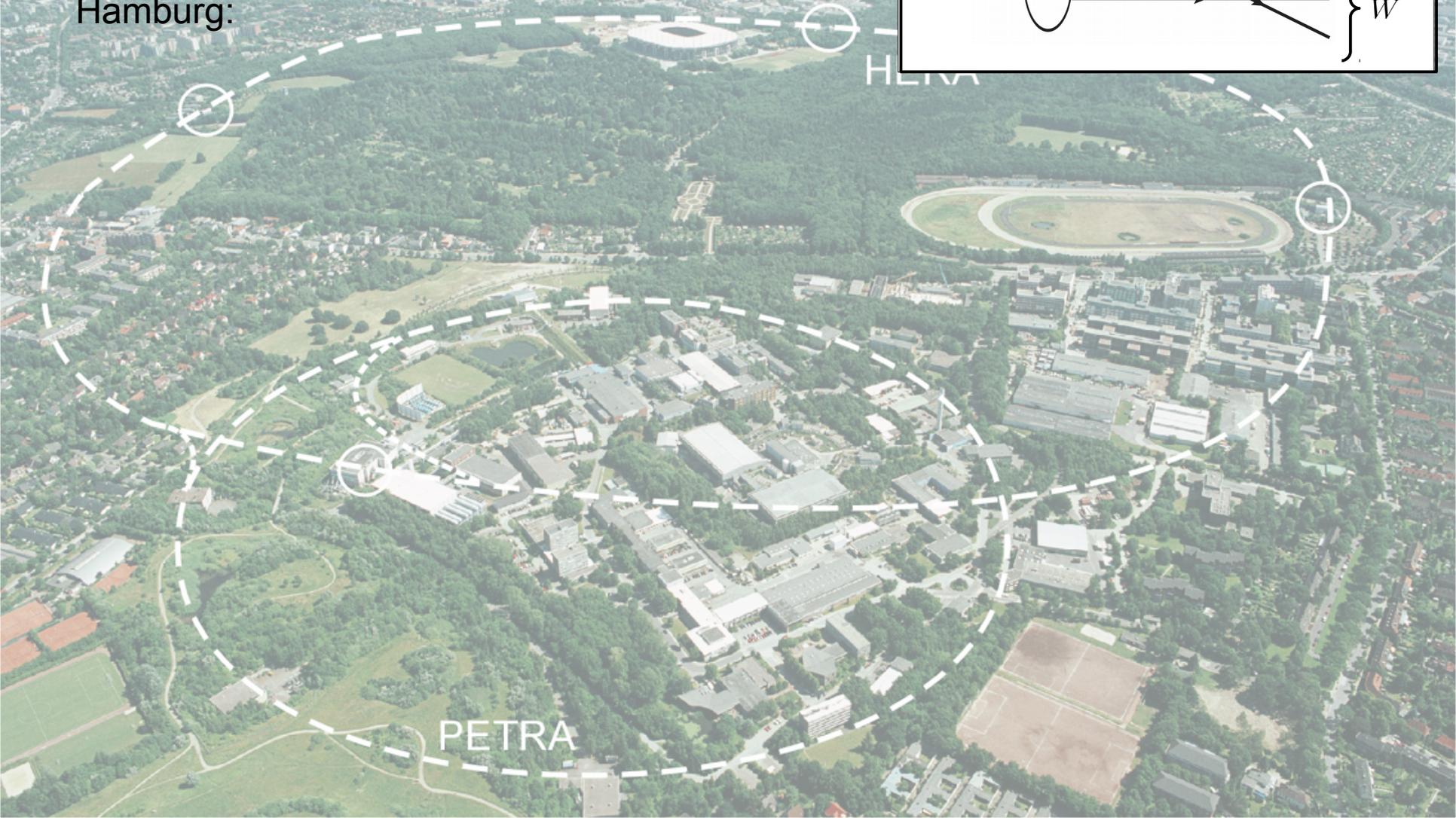
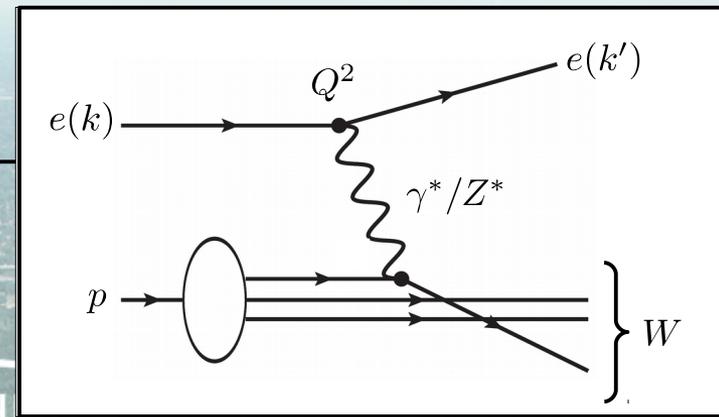
Zur Klärung des Begriffs
Resonanz siehe Backup



Invariante Masse des hadronischen Systems $W > m_p$

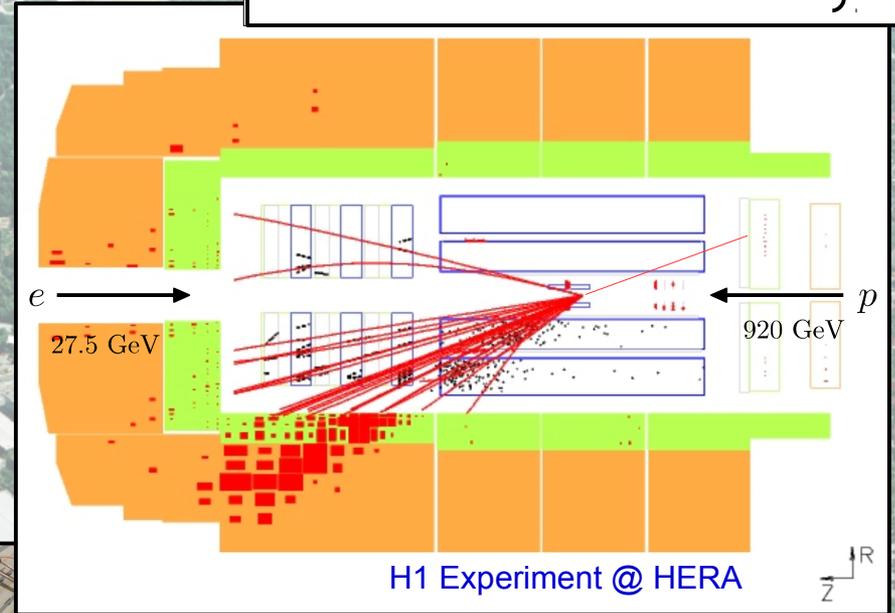
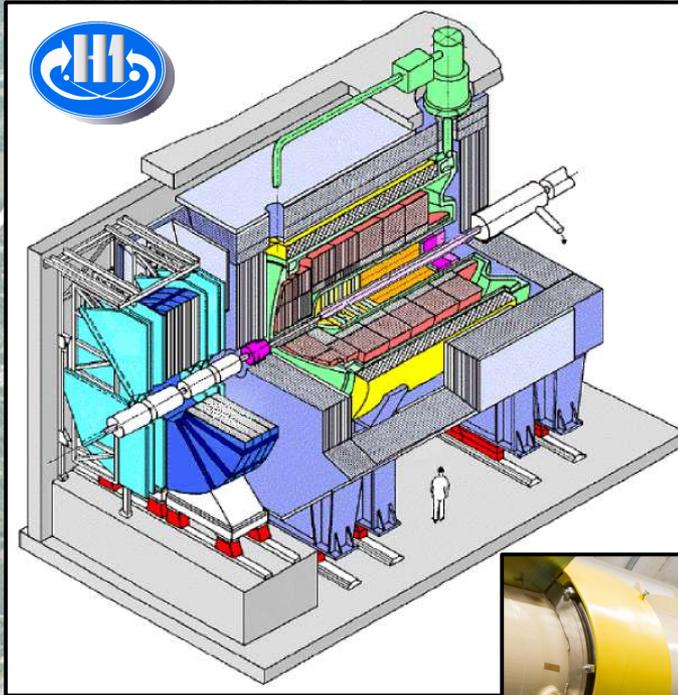
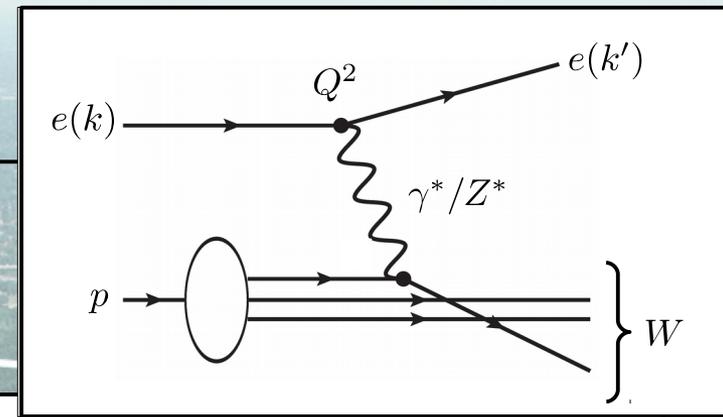
Inelastische Streuung

- Untersuchungen an fixed target Experimenten an SLAC, aber auch am **HERA Beschleuniger** in Hamburg:



Inelastische Streuung

- Untersuchungen an fixed target Experimenten an SLAC, aber auch am **HERA Beschleuniger** in Hamburg:



Kinematik

$$Q^2 = -q^2 = (k^\mu - k^{\mu'})^2 \quad (\text{Impulsübertrag } e)$$

$$s = (k^\mu + p^\mu)^2 = 4 E_e E_p \quad (\text{Schwerpunktsenergie})$$

$$x = \frac{Q^2}{2 q^\mu p^\mu} \quad (\text{Bjorken'sche Skalenvariable})$$

$$\nu = \frac{q^\mu p^\mu}{m_p} = \Delta E_e$$

$$y = \frac{q^\mu p^\mu}{k^\mu p^\mu} = \frac{\Delta E_e}{E_e}$$

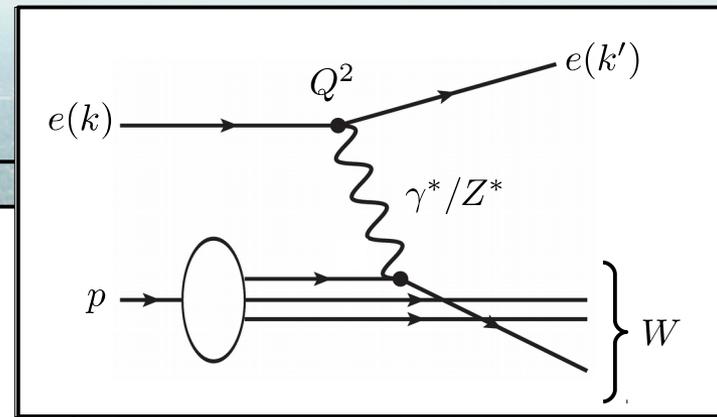
(Energieübertrag e im Ruhesystem p)

$$W^2 = (p^\mu + q^\mu)^2$$

$$= p^{\mu 2} + 2 q^\mu p^\mu + q^{\mu 2}$$

$$= m_p^2 + 2 m_p \nu - Q^2$$

(Invariante Masse hadronischer Endzustand)



Kinematik

$$Q^2 = -q^2 = (k^\mu - k'^\mu)^2 \quad (\text{Impulsübertrag } e)$$

$$s = (k^\mu + p^\mu)^2 = 4 E_e E_p \quad (\text{Schwerpunktsenergie})$$

$$x = \frac{Q^2}{2 q^\mu p^\mu} \quad (\text{Bjorken'sche Skalenvariable})$$

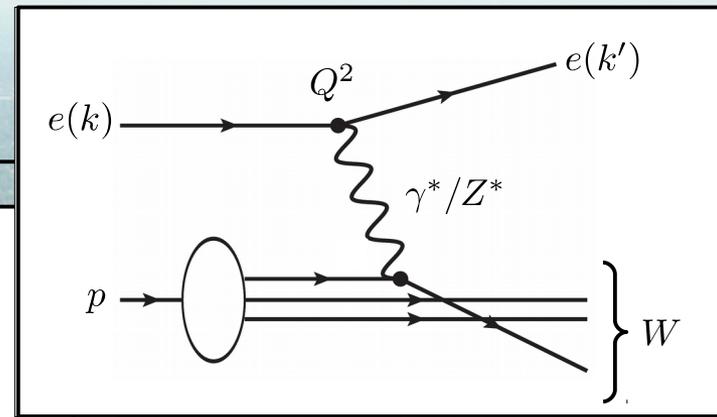
$$\nu = \frac{q^\mu p^\mu}{m_p} = \Delta E_e$$

$$y = \frac{q^\mu p^\mu}{k^\mu p^\mu} = \frac{\Delta E_e}{E_e}$$

(Energieübertrag e im Ruhesystem p)

$$\begin{aligned} W^2 &= (p^\mu + q^\mu)^2 \\ &= p^{\mu 2} + 2 q^\mu p^\mu + q^{\mu 2} \\ &= m_p^2 + 2 m_p \nu - Q^2 \end{aligned}$$

(Invariant hadronis)



Wichtige Relationen:

$$Q^2 = x y s$$

$$x = \frac{Q^2}{2 q^\mu p^\mu} = \frac{Q^2}{2 \nu m_p} \approx \frac{Q^2}{W^2 + Q^2}$$

$$Q^2 = \begin{cases} 2 m_p \nu & \text{elastisch} \\ 2 m_p \nu - (W^2 - m_p^2) & \text{inelastisch} \end{cases}$$

Inelastischer Wirkungsquerschnitt

- Inelastische Elektron-Proton Streuung (analog zu Elektron-Kern Streuung):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \left[\frac{G_E^2(Q^2) + \tau G_M^2(Q^2)}{1 + \tau} + 2\tau G_M^2(Q^2) \tan^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]$$



(Rosenbluth-Formel)

$$\frac{d^2\sigma}{dE' d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \left[W_2(Q^2, \nu) + 2W_1(Q^2, \nu) \tan^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]$$

(Inelastische Elektron-Proton Streuung)

- Strukturfunktionen $W_{1,2}(Q^2, \nu)$: Parametrisierung Nukleonstruktur
- Nun von zwei Variablen abhängig Q^2 und ν
- Für elastische Streuung an Punktteilchen der Masse m :

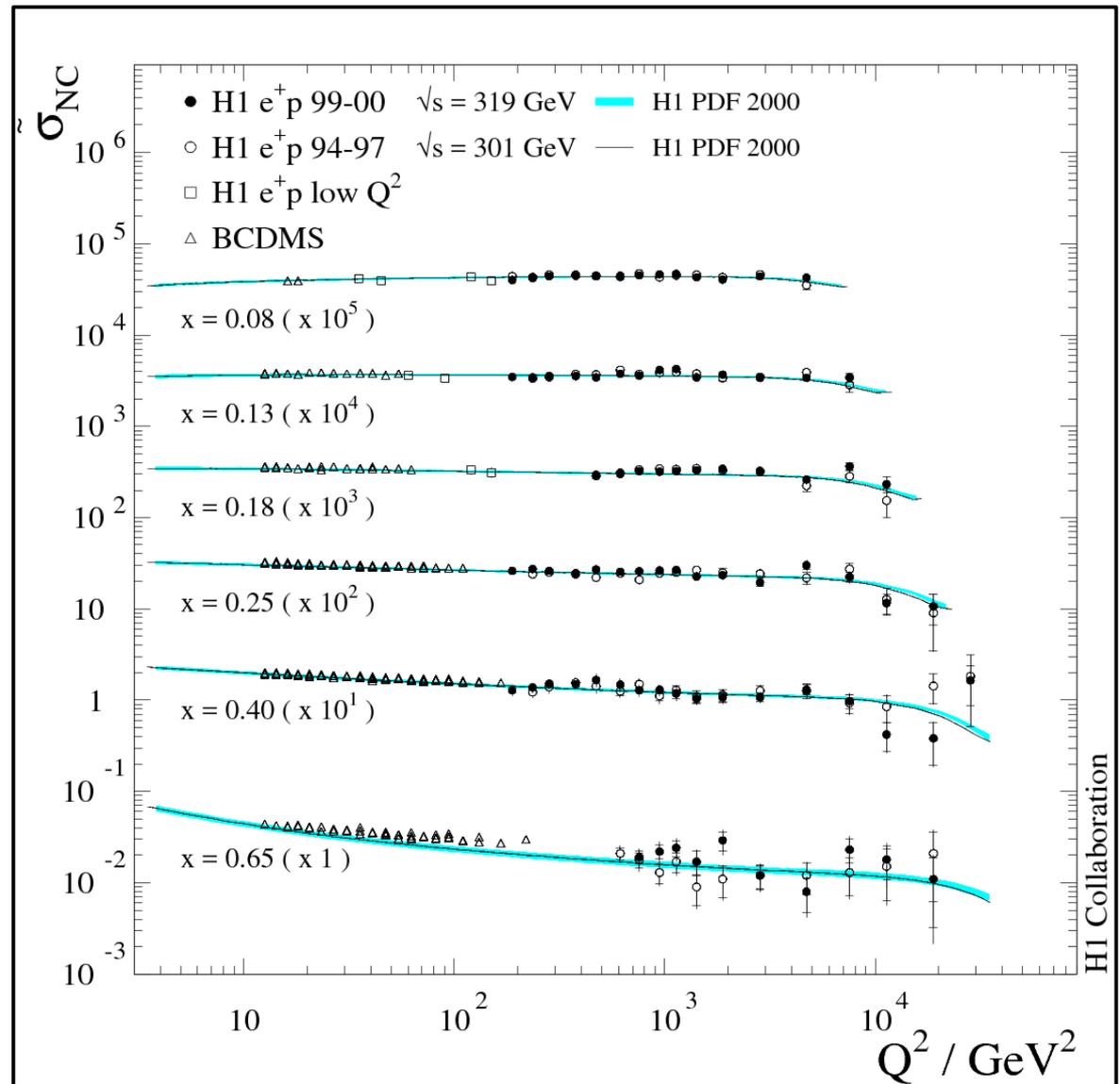
$$\frac{d^2\sigma}{dE' d\Omega} = \underbrace{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \left[1 + \frac{Q^2}{2m^2c^2} \tan^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]}_{\text{Dirac-Wirkungsquerschnitt}} \cdot \underbrace{\delta \left(\nu - \frac{Q^2}{2m} \right)}_{\text{Legt Energie des gestreuten Elektrons fest}}$$

Dirac-Wirkungsquerschnitt

Legt Energie des gestreuten Elektrons fest

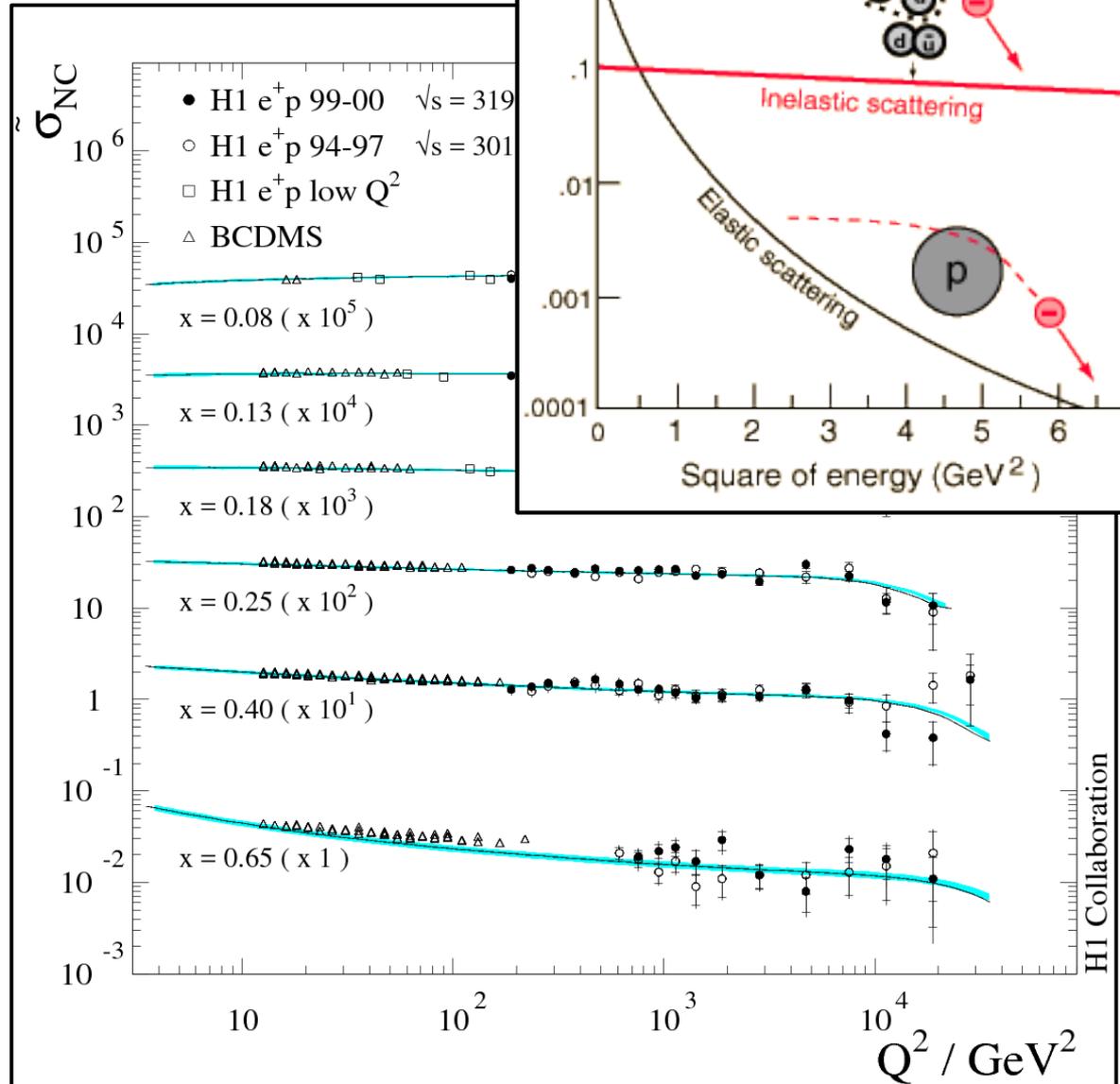
Weitere Klärung Proton-Substruktur

- $\tilde{\sigma}_{\text{NC}}$: Wirkungsquerschnitt normiert auf Dirac-WQ (→ reduzierter Wirkungsquerschnitt)
- Skalenverhalten



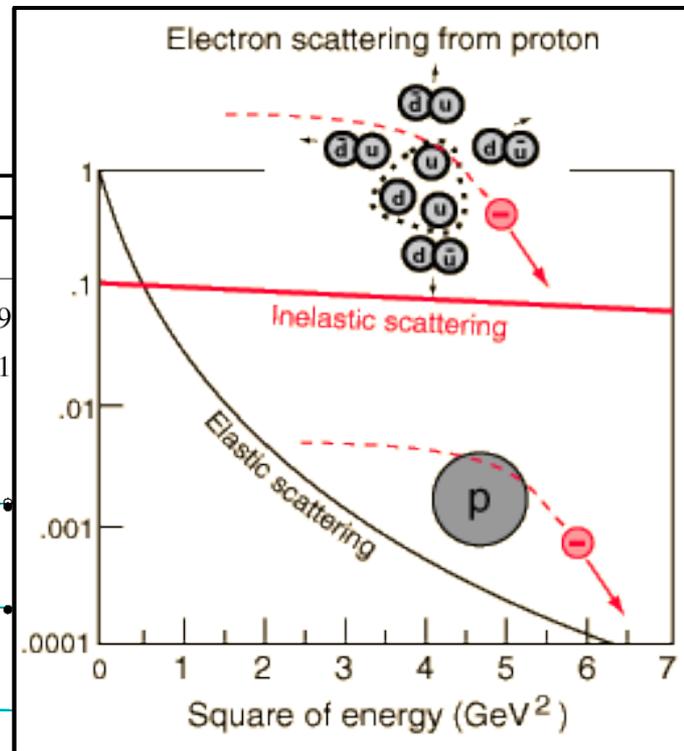
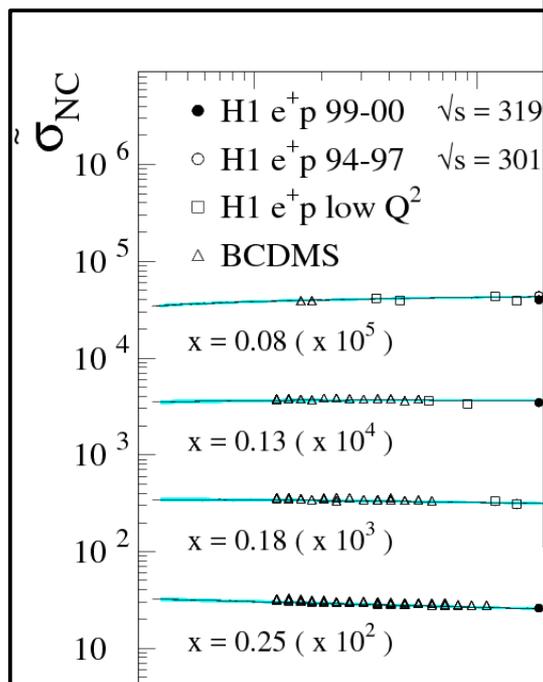
Weitere Klärung Proton-Substruktur

- $\tilde{\sigma}_{\text{NC}}$: Wirkungsquerschnitt **normiert auf Dirac-WQ** (\rightarrow reduzierter Wirkungsquerschnitt)
- Skalenverhalten
- Proton besteht aus **punktförmigen Konstituenten**



Weitere Klärung Proton-Substruktur

- $\tilde{\sigma}_{\text{NC}}$: Wirkungsquerschnitt **normiert auf Dirac-WQ** (\rightarrow reduzierter Wirkungsquerschnitt)
- Skalenverhalten
- Proton besteht aus **punktförmigen Konstituenten**

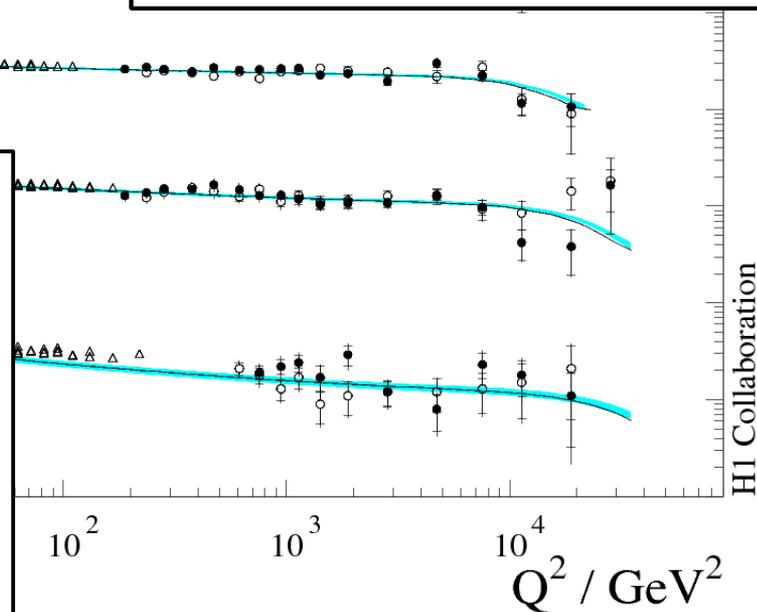


Anschauliche Bedeutung von x:

$$(x \cdot p^\mu + q^\mu)^2 = x^2 p^{\mu 2} + 2x q^\mu p^\mu - Q^2 = m_q^2$$

$$\rightarrow x = \frac{Q^2}{2q^\mu p^\mu}$$

Elastische Streuung an punktförmigem Parton mit Impulsbruchteil x am Proton



Strukturfunktionen

- Skalenverhalten motiviert Einführung dimensionsloser Strukturfunktionen:

$$\frac{d^2\sigma}{dE' d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \left[W_2(Q^2, \nu) + 2 W_1(Q^2, \nu) \tan^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]$$

(Inelastische Elektron-Proton Streuung)

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{dE' d\Omega} &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \left[1 + \frac{Q^2}{2 m_p^2 c^2} \tan^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \cdot \delta \left(\nu - \frac{Q^2}{2 m_p} \right) \\ &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \left[1 + \frac{Q^2}{2 m_p^2 c^2} \tan^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \cdot \delta \left(1 - \frac{Q^2}{2 \nu m_p} \right) \cdot \frac{1}{\nu} \end{aligned}$$

- Übersetzt auf Strukturfunktionen:

$$\text{mit: } x = \frac{Q^2}{2 m \nu}$$

$$\frac{1}{\nu} \cdot W_2(Q^2, \nu) \rightarrow F_2(x)$$

$$\frac{1}{m_p c^2} \cdot W_1(Q^2, \nu) \rightarrow F_1(x)$$

In diesem Fall hängen die Strukturfunktionen trivial nur von x ab

$$\frac{d^2\sigma}{dE' d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \left[F_2(x) + 2 F_1(x) \tan^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \cdot \delta(1 - x)$$

(elastische Streuung an punktförmigem Spin-1/2 Teilchen)

Callan-Gross Relation

- Aus der Annahme, dass das Proton aus punktförmigen Teilchen zusammengesetzt ist erhält man eine Relation zwischen $F_1(x)$ und $F_2(x)$

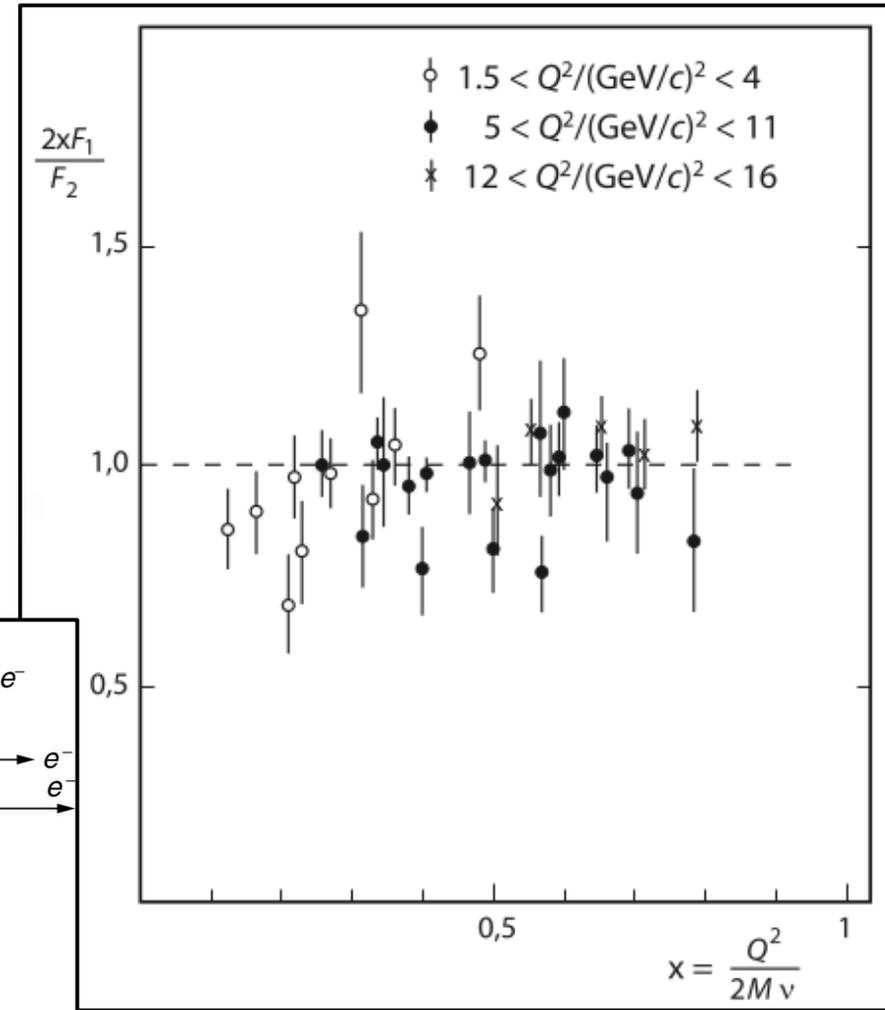
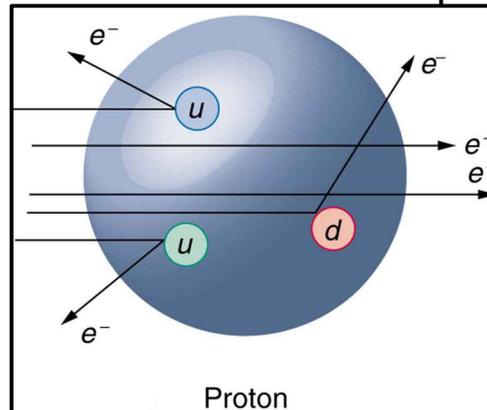
$$\frac{2 W_1(Q^2, \nu)}{W_2(Q^2, \nu)} = \frac{2 F_1(x)}{F_2(x)} \cdot \frac{\nu}{m_p c^2}$$

$$\equiv 2 \frac{Q^2}{4 (x m_p)^2 c^2}$$

$$F_2(x) = 2 F_1(x) \cdot x^2 \cdot \frac{2 \nu m_p}{Q^2}$$

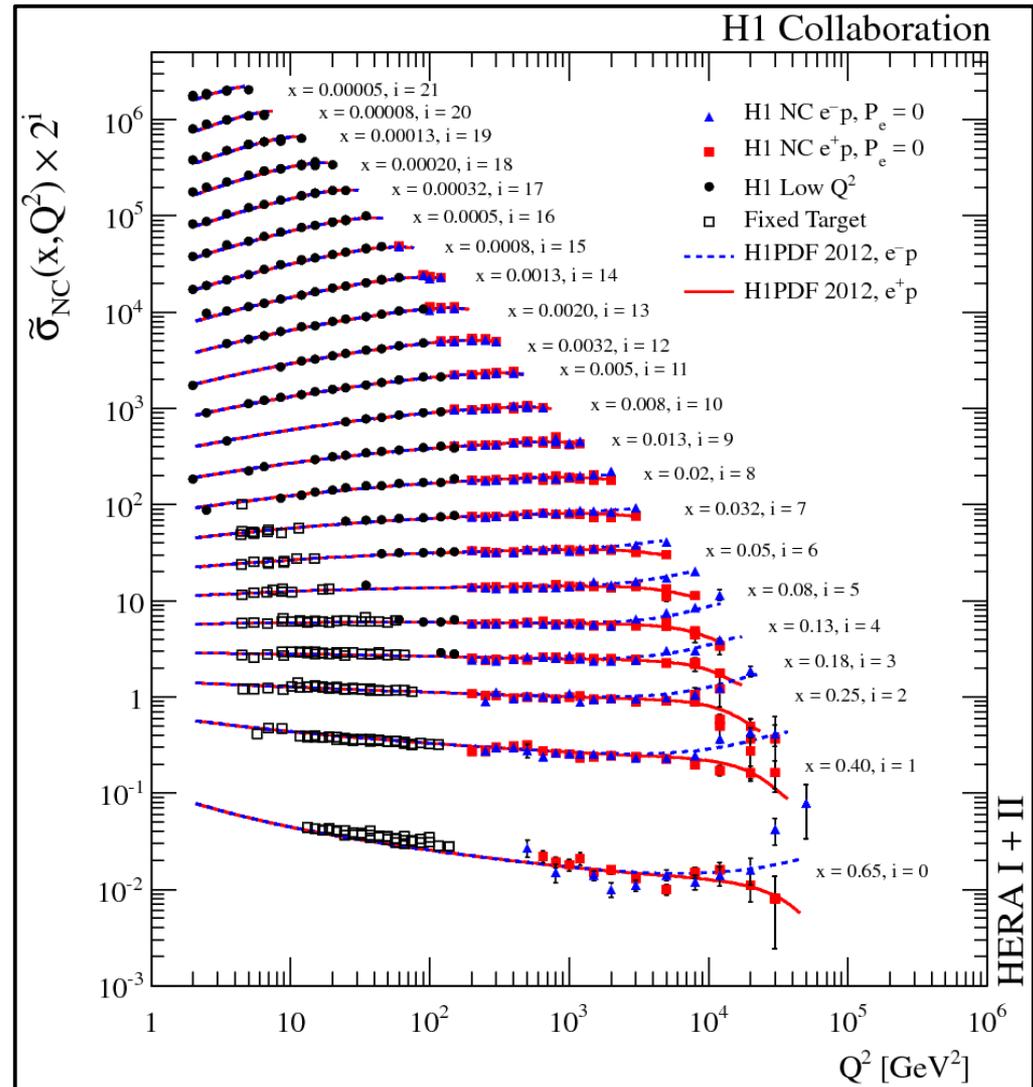
$$= 2 x F_1(x) \quad (\text{Callan-Gross Relation})$$

- Proton besteht aus punktförmigen Spin- $\frac{1}{2}$ Teilchen (\rightarrow Partonen)
- Partonen = Quarks



Partonmodell → QCD

- Bei genauerer Betrachtung ist die Skaleninvarianz verletzt. $F_1(x, Q^2)$ und $F_2(x, Q^2)$ hängen von Q^2 ab
- Diese Brechung der Skaleninvarianz wird exakt von der QCD vorhergesagt





Gliederung der Vorlesung

KW-17	1 Einführung	
	1.1 Organisation der Vorlesung	
	1.2 Übersicht und Literatur	
	1.3 Geschichte	
	1.4 Einheiten und Einheitssysteme	
	1.5 Relativistische Kinematik	
	1.6 Streuexperimente	
KW-18	2 Experimentelle Methoden	
	2.1 Nachweis geladener Teilchen in Materie	
	2.2 Wechselwirkung von Elektron und Photon mit Materie	
	2.3 Hadronische Wechselwirkungen und Materie	
	2.4 Detektionstechniken	
	2.5 Detektorsysteme in der Teilchenphysik	
KW-19	2.6 Beschleuniger in der Teilchenphysik	
	3 Struktur der Materie	
		3.1 Kernradien und Formfaktoren
3.2 Struktur der Nukleonen		
KW-20	3.3 Fundamentaler Aufbau der Materie und ihre Wechselwirkungen	

- Über die Unschärferelation ist die Lebensdauer eines instabilen Zustands mit der Unschärfe in seiner Energie verknüpft:

$$\Delta t \Delta E \gtrsim \hbar \quad \Gamma = \frac{\hbar}{\tau}$$

Γ : Zerfallsbreite

τ : Lebensdauer

- Das Zerfallsgesetz läßt sich dann schreiben als:

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{\Gamma}{\hbar} \cdot t}$$

Kann ein Zustand über verschiedene Kanäle zerfallen, so ist die totale Zerfallsbreite die Summe der partiellen Zerfallsbreiten:

$$\Gamma = \sum_i \Gamma_i$$

Wellenfunktion eines zerfallenden Zustands

- Die Wellenfunktion eines zerfallenden Zustands kann geschrieben werden als:

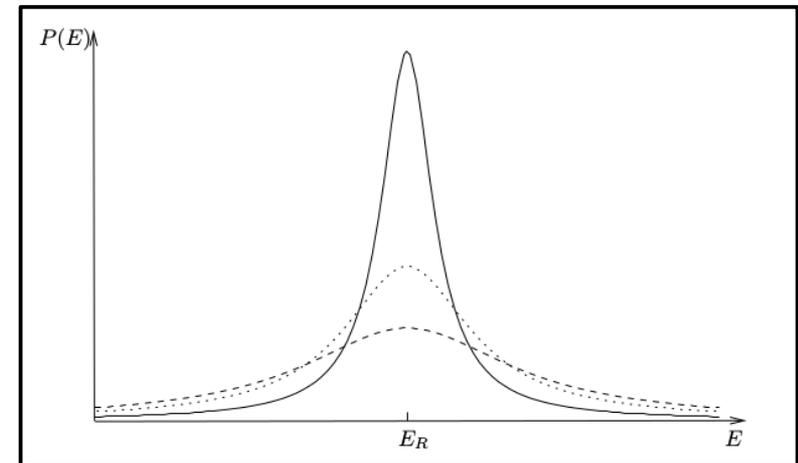
$$\psi(t) = \psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar}(E_R - i\frac{\Gamma}{2}) \cdot t} = \psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar} E_R \cdot t} e^{-\frac{\Gamma}{2\hbar} \cdot t}$$

$$I(t) = \psi^* \psi = \psi_0^2 e^{-\frac{\Gamma}{\hbar} \cdot t} \quad (\text{Intensität})$$

- Durch Fouriertransformation erhält man $\psi(E)$:

$$\begin{aligned} \psi(E) &= \int_0^{\infty} \psi(t) e^{\frac{i}{\hbar} E \cdot t} dt \\ &= \psi_0 \int_0^{\infty} e^{-\frac{i}{\hbar} ((E_R - E) - i\frac{\Gamma}{2}) \cdot t} dt \\ &= \psi_0 \frac{i\hbar}{(E_R - E) + i\Gamma/2} \end{aligned}$$

Energieverteilung instabiler Zustände für verschiedene Werte von Γ :



- Für die Energieverteilung eines instabilen Zustands erwartet man also:

$$P(E) = \psi^* \psi \propto \frac{\hbar^2}{(E_R - E)^2 + \Gamma^2/4} \quad (\text{Breit-Wigner-Resonanzformel})$$

Erzeugung \leftrightarrow Zerfall

- Für den Wirkungsquerschnitt der Reaktion $a + b \rightarrow c$ bei dem aus den Teilchen a und b ein Zustand c mit der zentralen Energie E_R erzeugt wird ist ebenfalls gegeben durch:

$$\sigma(E) \propto \psi^* \psi \propto \frac{\hbar^2}{(E_R - E)^2 + \Gamma^2/4}$$

- Wird ein Zustand durch einen Kanal i erzeugt und zerfällt durch einen Kanal j , so erhält man den Wirkungsquerschnitt für diesen Prozess (\rightarrow Erzeugung & Zerfall) aus:

$$\sigma_{ij}(E) \propto \frac{\Gamma_i \Gamma_j}{\Gamma} \cdot \sigma(E)$$