

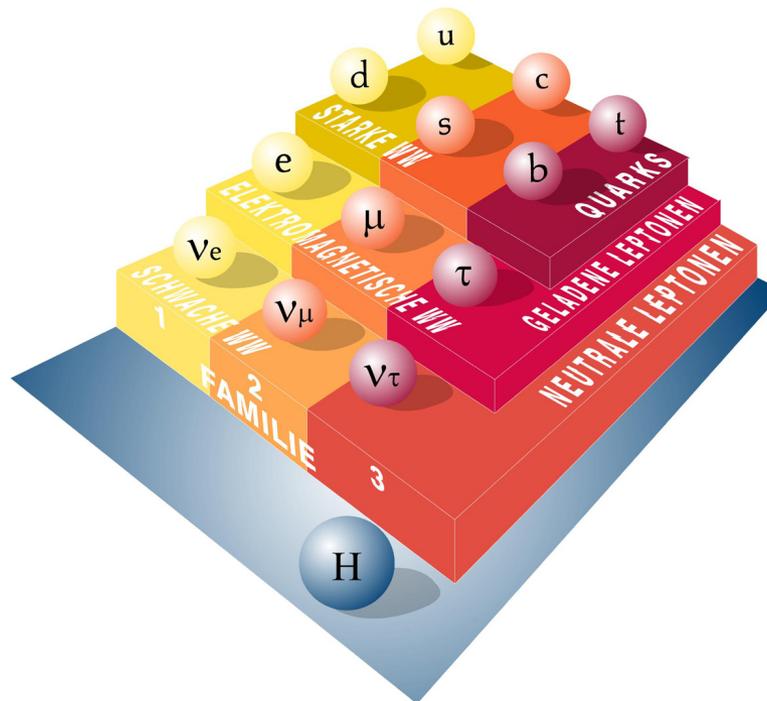
Moderne Experimentalphysik III: Kerne und Teilchen (Physik VI)

Günter Quast, Roger Wolf, Pablo Goldenzweig
30. Mai 2017

INSTITUTE OF EXPERIMENTAL PARTICLE PHYSICS (IEKP) – PHYSICS FACULTY



Kapitel 3.3: Fundamentaler Aufbau der Materie und ihre Wechselwirkungen

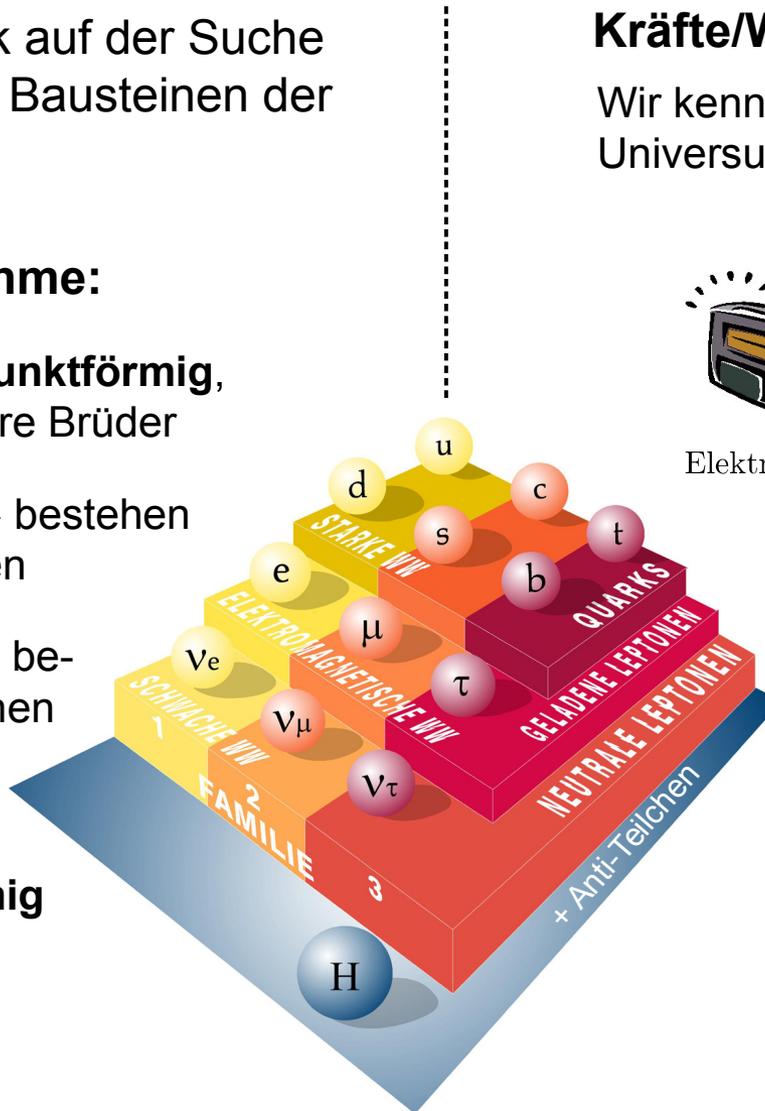


Was die Welt zusammenhält...

120 Jahre Physik auf der Suche nach den letzten Bausteinen der Materie

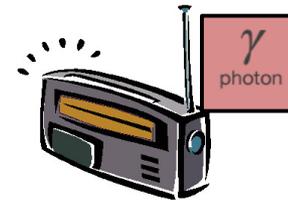
Bestandsaufnahme:

- Elektron → **punktförmig**, besitzt schwere Brüder
- Atomkerne → bestehen aus Nukleonen
- Nukleonen → bestehen Partonen (Quarks)
- Partonen → **punktförmig**

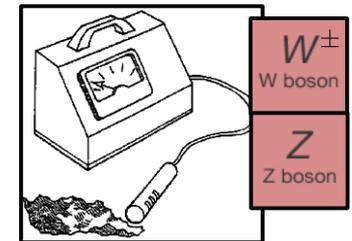
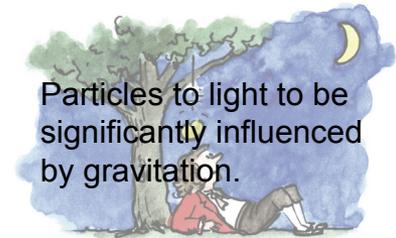


Kräfte/Wechselwirkungen:

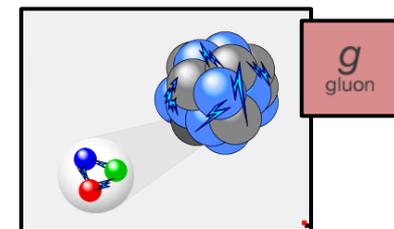
Wir kennen **vier fundamentale Kräfte** im Universum:



Elektromagnetismus



Schwache Kraft



Starke Kraft

- **Spin-1/2 Fermionen**

- **Bosonen mit Spin-1**

Drei Säulen des Standardmodells

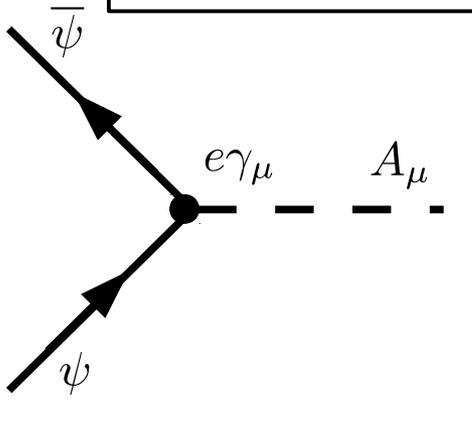
Quantenfeldtheorie

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi \phi^*$$

(Bosonen)

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi - e \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi$$

(Fermionen)



$$U(1)_Y \times SU(2)_L \times SU(3)_c$$

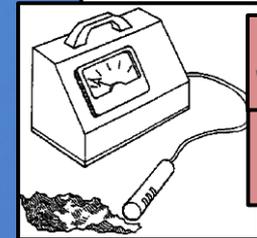


Elektromagnetismus

$$\psi e^{i\vartheta'}$$

γ
photon

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L e^{it_a \vartheta_a}$$



Schwache Kraft

W^\pm

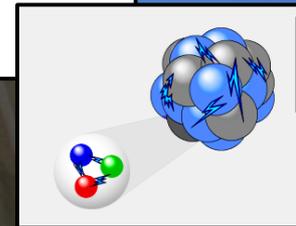
W boson

Z

Z boson

$$\begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix}_c e^{iT_a \vartheta_a}$$

Sy

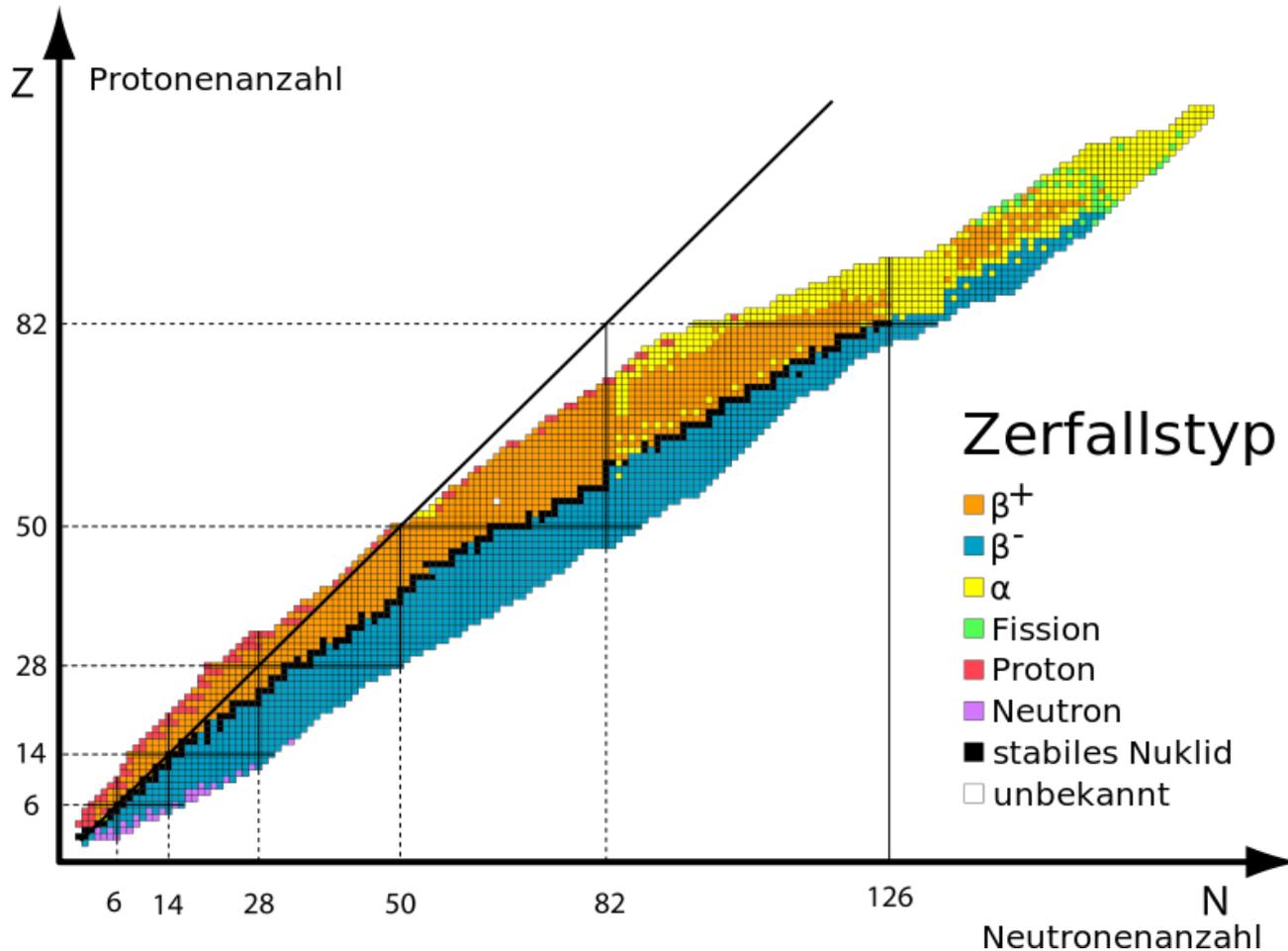


Starke Kraft

g
gluon

Kapitel 4: Kernmodelle

Kapitel 4.1: Eigenschaften stabiler Kerne



Eigenschaften von Kernen

- Atomkerne: **komplexe Vielteilchensysteme**
- Charakterisiert durch:
 - Kerndadius (siehe [VL-08 Folie 8](#))
 - Masse/Bindungsenergie
 - Quantenzahlen (→ spiegeln Symmetrien wider, Beispiele: Spin, Parität, Isospin ...)

Spin & Parität

- **Spin** des Kerns gegeben durch Spin der Nukleonen \vec{S} (und Bahndrehimpuls \vec{L})
- **Parität** → Symmetrie der Wellenfunktion unter Spiegelungen um Ursprung

$$P : \psi(\vec{r}, t) \rightarrow \psi'(-\vec{r}, t) = P \cdot \psi(-\vec{r}, t) = \pm 1 \cdot \psi(-\vec{r}, t)$$

- Multiplikative Quantenzahl → Eigenwerte ± 1
- Im Zentralpotential (z.B. Wasserstoffatom):
 - Winkelanteil der Wellenfunktion gegeben durch Kugelflächenfunktionen

$$\psi(\vec{r}, t) = R(r) \cdot Y_\ell^m(\theta, \varphi)$$

$$P \cdot Y_\ell^m(\theta, \varphi) = Y_\ell^m(\theta - \pi, \varphi) = (-1)^\ell Y_\ell^m(\theta, \varphi)$$

Isospin (→ kurz für “Isotopenspin”)

- Proton & Neutronen haben gleiche Eigenschaften unter starker Wechselwirkung (z.B. Streuung an **Spiegelkernen**, siehe auch Folie 11)
- Für starke Wechselwirkung: **Proton = Neutron** (→ “Zustände” des Nukleons)

$$\begin{pmatrix} |p\rangle \\ |n\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |T = \frac{1}{2}, T_3 = +\frac{1}{2}\rangle \\ |T = \frac{1}{2}, T_3 = -\frac{1}{2}\rangle \end{pmatrix} \quad (\text{Isospin-Dublett})^{(1)}$$

- Fasse Proton und Neutron zu **Isospin-Dublett** zusammen. Das Dublett verhält sich unter starker Wechselwirkung wie ein Teilchen
- $SU(2)$ Symmetrie in Hyperraum (analog zu Spin- $\frac{1}{2}$ in QM) → Neue Quantenzahlen zur Beschreibung des Dublett Zustandes (T und T_3)

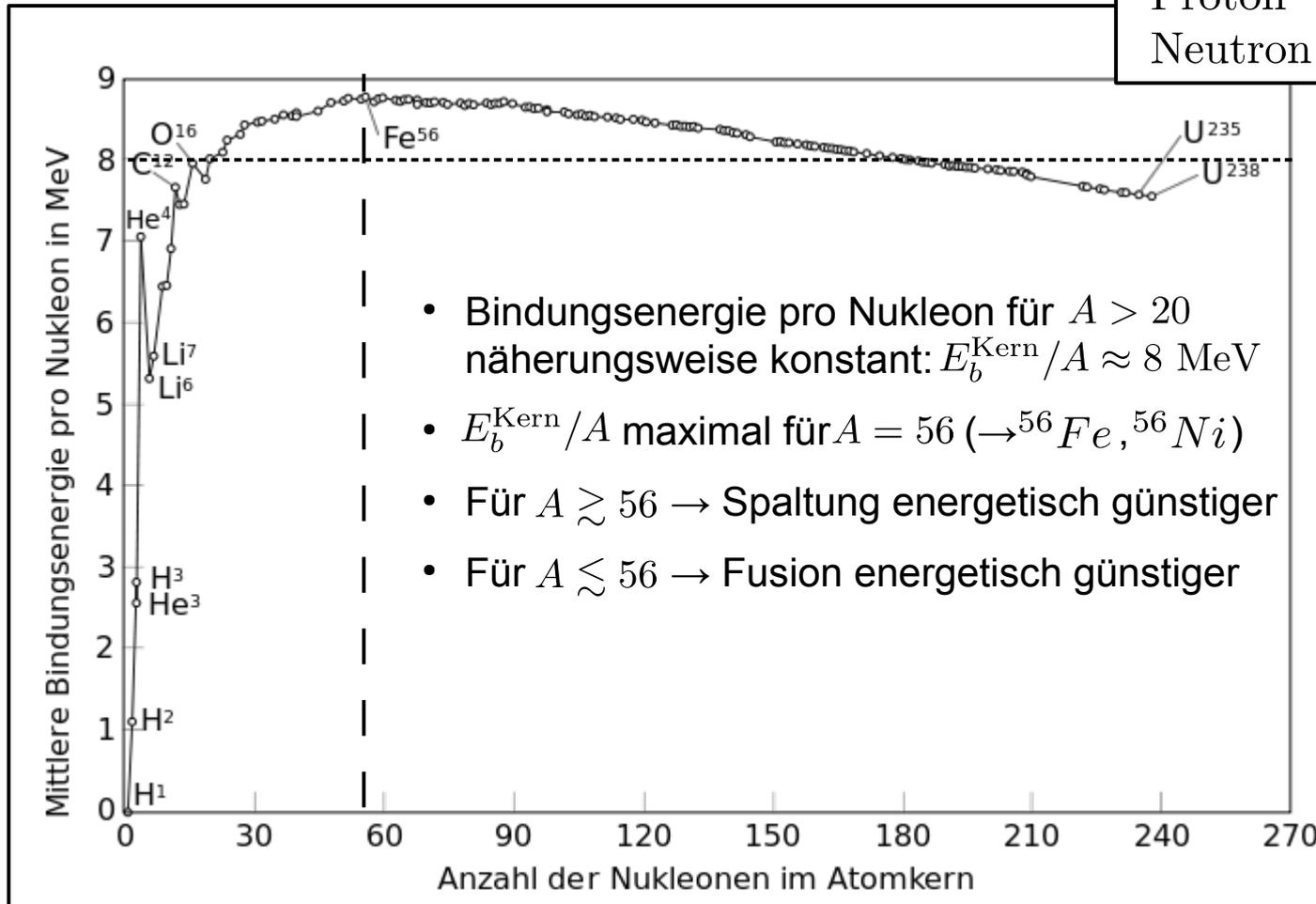
Starke Wechselwirkung erhält alle Symmetrien!

Kernenmasse

- Kernmasse = \sum Nukleonmassen – **Bindungsenergie des Kerns**

$$m_K(Z, A) = Z \cdot m_p + N \cdot m_n - E_b^{\text{Kern}}(Z, A)$$

Teilchen	Masse (MeV)
Proton	938.272046(21)
Neutron	939.565379(21)



Isotope, Isotone, Isobare

Isobare ($A = N + Z = const$)

Isotone ($N = const$)

Isotope
($Z = const$)

<p>Be 9,01218 σ 0,0092</p> <p>H 2 0,015 σ 0,00053</p> <p>H 3 12,346 a β 0,02</p>	<p>↑ 8</p> <p>7</p> <p>6</p> <p>5</p>	<p>chemisches Symbol</p> <p>Masse in u gemittelt über alle radioaktiven Isotope</p> <p>Einfangquerschnitte für Neutronen in barn = 10^{-28} m^2</p> <p>rot: stabile Isotope</p> <p>Massenzahl A</p> <p>Isotopenhäufigkeit in %</p> <p>Einfangquerschnitt σ_n in barn</p> <p>weiß: instabile Isotope</p> <p>Massenzahl A</p> <p>mittlere Lebensdauer</p> <p>Energie der emittierten β, γ in MeV,</p> <p>n = Neutronenemitter</p> <p>p = Protonenemitter</p>	<p>O</p> <p>15,9994 σ 0,000270</p>		<p>O 13</p> <p>8,9 ms $\beta^+ 1,9$ (p 1,44; 8,44; 0,93 ...)</p>	<p>O 14</p> <p>70,59 s $\beta^+ 1,8$; 4,1 γ 2313</p>	<p>O 15</p> <p>2,03 m $\beta^+ 1,7$ n $\sigma \gamma$</p>	<p>O 16</p> <p>99,756 σ 0,000178</p>	
			<p>N</p> <p>14,0067 σ_{abs} 1,85</p>		<p>N 12</p> <p>11,0 ms $\beta^+ 16,4$ γ 439 ($\sigma \sim 1,6$; 2,3)</p>	<p>N 13</p> <p>9,96 m $\beta^+ 1,2$ n $\sigma \gamma$</p>	<p>N 14</p> <p>99,64 σ 0,075 $\sigma_{n,p}$ 1,81</p>	<p>N 15</p> <p>0,36 σ 0,000024</p>	
			<p>C</p> <p>12,011 σ_{abs} 0,0034</p>	<p>C 9</p> <p>126,5 ms β 3,5 (p 8,24; 10,92)</p>	<p>C 10</p> <p>19,3 s $\beta^+ 1,9$ γ 718, 1022</p>	<p>C 11</p> <p>20,3 m β 1,0 n $\sigma \gamma$</p>	<p>C 12</p> <p>98,89 σ 0,0034</p>	<p>C 13</p> <p>1,11 σ 0,0009</p>	<p>C 14</p> <p>5736 a β 0,2 n $\sigma \gamma$</p>
			<p>B</p> <p>10,81 σ_{abs} 759</p>	<p>B 8</p> <p>762 ms β 14,1 ($2\sigma \sim 1,6$; 8,3)</p>	<p>B 9</p> <p>p</p>	<p>B 10</p> <p>20 σ 0,5 $\sigma_{n,p}$ 3836</p>	<p>B 11</p> <p>80 σ 0,0005</p>	<p>B 12</p> <p>20,3 ms β 13,4 γ 439 (σ 0,2 ...)</p>	<p>B 13</p> <p>17,33 ms β 13,4 γ 3684 (σ 3,6; 2,4)</p>
4	<p>Be</p> <p>9,01218 σ 0,0092</p>		<p>Be 7</p> <p>53,4 d γ 478 $\sigma_{n,p}$ 48000</p>	<p>Be 8</p> <p>2 σ 0,05</p>	<p>Be 9</p> <p>100 σ 0,0092</p>	<p>Be 10</p> <p>$1,6 \cdot 10^6$ a β 0,8 n $\sigma \gamma$</p>	<p>Be 11</p> <p>13,8 s β 11,5 γ 2125 8791 (σ)</p>	<p>Be 12</p> <p>11, ms β 11, (σ)</p>	
3	<p>Li</p> <p>6,941 σ 70,7</p>		<p>Li 5</p> <p>p</p>	<p>Li 6</p> <p>7,5 σ 0,028 $\sigma_{n,p}$ 940</p>	<p>Li 7</p> <p>92,5 σ 0,037</p>	<p>Li 8</p> <p>844 ms β 12,5 ($2n \sim 1,6$)</p>	<p>Li 9</p> <p>176 ms β 11,0; 13,5 (n 0,7 ...)</p>	<p>Li 11</p> <p>9,7 ms</p>	
2	<p>He</p> <p>4,00260 $\sigma_{abs} < 0,05$</p>	<p>He 3</p> <p>0,00013 σ 0,00008 $\sigma_{n,p}$ 5327</p>	<p>He 4</p> <p>99,99987 σ 0</p>	<p>He 5</p> <p>n</p>	<p>He 6</p> <p>802 ms β 3,5</p>	<p>He 7</p> <p>n</p>	<p>He 8</p> <p>122 ms $\beta \gamma \sim 10$ γ 981 (n)</p>		
1	<p>H</p> <p>1,0079 σ 0,332</p>	<p>H 1</p> <p>99,985 σ 0,332</p>	<p>H 2</p> <p>0,015 σ 0,00053</p>	<p>H 3</p> <p>12,346 a β 0,02</p>					
	N →	1	2	3	4	5	6	7	8

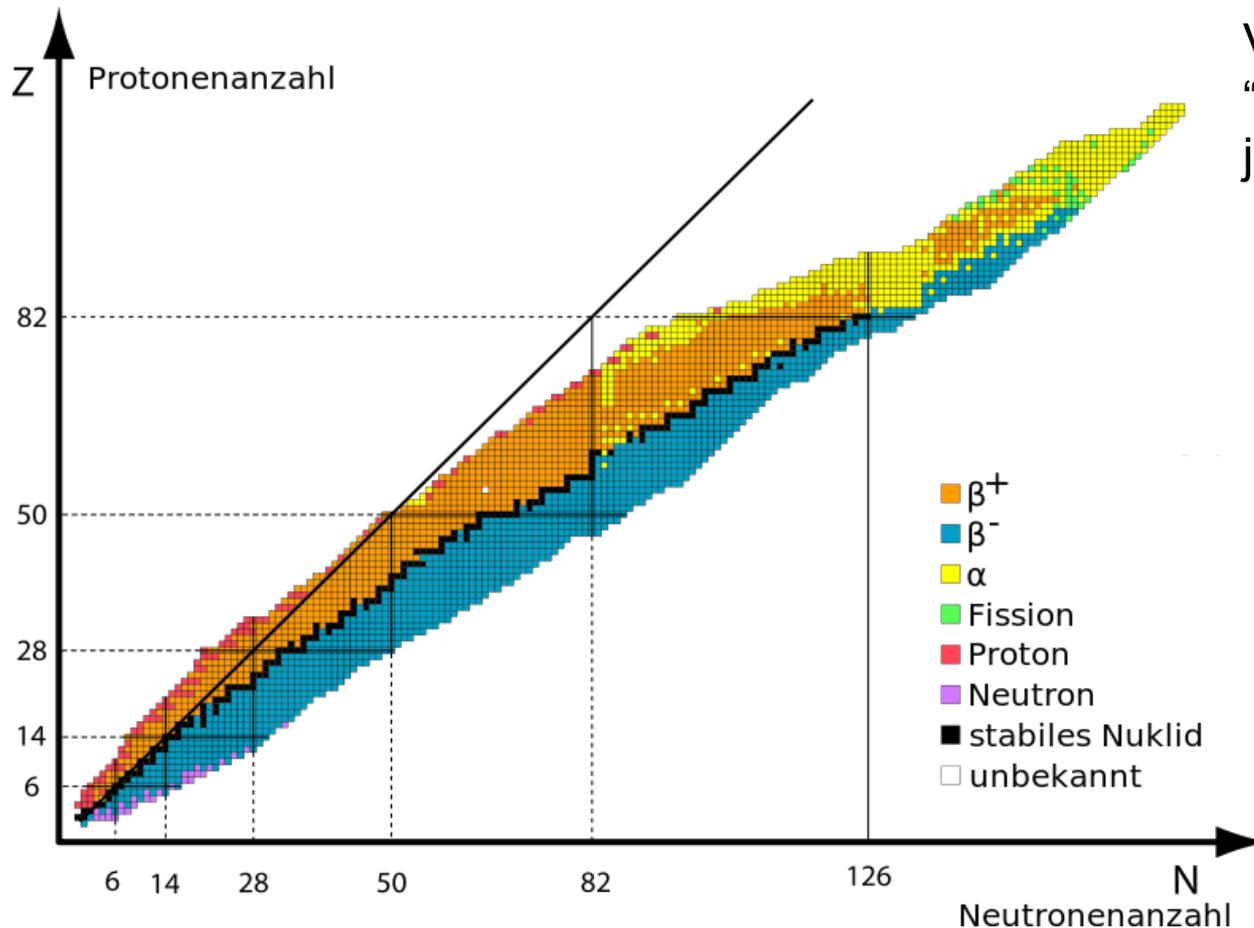
Spezialfall: Spiegelkerne

${}^{14}_6\text{C} (Z = 6, N = 8)$

${}^{14}_8\text{O} (Z = 8, N = 6)$

Wann sind Kerne stabil?

- Für schwere Kerne $N > Z$ (Kompensation der Coulombabstoßung)
- **“Tal der Stabilität”**: $Z = \frac{A}{1.98 + 0.015 A^{1/3}}$ (Verlauf schwarze Punkte, empirisch)



Vermutete weitere
“Insel der Stabilität”
 jenseits von $A = 300$

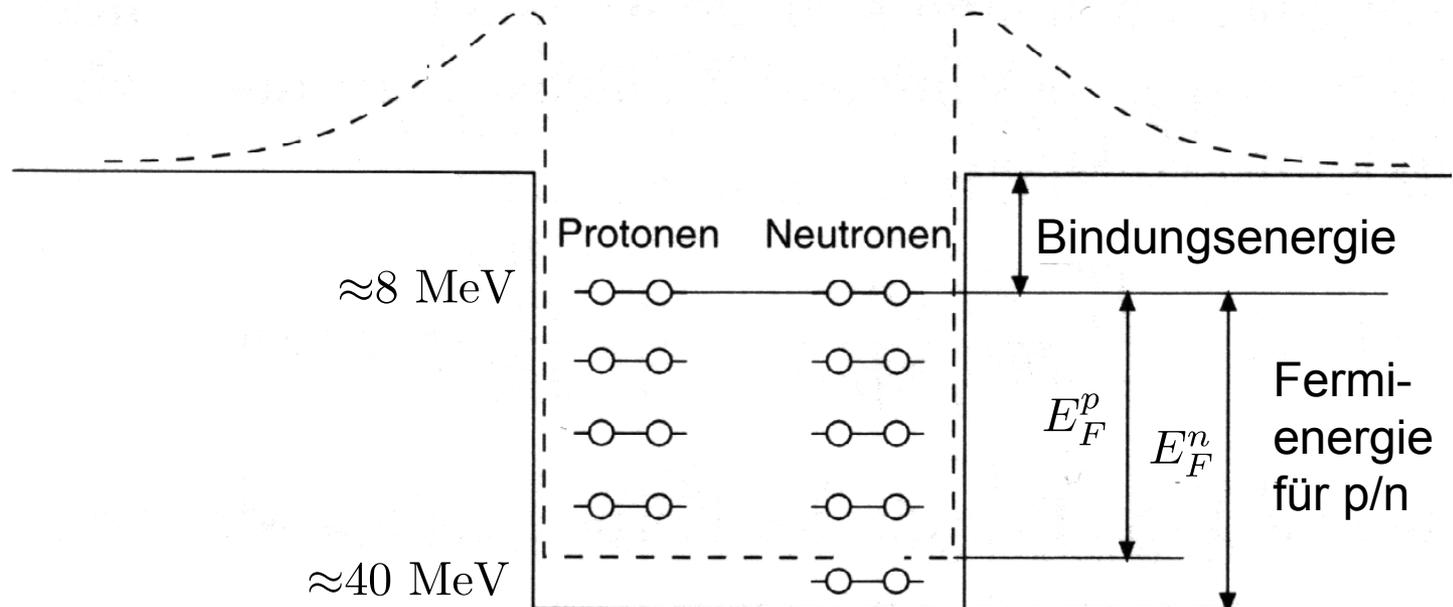
Kapitel 4.2: Fermigas und Tröpfchenmodell

Kernpotential

- Beschreibung: Verlauf der Bindungsenergie → **Iteration-0**
- Unterscheide zwei unabhängige Systeme: **Protonen** und **Neutronen**
- Kernpotential aufgrund der starken Wechselwirkung:

Potentialtopf +
Coulombpotential

Potentialtopf ("Kasten")



Fermionengas

- Beschreibung: Verlauf der Bindungsenergie → **Iteration-0**
- Unterscheide zwei unabhängige Systeme: **Protonen** und **Neutronen**
- Kernpotential aufgrund der starken Wechselwirkung:

Potentialtopf +
Coulombpotential

Potentialtopf ("Kasten")

Anzahl Zustände im Kernpotential:

$(2 \pi \hbar)^3$ (Phasenraumvolumen eines Fermions)

$$N_{p/n} = \frac{2}{(2 \pi \hbar)^3} \int d^3 \vec{r} \int d^3 \vec{p}$$

$$= \frac{2V}{(2 \pi \hbar)^3} 4 \pi \int p^2 dp$$

$$= \frac{V \cdot (p_F^{p/n})^3}{3 \pi^2 \hbar^3} = \frac{(4/3 \pi R_0^3 A) \cdot (p_F^{p/n})^3}{3 \pi^2 \hbar^3}$$

- Fermiimpuls/energie für p/n signifikant!
- Nukleonen in Kern quasi-entartetes Fermigas

mit: $R_0 = 1.2 \text{ fm}$ vgl VL-08 Folie 8

Fermionengas

- Beschreibung: Verlauf der Bindungsenergie → **Iteration-0**
- Unterscheide zwei unabhängige Systeme: **Protonen** und **Neutronen**
- Kernpotential aufgrund der starken Wechselwirkung:

Potentialtopf +
Coulombpotential

Potentialtopf ("Kasten")

Anm.: in der üblichen Anwendung des freien Elektronengases ist die Integration gerechtfertigt. Im Fall von Kernen mit nur wenigen Nukleonen wäre eine Zustandssumme mit diskreten Energieniveaus eher angebracht. Hier liegen aber auch genau die Grenzen dieses einfachsten Modells.

p/n signifikant!

- Nukleonen in Kern quasi-entartetes Fermigas

Anzahl Zustände im Kernpotential:

$(2 \pi \hbar)^3$ (Phasenraumvolumen eines Fermions)

$$N_{p/n} = \frac{2}{(2 \pi \hbar)^3} \int d^3 \vec{r} \int d^3 \vec{p}$$

$$= \frac{2V}{(2 \pi \hbar)^3} 4 \pi \int p^2 dp$$

$$= \frac{V \cdot (p_F^{p/n})^3}{3 \pi^2 \hbar^3} = \frac{(4/3 \pi R_0^3 A) \cdot (p_F^{p/n})^3}{3 \pi^2 \hbar^3}$$

mit: $R_0 = 1.2 \text{ fm}$ vgl VL-08 Folie 8

Tröpfchenmodell

- Beschreibung: Verlauf der Bindungsenergie → **Iteration-1** (F. v. Weizsäcker 1935, H. Bethe 1936)
 - Kernmaterie inkompressibel
 - Kräfte zwischen Nukleonen kurzreichweitig
 - Klassische Analogie Wassertropfen (van-der-Waals-Kräfte)



Tröpfchenmodell

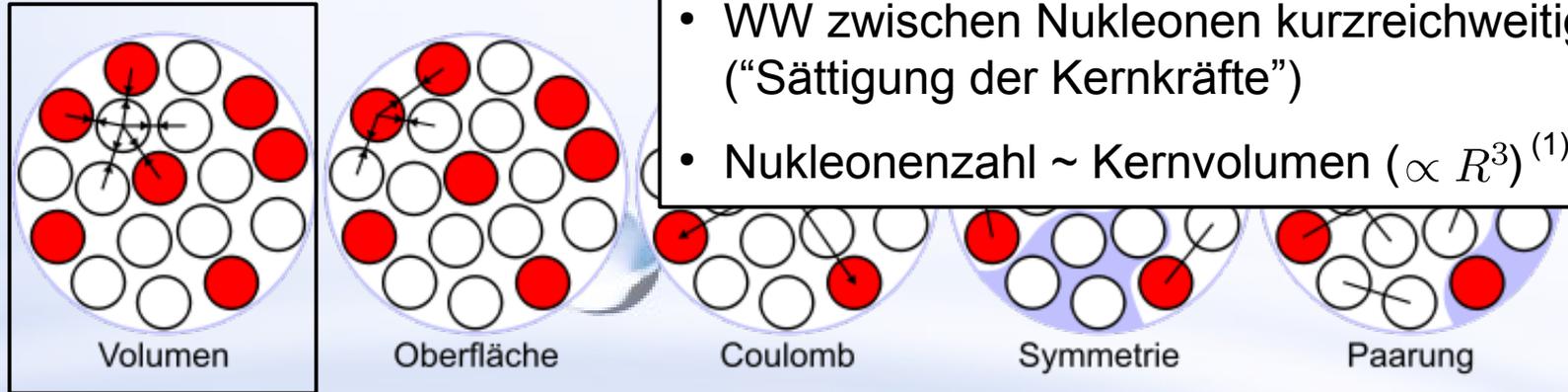
- Beschreibung: Verlauf der Bindungsenergie → **Iteration-1** (F. v. Weizsäcker 1935, H. Bethe 1936)
 - Kernmaterie inkompressibel
 - Kräfte zwischen Nukleonen kurzreichweitig 
 - Klassische Analogie Wassertropfen (van-der-Waals-Kräfte)

$$E_b^{\text{Kern}}(Z, A) =$$

$$\underbrace{\kappa_V \cdot A}_{\text{Volumen}} - \underbrace{\kappa_O \cdot A^{2/3}}_{\text{Oberfläche}} - \underbrace{\kappa_C \cdot \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}}}_{\text{Coulomb}} - \underbrace{\kappa_S \cdot \frac{(A/2 - Z)^2}{A}}_{\text{Symmetrie}} + \underbrace{\kappa_P \cdot \begin{cases} +A^{-3/4} & \text{gg} \\ 0 & \text{ug/gu} \\ -A^{-3/4} & \text{uu} \end{cases}}_{\text{Paarung}}$$

$$\begin{array}{lll} \kappa_V = 15.8 \text{ MeV} & \kappa_O = 18.3 \text{ MeV} & \kappa_C = 0.714 \text{ MeV} \\ \kappa_S = 23.2 \text{ MeV} & \kappa_P = 12 \text{ MeV} & \end{array}$$

Tröpfchenmodell



- Kräfte zwischen Nukleonen erhöhen Bindungsenergie
- WW zwischen Nukleonen kurzreichweitig ("Sättigung der Kernkräfte")
- Nukleonenzahl \sim Kernvolumen ($\propto R^3$)⁽¹⁾

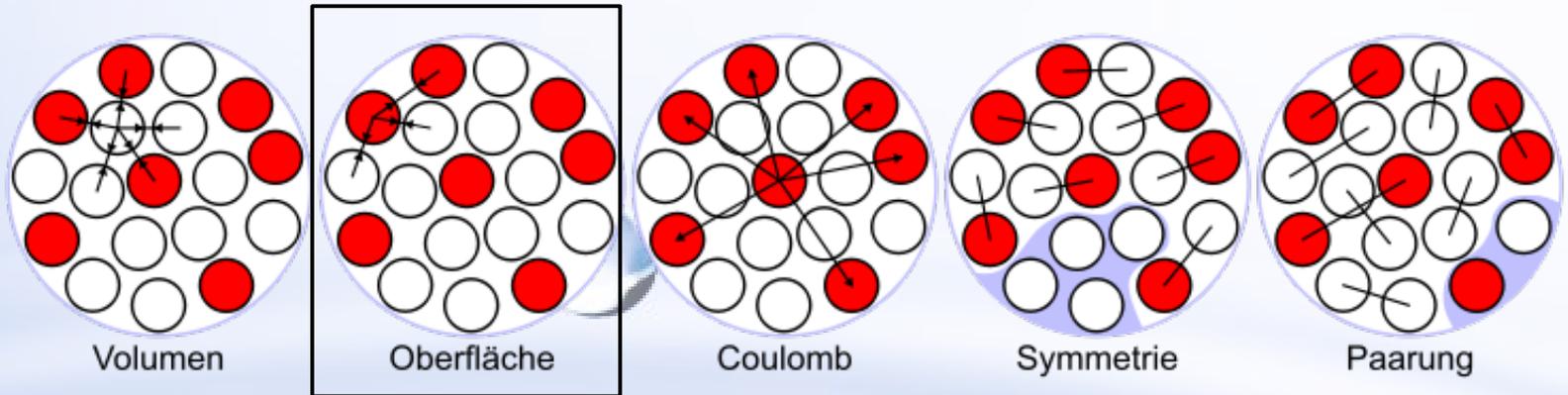
$$E_b^{\text{Kern}}(Z, A) =$$

$$\underbrace{\kappa_V \cdot A}_{\text{Volumen}} - \underbrace{\kappa_O \cdot A^{2/3}}_{\text{Oberfläche}} - \underbrace{\kappa_C \cdot \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}}}_{\text{Coulomb}} - \underbrace{\kappa_S \cdot \frac{(A/2 - Z)^2}{A}}_{\text{Symmetrie}} + \underbrace{\kappa_P \cdot \begin{cases} +A^{-3/4} & \text{gg} \\ 0 & \text{ug/gu} \\ -A^{-3/4} & \text{uu} \end{cases}}_{\text{Paarung}}$$

$$\begin{aligned} \kappa_V &= 15.8 \text{ MeV} & \kappa_O &= 18.3 \text{ MeV} & \kappa_C &= 0.714 \text{ MeV} \\ \kappa_S &= 23.2 \text{ MeV} & \kappa_P &= 12 \text{ MeV} & & \end{aligned}$$

Tröpfchenmodell

- Weniger Nachbarn \rightarrow Reduktion der Bindungsenergie ($\propto A^{2/3}$)



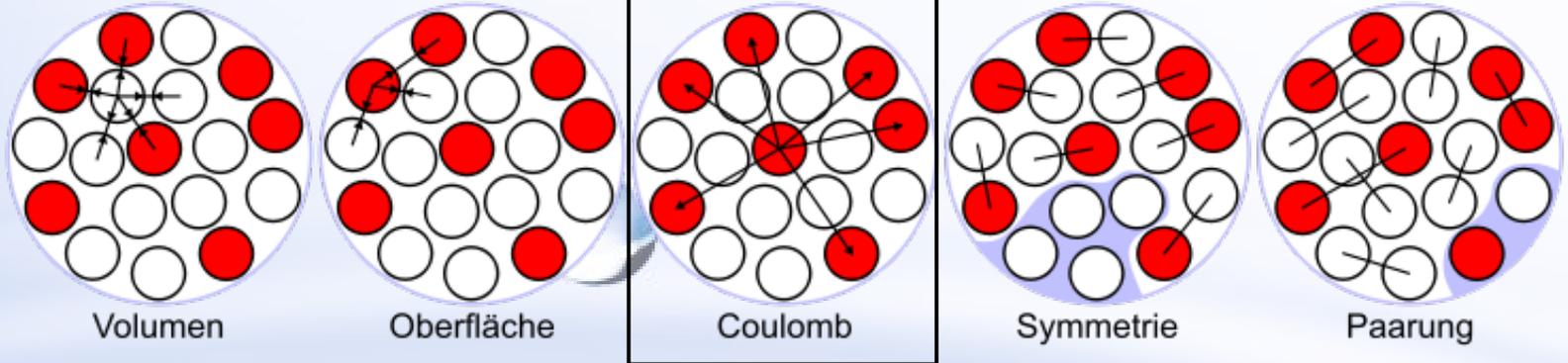
$$E_b^{\text{Kern}}(Z, A) =$$

$$\underbrace{\kappa_V \cdot A}_{\text{Volumen}} - \underbrace{\kappa_O \cdot A^{2/3}}_{\text{Oberfläche}} - \underbrace{\kappa_C \cdot \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}}}_{\text{Coulomb}} - \underbrace{\kappa_S \cdot \frac{(A/2 - Z)^2}{A}}_{\text{Symmetrie}} + \underbrace{\kappa_P \cdot \begin{cases} +A^{-3/4} & \text{gg} \\ 0 & \text{ug/gu} \\ -A^{-3/4} & \text{uu} \end{cases}}_{\text{Paarung}}$$

$$\begin{aligned} \kappa_V &= 15.8 \text{ MeV} & \kappa_O &= 18.3 \text{ MeV} & \kappa_C &= 0.714 \text{ MeV} \\ \kappa_S &= 23.2 \text{ MeV} & \kappa_P &= 12 \text{ MeV} & & \end{aligned}$$

Tröpfchenmodell

- Coulomb-Abstoßung der Protonen ($\propto Z^2$)
- $Z(Z - 1)$ Paare im Abstand $R \propto A^{1/3}$

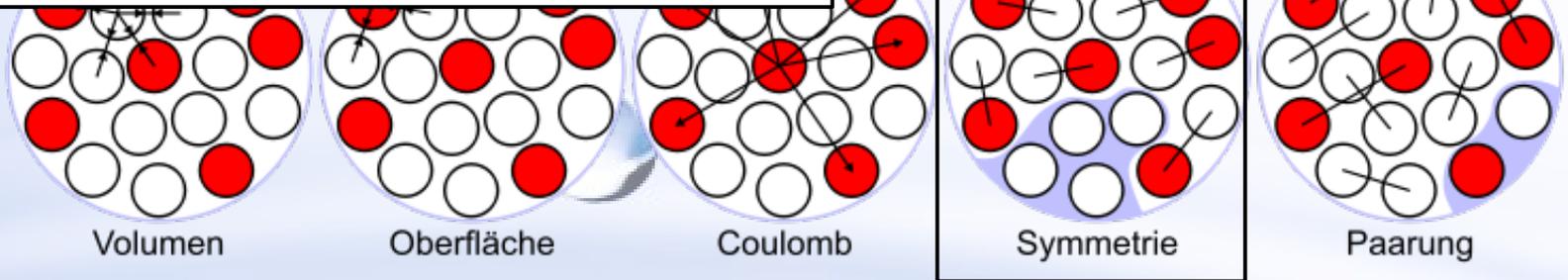


$$E_b^{\text{Kern}}(Z, A) =$$

$$\underbrace{\kappa_V \cdot A}_{\text{Volumen}} - \underbrace{\kappa_O \cdot A^{2/3}}_{\text{Oberfläche}} - \underbrace{\kappa_C \cdot \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}}}_{\text{Coulomb}} - \underbrace{\kappa_S \cdot \frac{(A/2 - Z)^2}{A}}_{\text{Symmetrie}} + \underbrace{\kappa_P \cdot \begin{cases} +A^{-3/4} & \text{gg} \\ 0 & \text{ug/gu} \\ -A^{-3/4} & \text{uu} \end{cases}}_{\text{Paarung}}$$

$$\begin{aligned} \kappa_V &= 15.8 \text{ MeV} & \kappa_O &= 18.3 \text{ MeV} & \kappa_C &= 0.714 \text{ MeV} \\ \kappa_S &= 23.2 \text{ MeV} & \kappa_P &= 12 \text{ MeV} & & \end{aligned}$$

- p/n-Gas jeweils unabh. voneinander bis $E_F^{p/n}$ angefüllt
- Mehr p/n \rightarrow höhere Fermienergie \rightarrow geringere Bindungsenergie

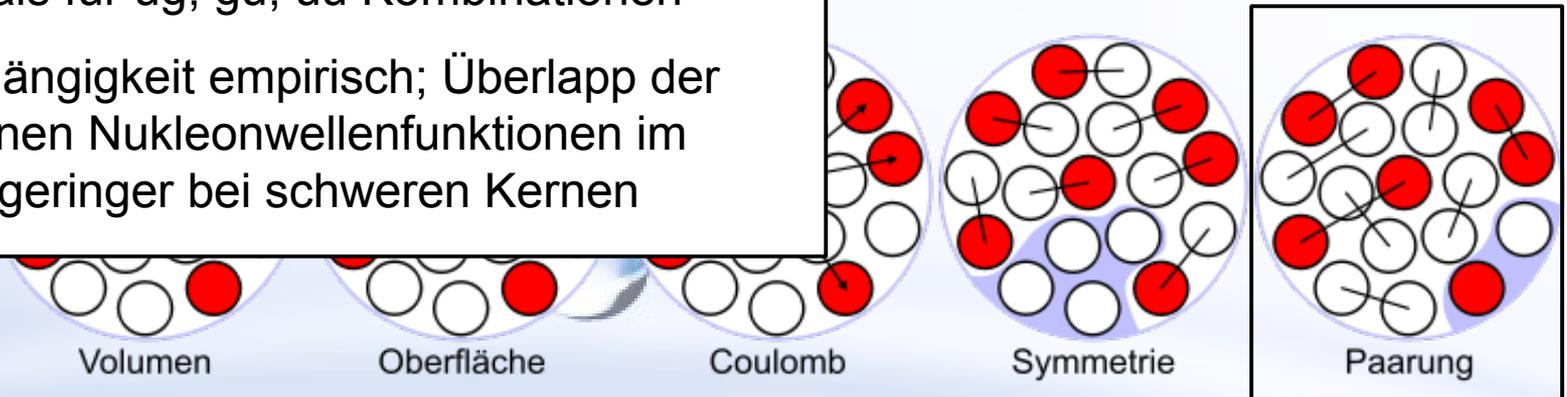


$$E_b^{\text{Kern}}(Z, A) =$$

$$\underbrace{\kappa_V \cdot A}_{\text{Volumen}} - \underbrace{\kappa_O \cdot A^{2/3}}_{\text{Oberfläche}} - \underbrace{\kappa_C \cdot \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}}}_{\text{Coulomb}} - \underbrace{\kappa_S \cdot \frac{(A/2 - Z)^2}{A}}_{\text{Symmetrie}} + \underbrace{\kappa_P \cdot \begin{cases} +A^{-3/4} & \text{gg} \\ 0 & \text{ug/gu} \\ -A^{-3/4} & \text{uu} \end{cases}}_{\text{Paarung}}$$

$$\begin{aligned} \kappa_V &= 15.8 \text{ MeV} & \kappa_O &= 18.3 \text{ MeV} & \kappa_C &= 0.714 \text{ MeV} \\ \kappa_S &= 23.2 \text{ MeV} & \kappa_P &= 12 \text{ MeV} & & \end{aligned}$$

- Für $(Z, N) \rightarrow$ (gerade, gerade) = gg, Nukleonenspins gepaart \rightarrow stärkere Bindung als für ug, gu, uu Kombinationen
- A-Abhängigkeit empirisch; Überlapp der einzelnen Nukleonwellenfunktionen im Mittel geringer bei schweren Kernen



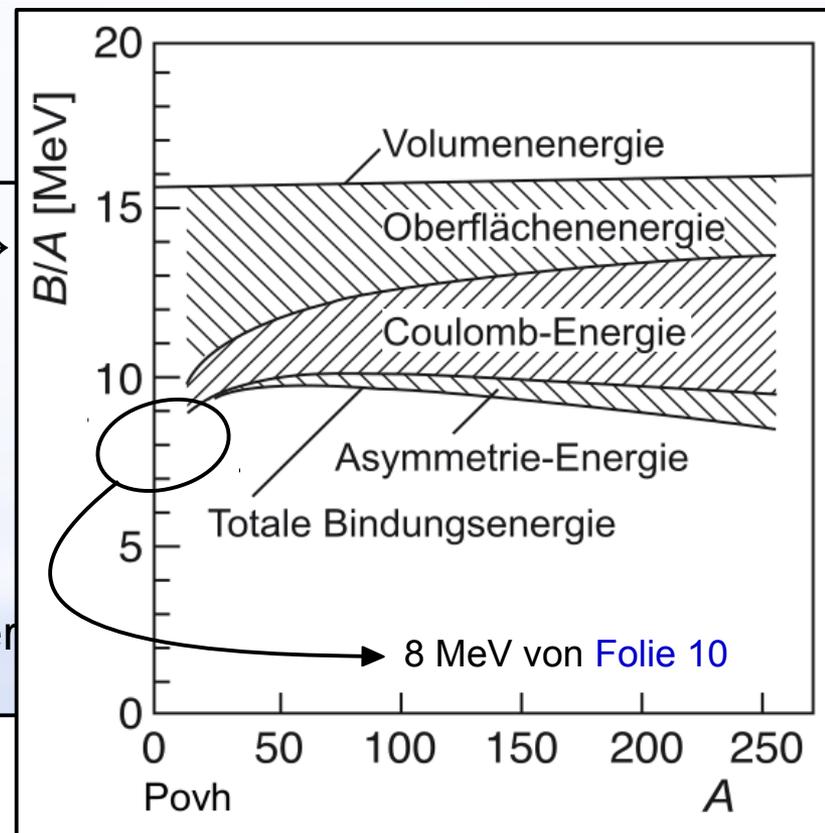
$$E_b^{\text{Kern}}(Z, A) =$$

$$\underbrace{\kappa_V \cdot A}_{\text{Volumen}} - \underbrace{\kappa_O \cdot A^{2/3}}_{\text{Oberfläche}} - \underbrace{\kappa_C \cdot \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}}}_{\text{Coulomb}} - \underbrace{\kappa_S \cdot \frac{(A/2 - Z)^2}{A}}_{\text{Symmetrie}} + \underbrace{\kappa_P \cdot \begin{cases} +A^{-3/4} & \text{gg} \\ 0 & \text{ug/gu} \\ -A^{-3/4} & \text{uu} \end{cases}}_{\text{Paarung}}$$

$$\begin{aligned} \kappa_V &= 15.8 \text{ MeV} & \kappa_O &= 18.3 \text{ MeV} & \kappa_C &= 0.714 \text{ MeV} \\ \kappa_S &= 23.2 \text{ MeV} & \kappa_P &= 12 \text{ MeV} & & \end{aligned}$$

Tröpfchenmodell

- Beschreibung: Verlauf der Bindungsenergie → (H. Bethe 1936)
- Kernmaterie inkompressibel
- Kräfte zwischen Nukleonen kurzreichweitig 
- Klassische Analogie Wassertropfen (van-der



$$E_b^{\text{Kern}}(Z, A) =$$

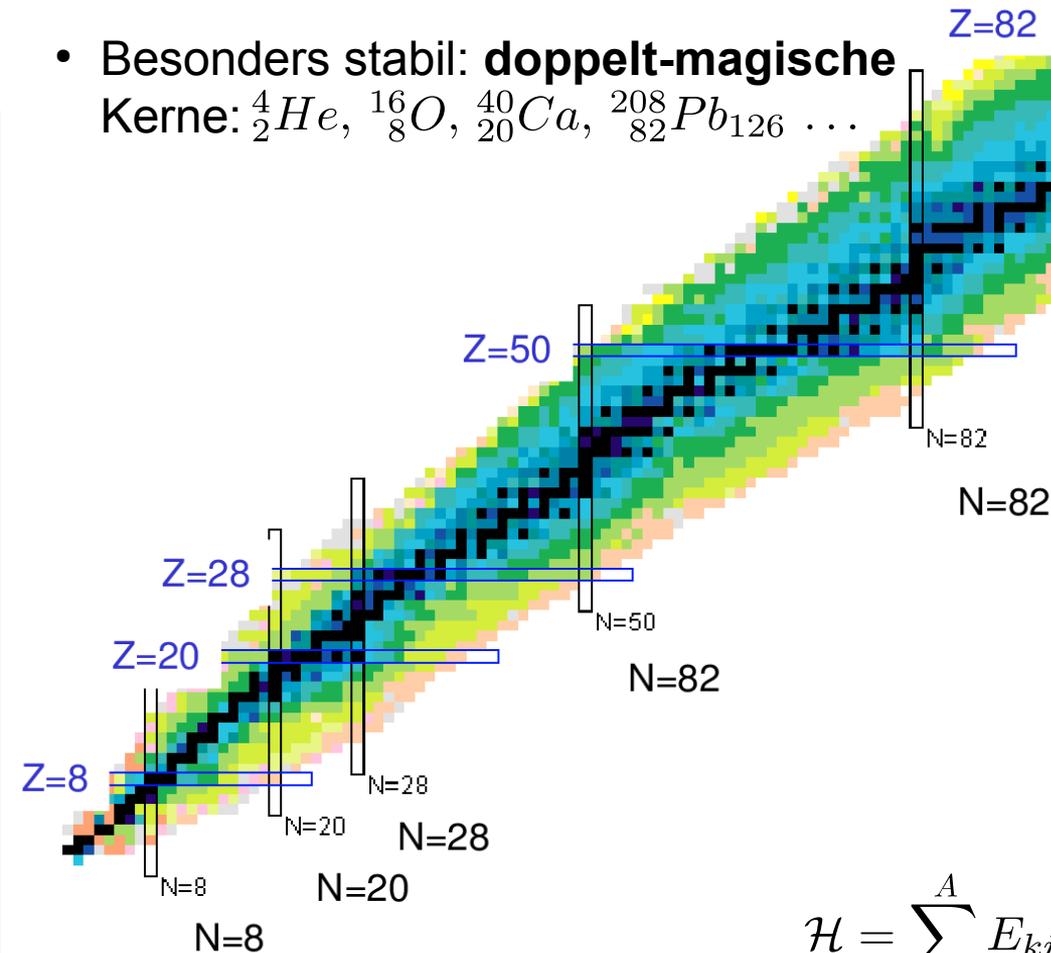
$$\underbrace{\kappa_V \cdot A}_{\text{Volumen}} - \underbrace{\kappa_O \cdot A^{2/3}}_{\text{Oberfläche}} - \underbrace{\kappa_C \cdot \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}}}_{\text{Coulomb}} - \underbrace{\kappa_S \cdot \frac{(A/2 - Z)^2}{A}}_{\text{Symmetrie}} + \underbrace{\kappa_P \cdot \begin{cases} +A^{-3/4} & \text{gg} \\ 0 & \text{ug/gu} \\ -A^{-3/4} & \text{uu} \end{cases}}_{\text{Paarung}}$$

$$\begin{aligned} \kappa_V &= 15.8 \text{ MeV} & \kappa_O &= 18.3 \text{ MeV} & \kappa_C &= 0.714 \text{ MeV} \\ \kappa_S &= 23.2 \text{ MeV} & \kappa_P &= 12 \text{ MeV} & & \end{aligned}$$

Kapitel 4.3: Schalenmodell

Magische Zahlen

- Experimentelle Beobachtung: **“magische Zahlen”** jeweils für Protonen & Neutronen
→ Kerne bemerkenswert stabil
- Besonders stabil: **doppelt-magische**
Kerne: ${}^4_2\text{He}$, ${}^{16}_8\text{O}$, ${}^{40}_{20}\text{Ca}$, ${}^{208}_{82}\text{Pb}$...



- Suggestiert Schalenabschlüsse (→ analog zu Atomphysik)
- Unterschied zu Atomphysik: kein dominierendes Zentralpotential!
- Beschreibung durch mittleres Potential (→ Mehrelektronensystem in Atomphysik)

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^A E_{kin,i} + \sum_{i < j}^A V_{ij} = \sum_{i=1}^A \left(E_{kin,i} + \tilde{V}_i \right) + V_{\text{Rest}} \rightarrow \text{klein}$$

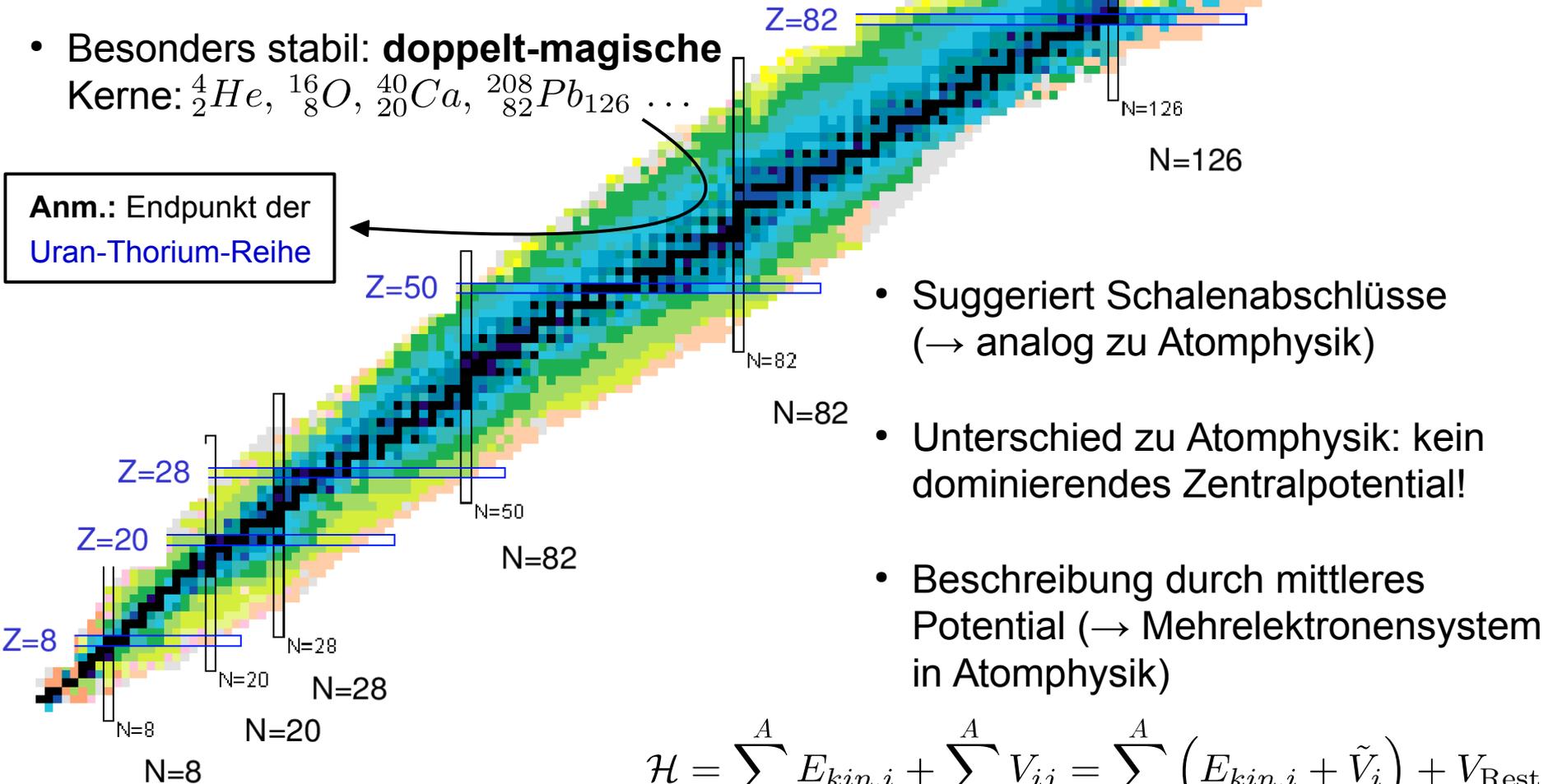
Magische Zahlen

- Experimentelle Beobachtung: **“magische Zahlen”** jeweils für Protonen & Neutronen
→ Kerne bemerkenswert stabil

- Besonders stabil: **doppelt-magische**

Kerne: ${}^4_2\text{He}$, ${}^{16}_8\text{O}$, ${}^{40}_{20}\text{Ca}$, ${}^{208}_{82}\text{Pb}$ ${}_{126} \dots$

Anm.: Endpunkt der
Uran-Thorium-Reihe



- Suggestiert Schalenabschlüsse (→ analog zu Atomphysik)
- Unterschied zu Atomphysik: kein dominierendes Zentralpotential!
- Beschreibung durch mittleres Potential (→ Mehrelektronensystem in Atomphysik)

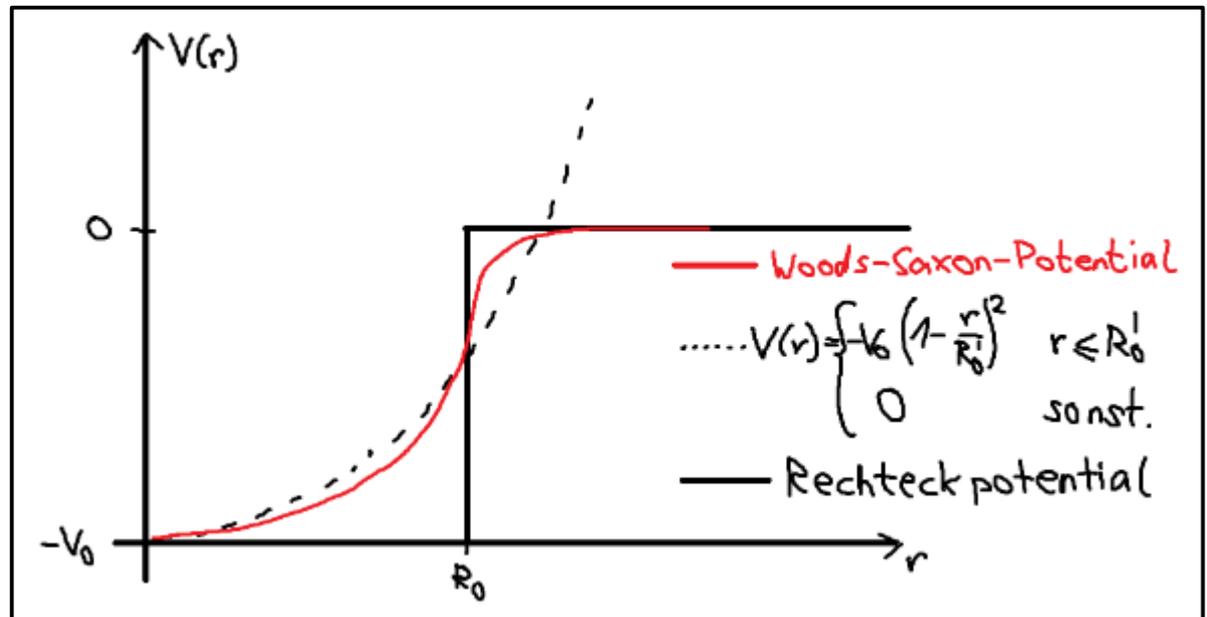
$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^A E_{kin,i} + \sum_{i < j}^A V_{ij} = \sum_{i=1}^A \left(E_{kin,i} + \tilde{V}_i \right) + V_{Rest} \rightarrow \text{klein}$$

Schalenmodell (Ansatz)

- Betrachte Zustände eines Nukleons in einem von den anderen Nukleonen erzeugten Feld:
 - Jeder Energiezustand **nach Pauli-Prinzip besetzt**
 - Schalenabschluß durch vollbesetztes Energieniveau und große Energiedifferenz zum nächsten Energieniveau gekennzeichnet

- **Potentialansatz:**

- Radialsymmetrisch
- Im Inneren konstant
- Mit rel. scharf definiertem Rand (→ Woods-Saxon-Potential, vgl VL-08 Folie 8)



Lösung der Schrödinger-GL

- Radialsymmetrie → Schrödinger-Gleichung faktorisiert in **Radial- und Raumwinkelanteil**:

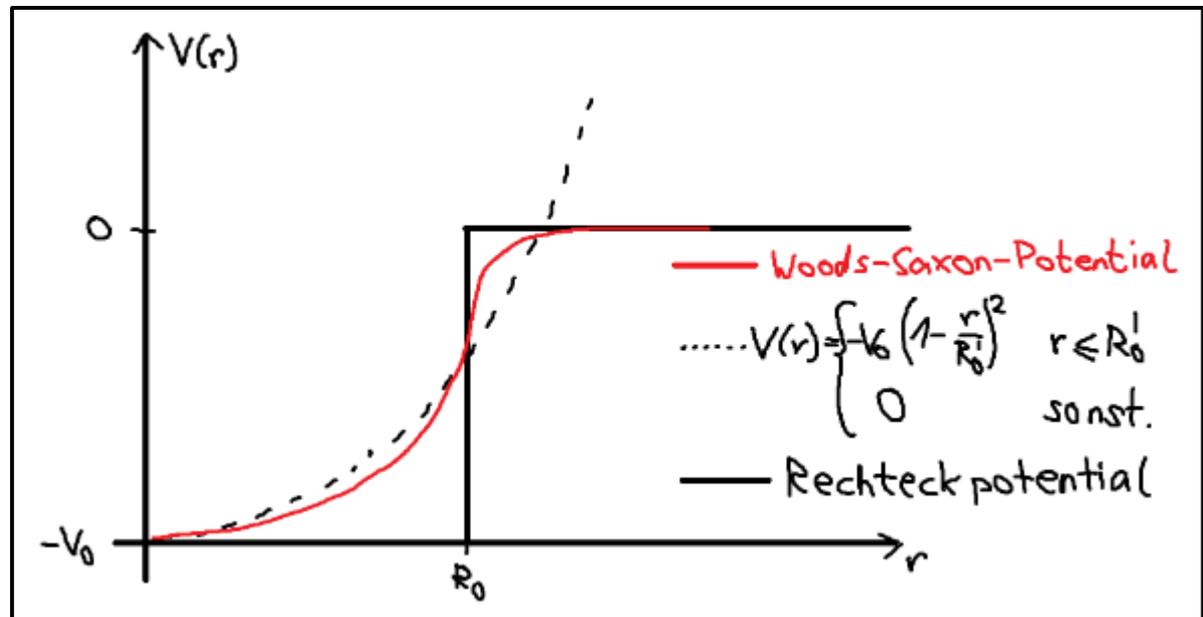
$$\psi(\vec{r}) = R(r) \cdot Y_\ell^m(\theta, \varphi)$$

$$u(r) = r \cdot R(r)$$

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar} \left[E - \tilde{V}(r) - \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mr^2} \right] u = 0$$

- **Potentialansatz:**

- Radialsymmetrisch
- Im Inneren konstant
- Mit rel. scharf definiertem Rand (→ Woods-Saxon-Potential, vgl VL-08 Folie 8)



Lösung der Schrödinger-GL

- Radialsymmetrie → Schrödinger-Gleichung faktorisiert in **Radial- und Raumwinkelanteil**:

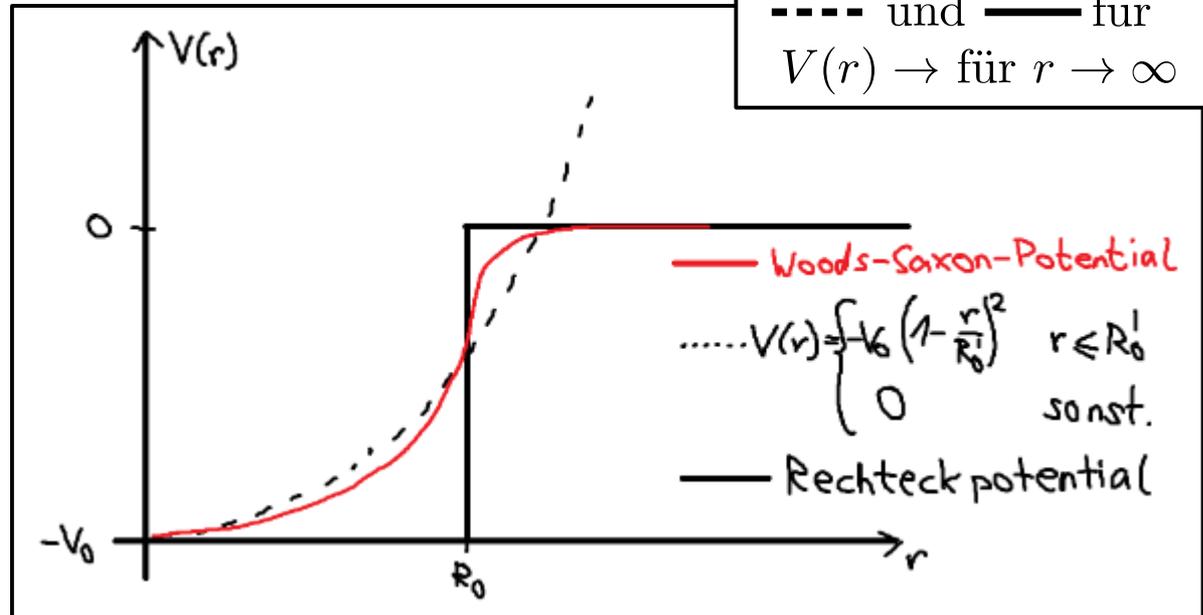
$$\psi(\vec{r}) = R(r) \cdot Y_\ell^m(\theta, \varphi)$$

$$u(r) = r \cdot R(r)$$

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar} \left[E - \tilde{V}(r) - \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mr^2} \right] u = 0$$

- **Potentialansatz:**

- Radialsymmetrisch
- Im Inneren konstant
- Mit rel. scharf definiertem Rand (→ Woods-Saxon-Potential, vgl VL-08 Folie 8)



Lösung der Schrödinger-GL

- Radialsymmetrie → Schrödinger-Gleichung faktorisiert in **Radial- und Raumwinkelanteil**:

$$\psi(\vec{r}) = R(r) \cdot Y_\ell^m(\theta, \varphi)$$

$$u(r) = r \cdot R(r)$$

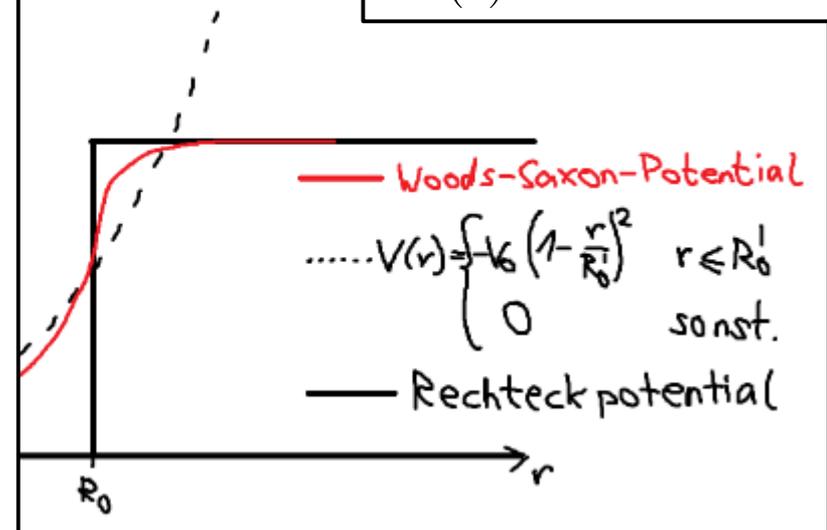
$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar} \left[E - \tilde{V}(r) - \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mr^2} \right] u = 0$$

- Harmonischer Oszillator:**

$$E_{n,\ell} = \underbrace{\left(2(n-1) + \ell + \frac{3}{2} \right)}_{\equiv \lambda} \hbar\omega$$

- n, ℓ -Entartung (z.B. $n=1, \ell=2 \leftrightarrow n=2, \ell=0$, in anderen Potentials aufgehoben)
- $(2\ell+1)$ -fache Entartung in m (bleibt bestehen)

analytisch lösbar für
 - - - - und — für
 $V(r) \rightarrow$ für $r \rightarrow \infty$



Besetzung der Schalen

- Radialsymmetrie → Schrödinger-Gleichung faktorisiert in **Radial- und Raumwinkelanteil**:

$$\psi(\vec{r}) = R(r) \cdot Y_\ell^m(\theta, \varphi)$$

$$u(r) = r \cdot R(r)$$

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar} \left[E - \tilde{V}(r) - \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mr^2} \right] u = 0$$

- Harmonischer Oszillator:**

$$E_{n,\ell} = \left(\underbrace{2(n-1) + \ell + \frac{3}{2}}_{\equiv \lambda} \right) \hbar\omega$$

- n, ℓ -Entartung (z.B. $n = 1, \ell = 2$ & $n = 2, \ell = 0$, in anderen Potential aufgehoben)
- $(2\ell + 1)$ -fache Entartung in m (bleiben bestehen)

- Besetzung der Potentialtöpfe:**

λ	n	ℓ	Orbital	Zustände ⁽¹⁾	Σ	
0	1	0	1s	2	2	✓
1	1	1	1p	6	8	✓
2	2	0	2s	2	20	✓
	0	2	1d	10		
3	1	3	1f	14	40	⚡
	2	1	2p	6		

(1) jeweils mit Spin up/down besetzt

Besetzung der Schalen

- Radialsymmetrie → Schrödinger-Gleichung faktorisiert in **Radial- und Raumwinkelanteil**:

$$\psi(\vec{r}) = R(r) \cdot Y_\ell^m(\theta, \varphi)$$

$$u(r) = r \cdot R(r)$$

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar} \left[E - \tilde{V}(r) - \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mr^2} \right] u = 0$$

Magische Zahlen können durch reines Zentralpotential nicht beschrieben werden

• Harmonischer Oszillator:

$$E_{n,\ell} = \left(\underbrace{2(n-1) + \ell + \frac{3}{2}}_{\equiv \lambda} \right) \hbar\omega$$

- n, ℓ -Entartung (z.B. $n = 1, \ell = 2$ & $n = 2, \ell = 0$, in anderen Potential aufgehoben)
- $(2\ell + 1)$ -fache Entartung in m (bleiben bestehen)

• Besetzung

λ	n	ℓ	Orbital	Zustände ⁽¹⁾	Σ	
0	1	0	1s	2	2	✓
1	1	1	1p	6	8	✓
2	2	0	2s	2	20	✓
	0	2	1d	10		
3	1	3	1f	14	40	⚡
	2	1	2p	6		

(1) jeweils mit Spin up/down besetzt

Spin-Bahn-Kopplung

- Potential Einzelteilchen mit **Spin-Bahn-Kopplung**:

$$\tilde{V}(r) = V_0(r) + V_{\ell s}(r) \cdot \frac{\vec{\ell} \cdot \vec{s}}{\hbar^2}$$

$$\langle \vec{\ell} \cdot \vec{s} \rangle = ?$$



Spin-Bahn-Kopplung

- Potential Einzelteilchen mit **Spin-Bahn-Kopplung**:

$$\tilde{V}(r) = V_0(r) + V_{\ell s}(r) \cdot \frac{\vec{\ell} \cdot \vec{s}}{\hbar^2}$$

$$\langle \vec{\ell} \cdot \vec{s} \rangle = ?$$



$$\langle \vec{j}^2 \rangle = \langle \vec{\ell}^2 \rangle + \langle \vec{s}^2 \rangle + 2 \langle \vec{\ell} \cdot \vec{s} \rangle$$

$$\langle \vec{\ell} \cdot \vec{s} \rangle = \frac{1}{2} \left[j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4} \right]$$

$$\begin{array}{lll}
 j = \ell + 1/2 & \langle \vec{\ell} \cdot \vec{s} \rangle = +1/2 \ell & \tilde{V}(r) = V_0(r) + \frac{1}{2} V_{\ell s} \cdot \ell \\
 j = \ell - 1/2 & \langle \vec{\ell} \cdot \vec{s} \rangle = -1/2 (\ell + 1) & \tilde{V}(r) = V_0(r) - \frac{1}{2} V_{\ell s} \cdot (\ell + 1)
 \end{array}$$

$$\Delta E = E(\ell + 1/2) - E(\ell - 1/2) = \frac{1}{2} V_{\ell s}(r)(2\ell + 1)$$

- Im Gegensatz zum Wasserstoffatom ist ℓ im Kernpotential nicht nach oben begrenzt \rightarrow Spin-Bahn-Kopplung großer Effekt für große ℓ

Spin-Bahn-Kopplung

- Potential Einzelteilchen mit **Spin-Bahn-Kopplung**:

$$\tilde{V}(r) = V_0(r) + V_{\ell s}(r) \cdot \frac{\vec{\ell} \cdot \vec{s}}{\hbar^2}$$

$$\langle \vec{\ell} \cdot \vec{s} \rangle = ?$$



$$\langle \vec{j}^2 \rangle = \langle \vec{\ell}^2 \rangle + \langle \vec{s}^2 \rangle + 2 \langle \vec{\ell} \cdot \vec{s} \rangle$$

$$\langle \vec{\ell} \cdot \vec{s} \rangle = \frac{1}{2} \left[j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4} \right]$$

$$j = \ell + 1/2 \quad \langle \vec{\ell} \cdot \vec{s} \rangle = +1/2 \ell$$

$$j = \ell - 1/2 \quad \langle \vec{\ell} \cdot \vec{s} \rangle = -1/2 (\ell + 1)$$

$$\Delta E = E(\ell + 1/2) - E(\ell - 1/2) = \frac{1}{2} V_{\ell s}(r)$$

$V_{\ell s}(r)$ nicht aus “first principles” berechenbar → muß **experimentell bestimmt** werden.

Beispiel $n=4$ He-Streuung:

- $1s$ -Orbital voll besetzt
- Nächst-höhere Zustände: $1p_{1/2}$
 $1p_{3/2}$
- Experiment zeigt: $V_{\ell s}(r) < 0$
(d.h. $\vec{\ell} \parallel \vec{s}$ energetisch günstiger!)

- Im Gegensatz zum Wasserstoffatom ist ℓ im Kernpotential nicht nach oben begrenzt → Spin-Bahn-Kopplung großer Effekt für große ℓ



Gliederung der Vorlesung

KW-17	1 Einführung	
	1.1 Organisation der Vorlesung	
	1.2 Übersicht und Literatur	
	1.3 Geschichte	
	1.4 Einheiten und Einheitssysteme	
	1.5 Relativistische Kinematik	
	1.6 Streuexperimente	
KW-18	2 Experimentelle Methoden	
	2.1 Nachweis geladener Teilchen in Materie	
	2.2 Wechselwirkung von Elektron und Photon mit Materie	
	2.3 Hadronische Wechselwirkungen und Materie	
	2.4 Detektionstechniken	
	2.5 Detektorsysteme in der Teilchenphysik	
KW-19	2.6 Beschleuniger in der Teilchenphysik	
	3 Struktur der Materie	
	3.1 Kernradien und Formfaktoren	
KW-20	3.2 Struktur der Nukleonen	
	3.3 Fundamentaler Aufbau der Materie und ihre Wechselwirkungen	

KW-21/22

4 Kernmodelle

4.1 Eigenschaften stabler Kerne

4.2 Fermigas und Tröpfchenmodell

4.3 Schalenmodell

4.4 Struktur der Kernkräfte

KW-22

5 Instabile Kerne

5.1 Radioaktives Zerfallsgesetz

5.2 Alpha-, Beta-, Gammastrahlen

5.3 Kernspaltung und Kernfusion

KW-23

6 Anwendungen der Kernphysik

6.1 Energieerzeugung

6.2 Kernphysik in der Medizin

6.3 Nukleare Thermodynamik

6.4 Nukleare Astrophysik

KW-24

7 Symmetrien und Erhaltungssätze

7.1 Symmetrien und Quantenzahlen

7.2 Diskrete und kontinuierliche Symmetrien

7.3 Schlüsselexperimente zu C-, P-, CP-Verletzung

KW-25/26

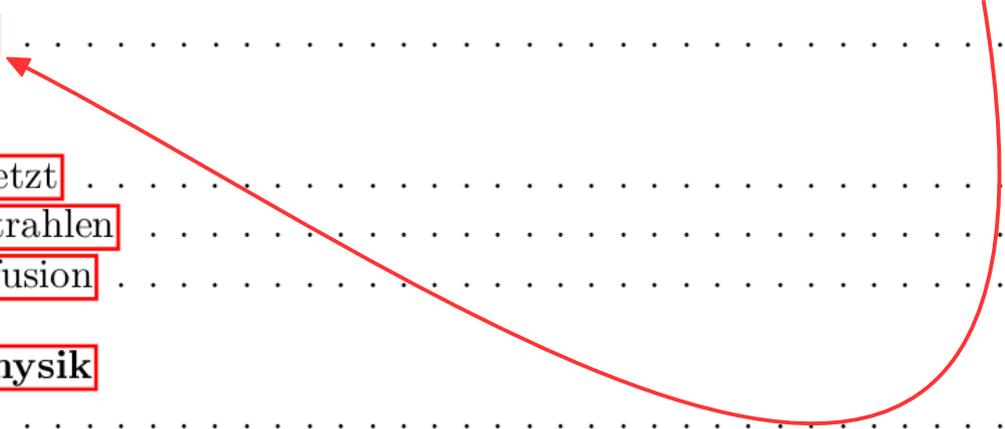
8 QCD: Quarks, Gluonen und Hadronen

8.1 Quarkmodell und Hadronen

8.2 Quarkonium

8.3 Farbwechselwirkung in der QCD

8.4 Struktur der Nukleonen und Partonmodell

YOU
ARE
HERE

Kapitel 4.4: Struktur der Kernkräfte

Nukleon-Nukleon-Potential

- Im Gegensatz zur Atomphysik (\rightarrow charakteristische Röntgenstrahlung) aus Kernstruktur über Potentialverlauf der starken Kraft auf Längenskala eines Nukleons nichts zu erfahren (vgl Folie 14)
- Kenntnis aus polarisierter **Nukleon-Nukleon-Streuung** mit Energien unterhalb von m_π (\rightarrow elastische Streuung, Partialwellen-Analyse):

Spin:

$\uparrow \downarrow$ $J = 1$

$\uparrow \uparrow$ $J = 0, J = 1$

Senkrecht zur
Streuebene

• Parametrisierung:

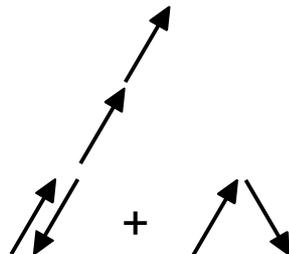
$$\begin{aligned}
 V(r) = & V_0(r) \\
 & + V_{ss}(r) \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 / \hbar^2 \\
 & + V_T(r) (3(\vec{s}_1 \cdot \vec{r})(\vec{s}_2 \cdot \vec{r}) / r^2 - \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2) / \hbar^2 \\
 & + V_{LS} (\vec{s}_1 + \vec{s}_2) \cdot \vec{L} / \hbar^2 \\
 & + \dots
 \end{aligned}$$

Zentralpotential

Isospin:

pp $I = 1$

pn $I = 0, I = 1$



Nukleon-Nukleon-Potential

- Im Gegensatz zur Atomphysik (→ charakteristische Röntgenstrahlung) aus Kernstruktur über Potentialverlauf der starken Kraft auf Längenskala eines Nukleons nichts zu erfahren (vgl Folie 14)
- Kenntnis aus polarisierter **Nukleon-Nukleon-Streuung** mit Energien unterhalb von m_π (→ elastische Streuung, Partialwellen-Analyse):

Spin:

$\uparrow \downarrow$ $J = 1$

$\uparrow \uparrow$ $J = 0, J = 1$

Senkrecht zur
Streuebene

• Parametrisierung:

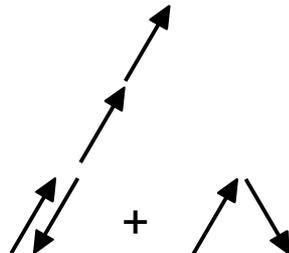
$$\begin{aligned}
 V(r) = & V_0(r) \\
 & + V_{ss}(r) \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 / \hbar^2 \\
 & + V_T(r) (3(\vec{s}_1 \cdot \vec{r})(\vec{s}_2 \cdot \vec{r}) / r^2 - \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2) / \hbar^2 \\
 & + V_{LS} (\vec{s}_1 + \vec{s}_2) \cdot \vec{L} / \hbar^2 \\
 & + \dots
 \end{aligned}$$

Spin-Spin-WW

Isospin:

pp $I = 1$

pn $I = 0, I = 1$



Nukleon-Nukleon-Potential

- Im Gegensatz zur Atomphysik (→ charakteristische Röntgenstrahlung) aus Kernstruktur über Potentialverlauf der starken Kraft auf Längenskala eines Nukleons nichts zu erfahren (vgl Folie 14)
- Kenntnis aus polarisierter **Nukleon-Nukleon-Streuung** mit Energien unterhalb von m_π (→ elastische Streuung, Partialwellen-Analyse):

Spin:

$\uparrow \downarrow$ $J = 1$

$\uparrow \uparrow$ $J = 0, J = 1$

Senkrecht zur
Streuebene

• Parametrisierung:

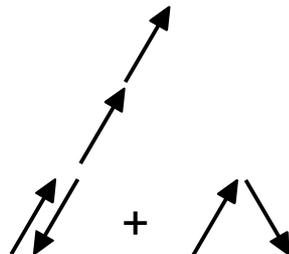
$$\begin{aligned}
 V(r) = & V_0(r) \\
 & + V_{ss}(r) \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 / \hbar^2 \\
 & + V_T(r) \left(3(\vec{s}_1 \cdot \vec{r})(\vec{s}_2 \cdot \vec{r}) / r^2 - \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \right) / \hbar^2 \\
 & + V_{LS} (\vec{s}_1 + \vec{s}_2) \cdot \vec{L} / \hbar^2 \\
 & + \dots
 \end{aligned}$$

Tensor-WW

Isospin:

pp $I = 1$

pn $I = 0, I = 1$



Nukleon-Nukleon-Potential

- Im Gegensatz zur Atomphysik (\rightarrow charakteristische Röntgenstrahlung) aus Kernstruktur über Potentialverlauf der starken Kraft auf Längenskala eines Nukleons nichts zu erfahren (vgl Folie 14)
- Kenntnis aus polarisierter **Nukleon-Nukleon-Streuung** mit Energien unterhalb von m_π (\rightarrow elastische Streuung, Partialwellen-Analyse):

Spin:

$\uparrow \downarrow$ $J = 1$

$\uparrow \uparrow$ $J = 0, J = 1$

Senkrecht zur
Streuebene

• Parametrisierung:

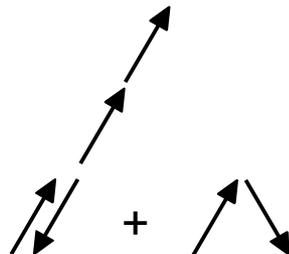
$$\begin{aligned}
 V(r) = & V_0(r) \\
 & + V_{ss}(r) \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 / \hbar^2 \\
 & + V_T(r) (3(\vec{s}_1 \cdot \vec{r})(\vec{s}_2 \cdot \vec{r}) / r^2 - \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2) / \hbar^2 \\
 & + V_{LS} (\vec{s}_1 + \vec{s}_2) \cdot \vec{L} / \hbar^2 \\
 & + \dots
 \end{aligned}$$

Spin-Bahn-WW

Isospin:

pp $I = 1$

pn $I = 0, I = 1$



Nukleon-Nukleon-Potential

- Im Gegensatz zur Atomphysik (→ charakteristische Röntgenstrahlung) aus Kernstruktur über Potentialverlauf der starken Kraft auf Längenskala eines Nukleons nichts zu erfahren (vgl Folie 14)
- Kenntnis aus polarisierter **Nukleon-Nukleon-Streuung** mit Energien unterhalb von m_π (→ elastische Streuung, Partialwellen-Analyse):

Spin:

$\uparrow \downarrow$ $J = 1$

$\uparrow \uparrow$ $J = 0, J = 1$

Senkrecht zur
Streuebene

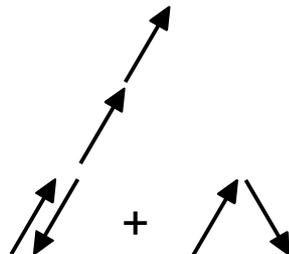
• Parametrisierung:

$$\begin{aligned}
 V(r) = & V_0(r) \\
 & + V_{ss}(r) \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 / \hbar^2 \\
 & + V_T(r) (3(\vec{s}_1 \cdot \vec{r})(\vec{s}_2 \cdot \vec{r}) / r^2 - \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2) / \hbar^2 \\
 & + V_{LS} (\vec{s}_1 + \vec{s}_2) \cdot \vec{L} / \hbar^2 \\
 & + \dots
 \end{aligned}$$

Isospin:

pp $I = 1$

pn $I = 0, I = 1$

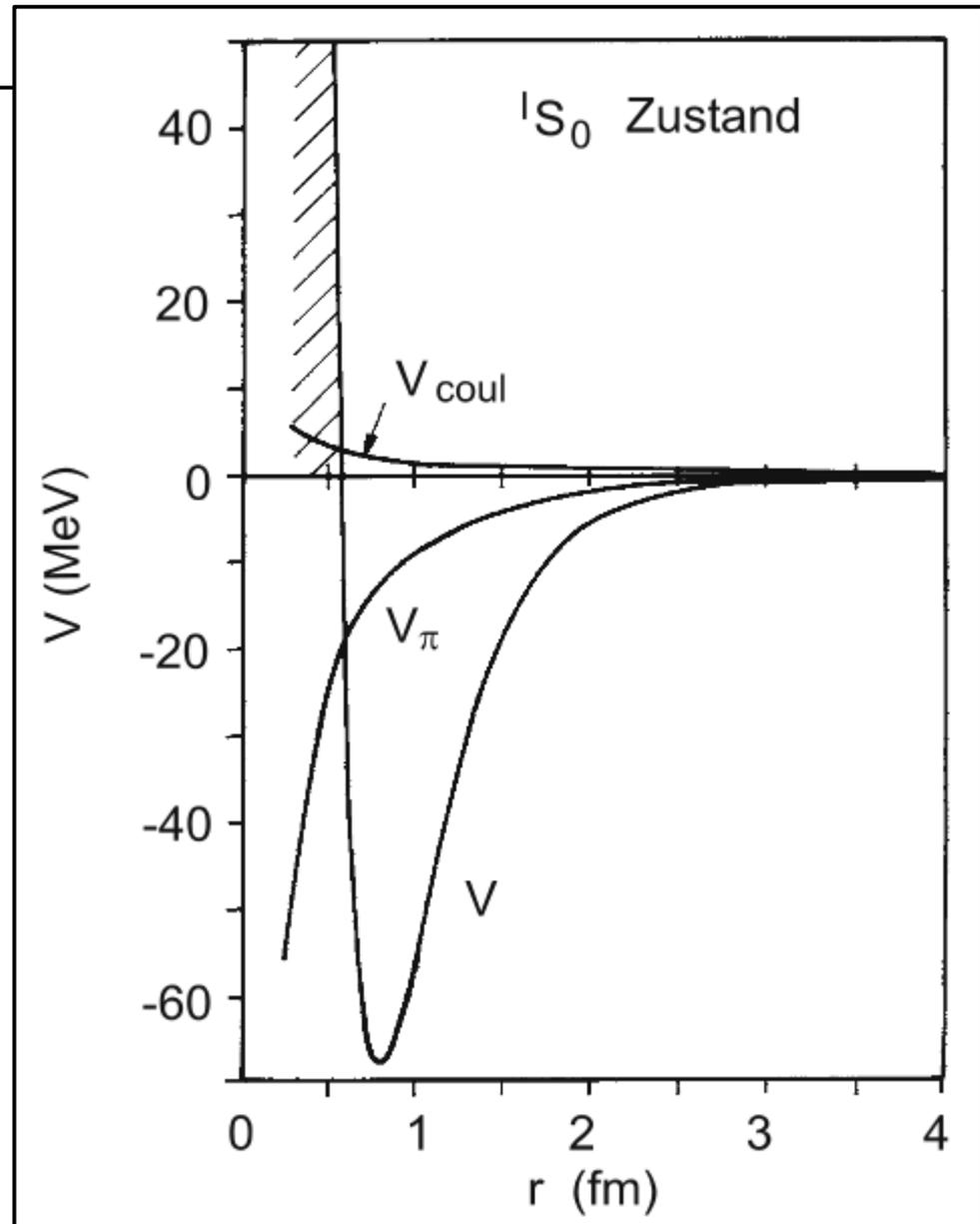


Spin-Bahn-WW

Für $J = 1$ V_{ss} und V_T gerade groß genug um pn gebundenen Zustand auszubilden → Deuterium

Nukleon-Nukleon-Potential

- Stark **abstoßender** “**Core**“:
 - Nicht durch Pauli-Prinzip, wie in Molekülphysik
 - Genügend Freiheitsgrade um antisymmetrische Wellenfunktion zu konstruieren.
 - Abstoßung durch Spin-Spin-WW
- Stark **anziehend** bei **~1 fm**, danach rasch abfallend:
 - “kovalente” Bindung durch $q\bar{q}$ -Austausch



Yukawa-Potential

- Ansatz für Kernpotential → **abgeschirmtes Coulombpotential**

$$V_0(r) = -g^2 \frac{e^{-r/\lambda}}{r} \quad (\text{Yukawa-Potential, Lösung der massiven Klein-Gordon-GL})$$

$$V_0(r) = \frac{g^2}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \frac{4\pi}{k^2 + m^2} d^3\vec{k} \quad (\text{Propagator eines schweren Austauschpartners})$$

$$\lambda = \frac{\hbar c}{m_X c^2} = \frac{197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{m_X c^2}$$



Mittlere Reichweite Nukleon-
Nukleon-WW: $\sim 1.4 \text{ fm}$.
Schätzen Sie die Masse des
Austauschteilchens m_X ?

Yukawa-Potential

- Ansatz für Kernpotential → **abgeschirmtes Coulombpotential**

$$V_0(r) = -g^2 \frac{e^{-r/\lambda}}{r} \quad (\text{Yukawa-Potential, Lösung der massiven Klein-Gordon-GL})$$

$$V_0(r) = \frac{g^2}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \frac{4\pi}{k^2 + m^2} d^3\vec{k} \quad (\text{Propagator eines schweren Austauschpartners})$$

$$\lambda = \frac{\hbar c}{m_X c^2} = \frac{197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{m_X c^2}$$



Mittlere Reichweite Nukleon-Nukleon-WW: $\sim 1.4 \text{ fm}$.
Schätzen Sie die Masse des Austauschteilchens m_X ? 140 MeV

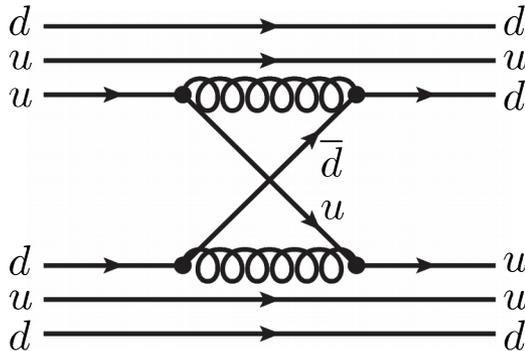
Yukawa-Potential

- Ansatz für Kernpotential → **abgeschirmtes Coulombpotential**

$$V_0(r) = -g^2 \frac{e^{-r/\lambda}}{r} \quad (\text{Yukawa-Potential, Lösung der massiven Klein-Gordon-GL})$$

$$V_0(r) = \frac{g^2}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \frac{4\pi}{k^2 + m^2} d^3\vec{k} \quad (\text{Propagator eines schweren Austauschpartners})$$

Quarkbild



Hadron/Mesonbild

