

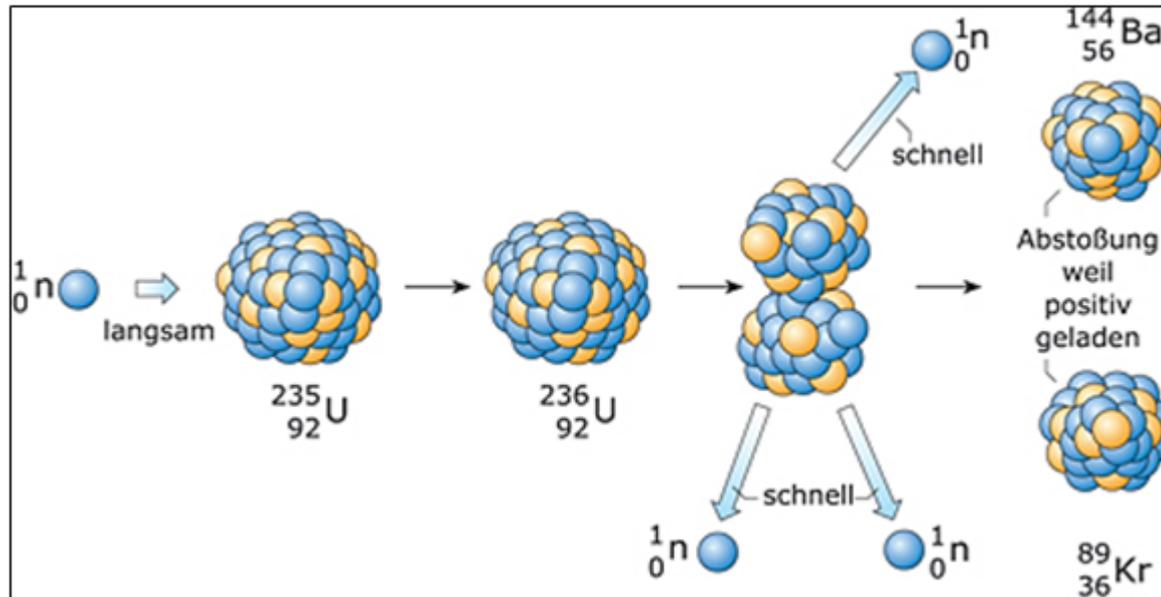
Moderne Experimentalphysik III: Kerne und Teilchen (Physik VI)

Günter Quast, Roger Wolf, Pablo Goldenzweig
08. Juni 2017

INSTITUTE OF EXPERIMENTAL PARTICLE PHYSICS (IEKP) – PHYSICS FACULTY

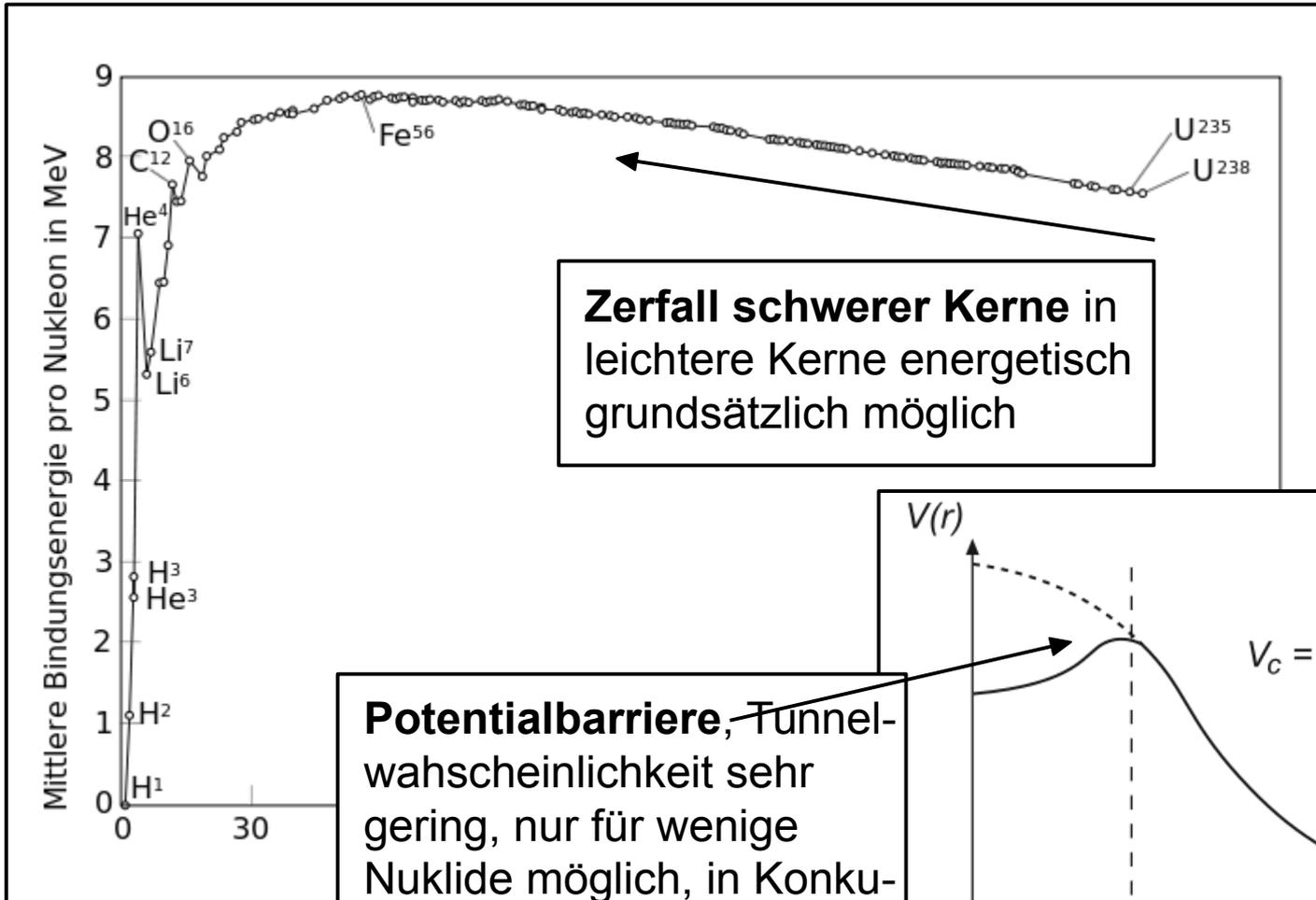


Kapitel 5.3: Kernspaltung und Kernfusion

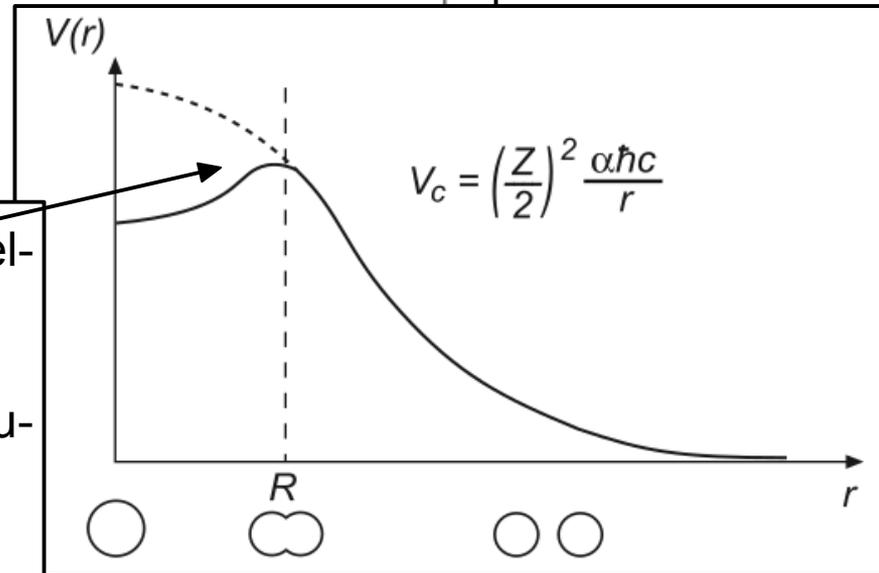


Kernspaltung

- Erinnerung: Bindungsenergie pro Nukleon (siehe VL-10 Folie 10)



Potentialbarriere, Tunnelwahrscheinlichkeit sehr gering, nur für wenige Nuklide möglich, in Konkurrenz zu anderen Zerfallsarten (i.e. α)



Energiebilanz bei Deformation

- Erinnerung Tröpfchenmodell (siehe [VL-10 Folie 17](#))



$$E_b^{\text{Kern}}(Z, A) =$$

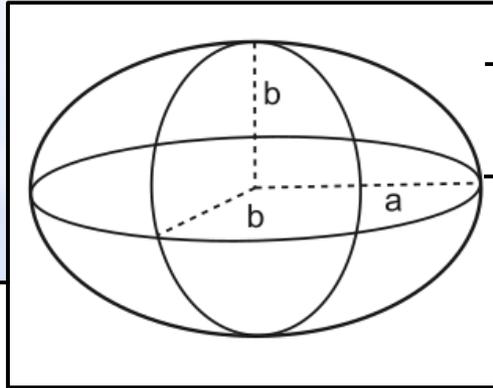
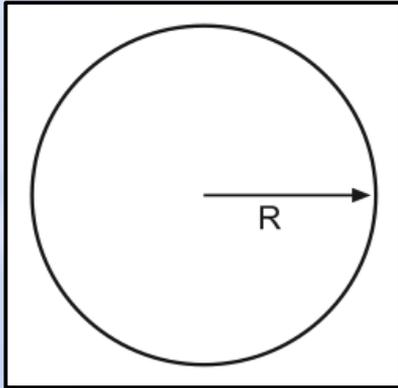
$$\underbrace{\kappa_V \cdot A}_{\text{Volumen}} - \underbrace{\kappa_O \cdot A^{2/3}}_{\text{Oberfläche}} - \underbrace{\kappa_C \cdot \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}}}_{\text{Coulomb}} - \underbrace{\kappa_S \cdot \frac{(A/2 - Z)^2}{A}}_{\text{Symmetrie}} + \underbrace{\kappa_P \cdot \begin{cases} +A^{-3/4} & \text{gg} \\ 0 & \text{ug/gu} \\ -A^{-3/4} & \text{uu} \end{cases}}_{\text{Paarung}}$$

$$\kappa_V = 15.8 \text{ MeV} \quad \kappa_O = 18.3 \text{ MeV} \quad \kappa_C = 0.714 \text{ MeV}$$

$$\kappa_S = 23.2 \text{ MeV} \quad \kappa_P = 12 \text{ MeV}$$

Energiebilanz bei Deformation

- Erinnerung Tröpfchenmodell (siehe [VL-10 Folie 17](#))
- Veranschaulichung: **Deformation Kugel** → **Ellipsoid** (bei konstantem Volumen)



Vergrößerte Oberfläche

Verringerte Coulombabstoßung

$$a = R(1 + \epsilon)$$

$$b = \frac{R}{\sqrt{1 + \epsilon}} \approx R \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)$$

$$\Delta E_O \approx \kappa_O \cdot A^{2/3} \left(1 + \frac{5}{2}\epsilon^2\right)$$

$$\Delta E_C \approx \kappa_C \cdot \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} \left(1 - \frac{1}{5}\epsilon^2\right)$$

$$\Delta E = \frac{\epsilon^2}{5} \left(2\kappa_O \cdot A^{2/3} - \kappa_C \cdot \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}}\right)$$

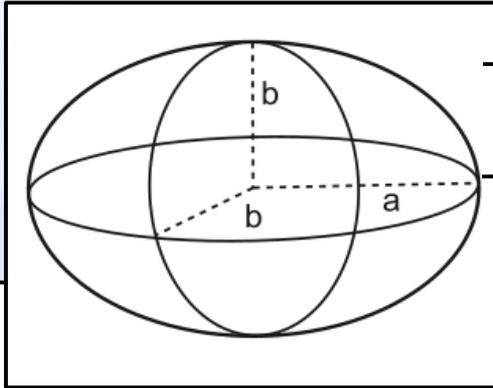
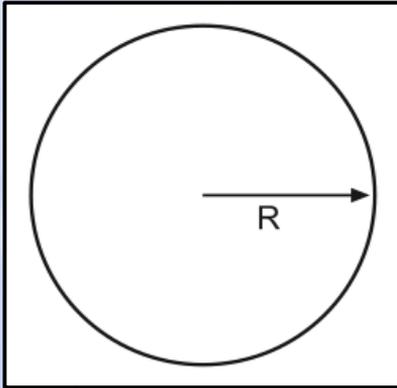
$\Delta E < 0 \rightarrow$ **Energiegewinn bei Deformation!**

$$\underbrace{\kappa_V \cdot A}_{\text{Volumen}} - \underbrace{\kappa_O \cdot A^{2/3}}_{\text{Oberfläche}} - \underbrace{\kappa_C \cdot \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}}}_{\text{Coulomb}}$$

$$\begin{array}{ll} \kappa_V = 15.8 \text{ MeV} & \kappa_O = 18.3 \text{ MeV} \\ \kappa_S = 23.2 \text{ MeV} & \kappa_P = 12 \text{ MeV} \end{array}$$

Energiebilanz bei Deformation

- Erinnerung Tröpfchenmodell (siehe VL-10 Folie 17)
- Veranschaulichung: **Deformation Kugel** → **Ellipsoid** (bei konstantem Volumen)



→ Vergrößerte Oberfläche

→ Verringerte Coulombabstoßung

$$a = R(1 + \epsilon)$$

$$b = \frac{R}{\sqrt{1 + \epsilon}} \approx R \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)$$

$$\Delta E_O \approx \kappa_O \cdot A^{2/3} \left(1 + \frac{5}{2}\epsilon^2\right)$$

$$\Delta E_C \approx \kappa_C \cdot \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} \left(1 - \frac{1}{5}\epsilon^2\right)$$

$$\Delta E = \frac{\epsilon^2}{5} \left(2\kappa_O \cdot A^{2/3} - \kappa_C \cdot \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}}\right)$$

$\Delta E < 0 \rightarrow$ **Energiegewinn bei Deformation!**

Spontane Kernspaltung:

$$\Delta E = \frac{\epsilon^2}{5} \left(2\kappa_O \cdot A^{2/3} - \kappa_C \cdot \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}}\right)$$

$$\frac{Z(Z-1)}{A} \geq \frac{2\kappa_O}{\kappa_C} = \frac{2 \cdot 18.3 \text{ MeV}}{0.714 \text{ MeV}} \approx 50$$

- Möglich für $Z > 114$ und $A > 270$

Induzierte Spaltung

- Überwindung der Potentialbarriere für Spaltung durch **Beschuß mit Neutronen**, (auch mit α -Teilchen möglich)

Beispiel $^{238}\text{U} + n_i \rightarrow ^{239}\text{U}^* \rightarrow f_1^* + f_2^* + k \cdot n_f$:

- Potentialbarriere $^{239}\text{U}^*$: 5.5 MeV/n
- Energiegewinn bei Spaltung ^{238}U : 4.9 MeV/n
- Kinematisch nur möglich mit
“schnellen Neutronen”
($E_{kin}(n_i) \gtrsim 1 \text{ MeV}$)
- Fermi's Goldene Regel (siehe [VL-03 Folie 4](#)):

$$\sigma \propto \frac{1}{v_{n_i}}$$

v_{n_i} : Neutron-Geschwindigkeit

aus Projektfluß (\rightarrow Einfang schneller Neutronen unterdrückt)

Induzierte Spaltung

- Überwindung der Potentialbarriere für Spaltung durch **Beschuß mit Neutronen**, (auch mit α -Teilchen möglich)

Beispiel $^{238}\text{U} + n_i \rightarrow ^{239}\text{U}$

- Potentialbarriere $^{239}\text{U}^*$
- Energiegewinn bei Spaltung
- Kinematisch nur möglich für
"schnellen Neutronen"
($E_{kin}(n_i) \gtrsim 1 \text{ MeV}$)
- Fermi's Goldene Regel

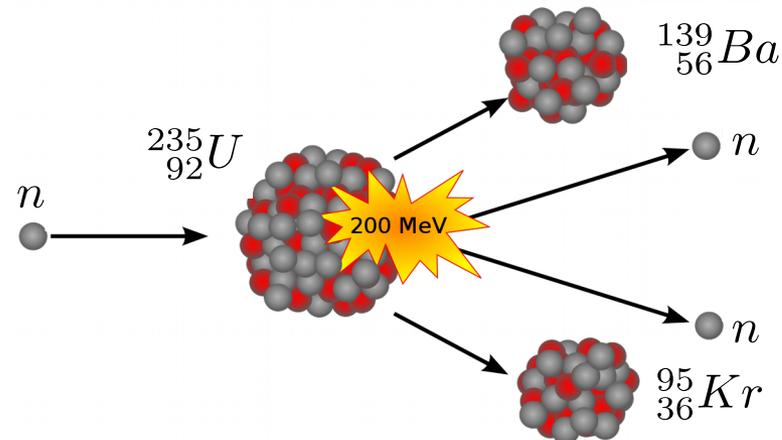
$$\sigma \propto \frac{1}{v_{n_i}}$$

v_{n_i} : Neutron-Geschwindigkeit

aus Projekttilfluß (\rightarrow Eigenneutronen unterdrückt)

Beispiel $^{235}\text{U} + n_i \rightarrow ^{236}\text{U}^* \rightarrow f_1^* + f_2^* + k \cdot n_f$:

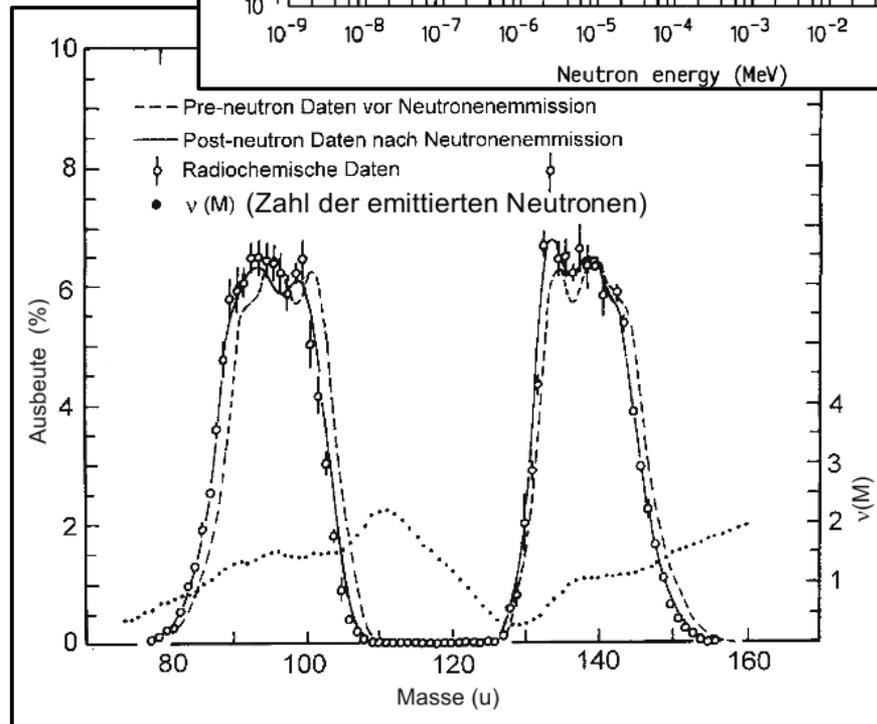
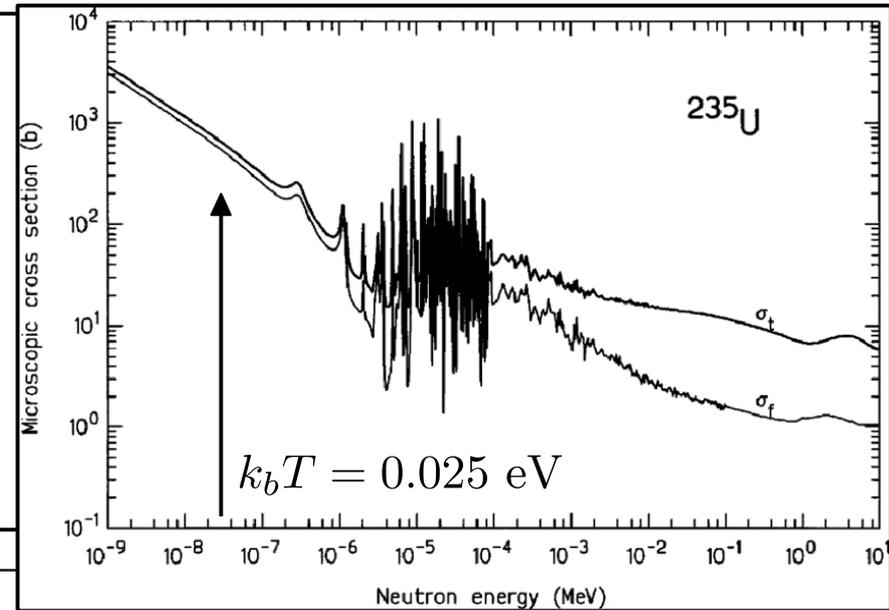
- ^{235}U : gu-Kern, ^{236}U gg-Kern \rightarrow zusätzlich frei werdende Paarungsenergie!
- Potentialbarriere $^{236}\text{U}^*$: 5.5 MeV/n
- Energiegewinn bei Spaltung ^{235}U : 6.4 MeV/n



Induzierte Spaltung von ${}^{235}_{92}\text{U}$

- Spaltung bereits mit thermischen Neutronen möglich ($k_b T = 0.025 \text{ eV}$)
- Energiegewinn pro Spaltung: $\overset{(1)}{\sim 200 \text{ MeV}}$
- Asymmetrische Spaltung bevorzugt
- Mittlere Anzahl emittierter Neutronen (im plot: $\nu = 2.5 \pm 0.1$)
- **Kettenreaktion** → falls mehr Neutronen bei Spaltvorgang freigesetzt als absorbiert

Wirkungsquerschnitt als Funktion der Neutronenenergie



(1) $235 \cdot (6.4 \text{ MeV} - 5.5 \text{ MeV}) \approx 200 \text{ MeV}$

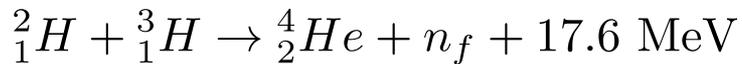
Fusion

- Energiegewinn bei Fusion leichter Elemente durch **höhere Bindungsenergie pro Nukleon** (möglich bis $A \geq 56$)

- Vorkommen:

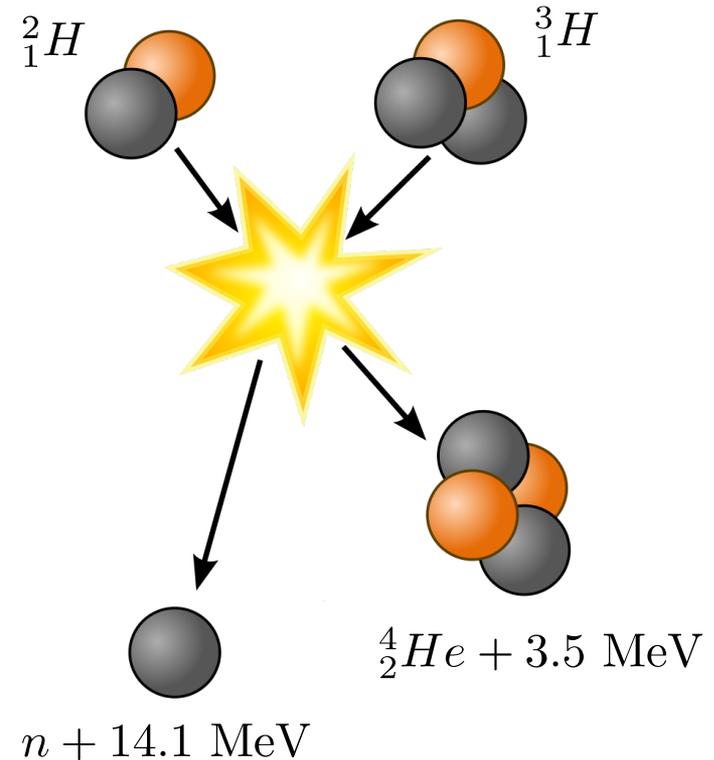
- Bildung schwerer Elemente in Sternen
- Primordiale **Nukleosynthese**
- Fusionsreaktor

- Beispiel Deuterium-Tritium-Fusion:



- **Bedingung für Fusion:** Überwinden des Potentialwalls oder Tunneln

$$V(r) = \frac{Z_1 Z_2 \alpha \hbar c}{r}$$



Fusion von Deuterium-Tritium

- Abschätzung Höhe Potentialwall:

Schätzen Sie den Radius von Deuterium und Tritium ab durch

$$R_i = 1.2 \text{ fm} \cdot A_i^{1/3}$$

Berechnen Sie die Höhe des Potentialwalls bei $R = R_D + R_T$

$$V(R) = \frac{\alpha \hbar c}{R}$$

Nehmen Sie an die notwendige Energie zum Überwinden des Potentialwalls sei zwischen beiden Kernen gleich aufgeteilt. Welcher Temperatur entspricht diese Energie?

$$\langle E_{kin} \rangle = 3/2 k_b T$$

$$k_b = 8.617 \cdot 10^{-5} \text{ eV/K}$$



Fusion von Deuterium-Tritium

- Abschätzung Höhe Potentialwall:

Schätzen Sie den Radius von Deuterium und Tritium ab durch

$$R_i = 1.2 \text{ fm} \cdot A_i^{1/3} \quad R_D = 1.5 \text{ fm} \quad R_T = 1.75 \text{ fm}$$

Berechnen Sie die Höhe des Potentialwalls bei $R = R_D + R_T$

$$V(R) = \frac{\alpha \hbar c}{R} = \frac{1/137 \cdot 197.3 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{3.25 \text{ fm}} \approx 440 \text{ keV}$$

Nehmen Sie an die notwendige Energie zum Überwinden des Potentialwalls sei zwischen beiden Kernen gleich aufgeteilt. Welcher Temperatur entspricht diese Energie?

$$\langle E_{kin} \rangle = 3/2 k_b T \quad T = \frac{\langle E_{kin} \rangle}{3/2 k_b} = 1.7 \cdot 10^9 \text{ K}$$

$$k_b = 8.617 \cdot 10^{-5} \text{ eV/K}$$



Temperatur der Sonne:

- Außen: 6000 K
- Innen: 15.6 MK

Gamow-Peak

- Überwindung des Potentialwalls: nur in Ausläufern der Boltzmann-Verteilung

$$\mathcal{P} \propto e^{-\frac{E_{kin}}{k_B T}}$$

- Durchtunneln des Potentialwalls:

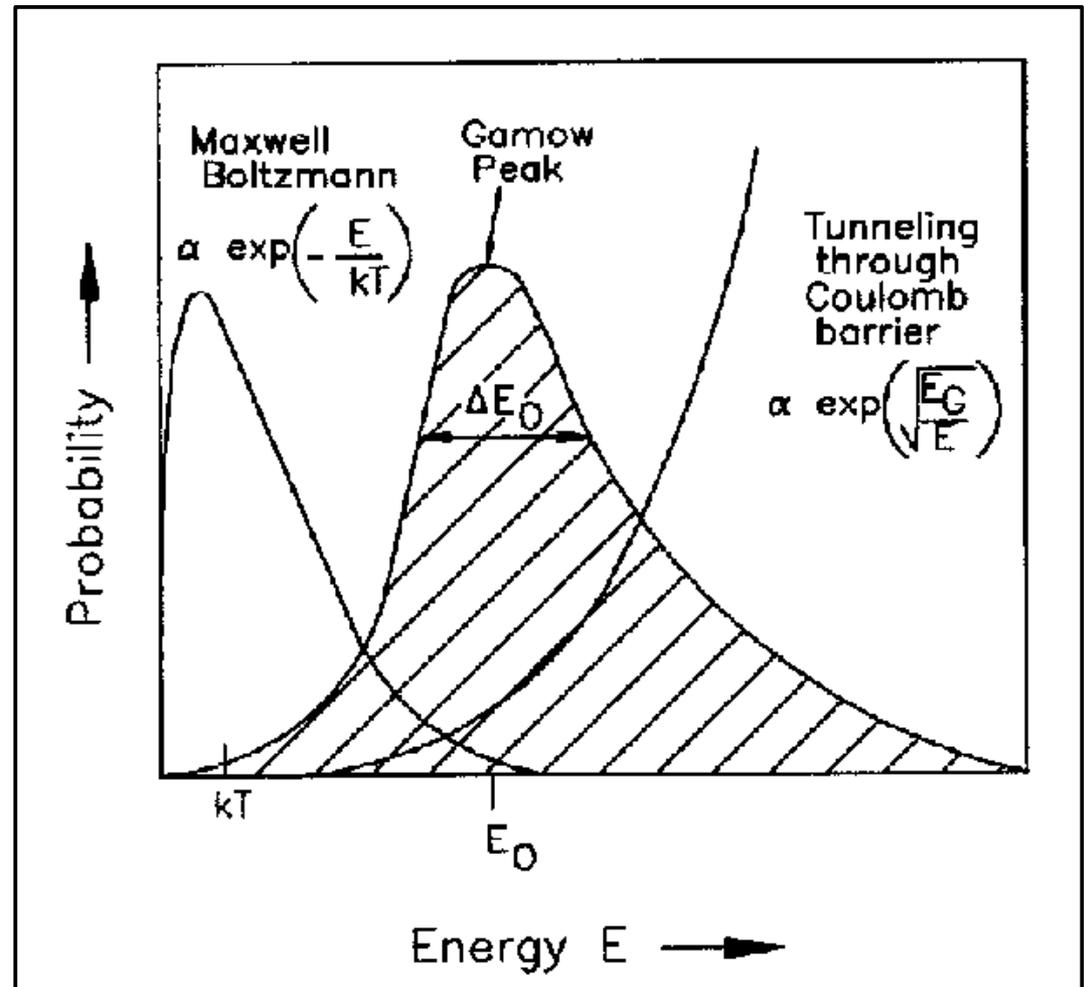
$$\mathcal{T} \propto e^{-\sqrt{\frac{E_G}{E_{kin}}}}$$

$$E_G = 2 m_r c^2 (\pi Z_1 Z_2 \alpha)^2$$

analog zu α -Zerfall; m_r reduzierte Masse der Fusionspartner

- Resultat: **Gamow-Kurve**

→ enges Energiefenster ΔE_0
für Fusionsreaktionen



Kapitel 6: Anwendungen der Kernphysik

Kapitel 6.1: Energieerzeugung

Kernreaktoren

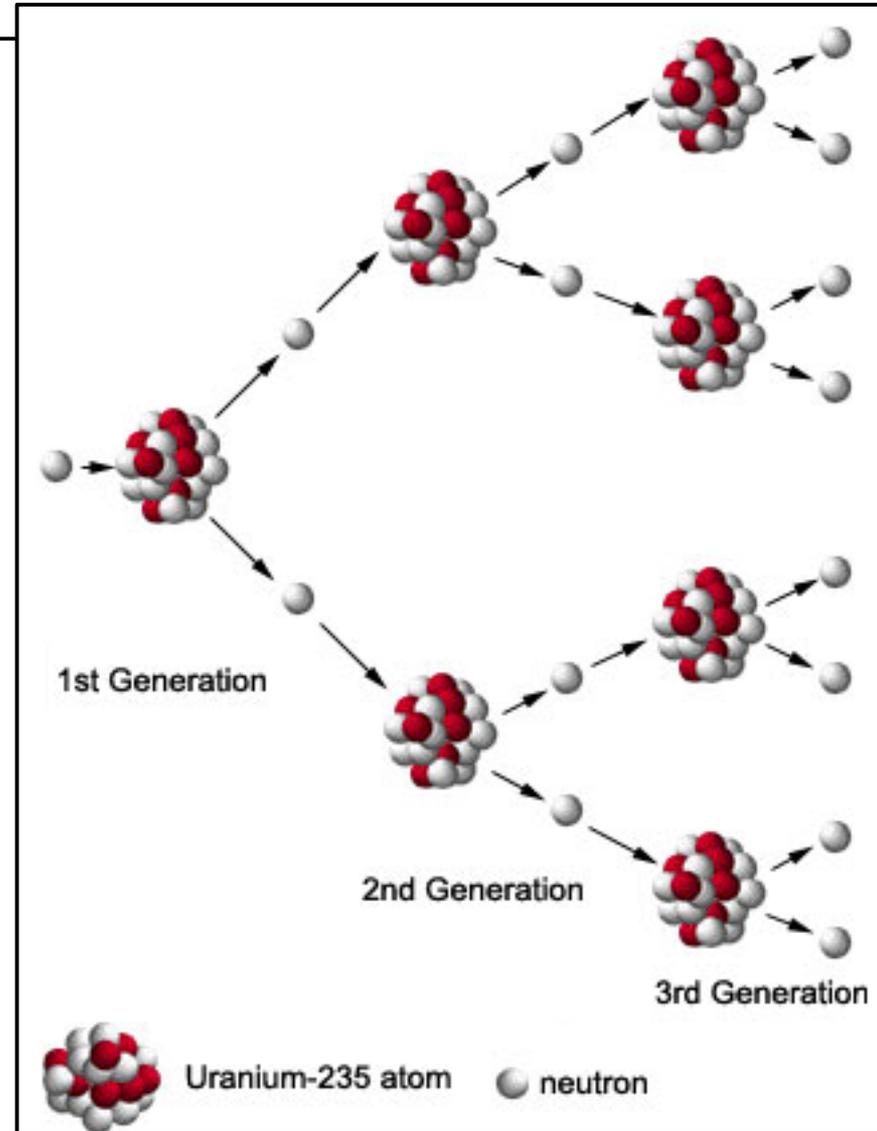
- Grundprinzip: **kontrollierte nukleare Kettenreaktion**

- Beachte: Rolle der Neutronen bei der Kernspaltung

${}_{92}^{235}\text{U} \rightarrow$ im Mittel 2.5 Neutronen
(Energie im MeV Bereich)

Wirkungsquerschnitt nimmt mit Energie der Neutronen ab

- Abbremsen der Spaltneutronen durch elastische Stöße in geeignetem **Moderator** (optimaler Energieübertrag bei Stoßpartner gleicher Masse)



Kernreaktoren

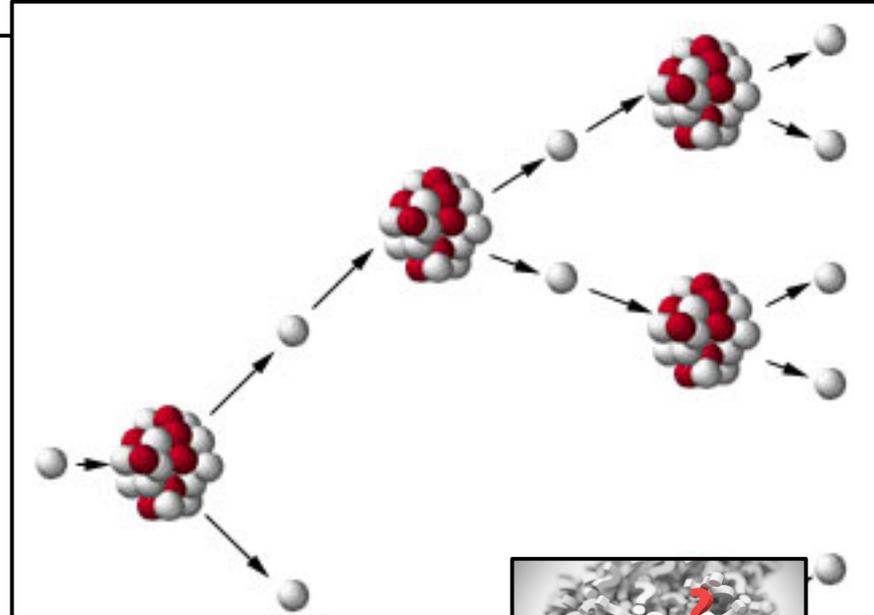
- Grundprinzip: **kontrollierte nukleare Kettenreaktion**

- Beachte: Rolle der Neutronen bei der Kernspaltung

${}_{92}^{235}\text{U} \rightarrow$ im Mittel 2.5 Neutronen
(Energie im MeV Bereich)

Wirkungsquerschnitt nimmt mit Energie der Neutronen ab

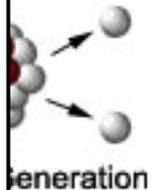
- Abbremsen der Spaltneutronen durch elastische Stöße in geeignetem **Moderator** (optimaler Energieübertrag bei Stoßpartner gleicher Masse)



Abschätzung:

$$\Delta E_n = \frac{E_n}{2} \quad (\text{Energieverlust pro Stoß})$$

Nach wievielen Stößen hat sich die Energie eines Neutrons von 1 MeV auf 0.025 eV reduziert?



generation

Kernreaktoren

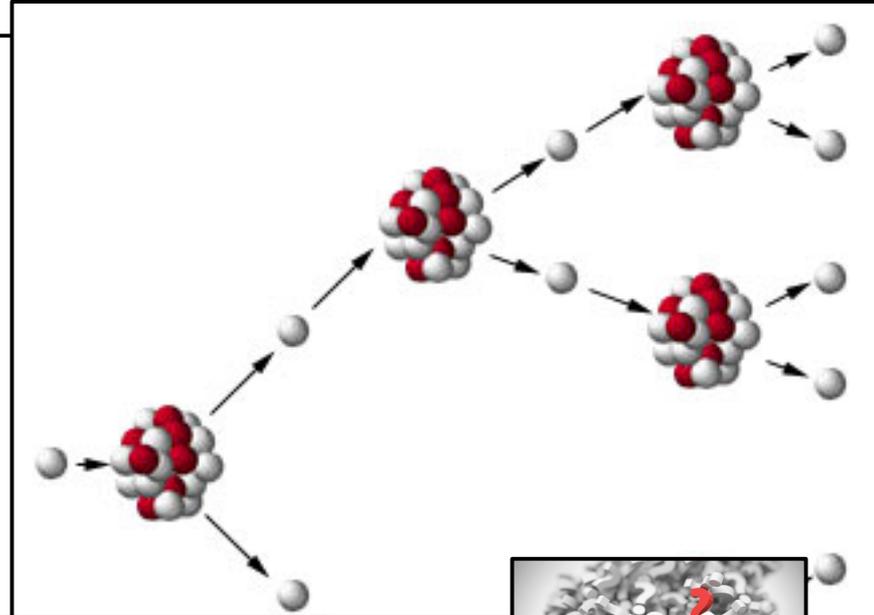
- Grundprinzip: **kontrollierte nukleare Kettenreaktion**

- Beachte: Rolle der Neutronen bei der Kernspaltung

${}_{92}^{235}\text{U} \rightarrow$ im Mittel 2.5 Neutronen
(Energie im MeV Bereich)

Wirkungsquerschnitt nimmt mit Energie der Neutronen ab

- Abbremsen der Spaltneutronen durch elastische Stöße in geeignetem **Moderator** (optimaler Energieübertrag bei Stoßpartner gleicher Masse)



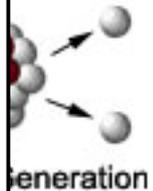
Abschätzung:

$$\Delta E_n = \frac{E_n}{2} \quad (\text{Energieverlust pro Stoß})$$

Nach wievielen Stößen hat sich die Energie eines Neutrons von 1 MeV auf 0.025 eV reduziert?

$$\frac{1 \text{ MeV}}{2^k} = 0.025 \text{ eV}$$

$$k = \frac{\ln(4.0 \cdot 10^7)}{\ln 2} \approx 25$$

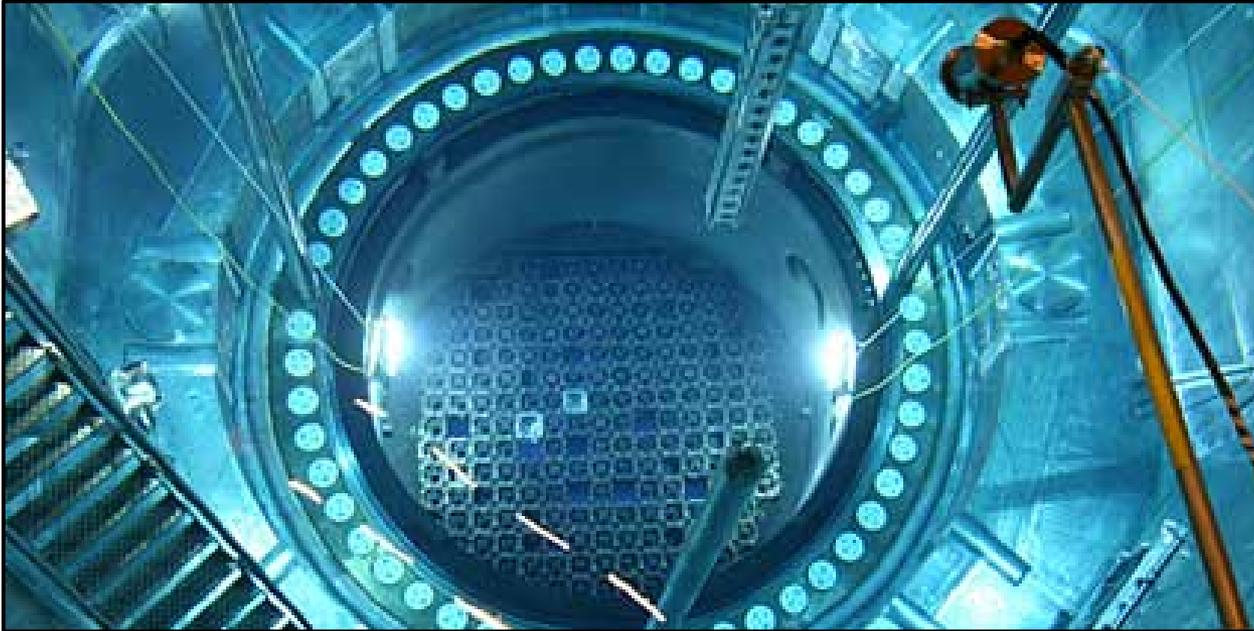


generation

Betrieb & Steuerung

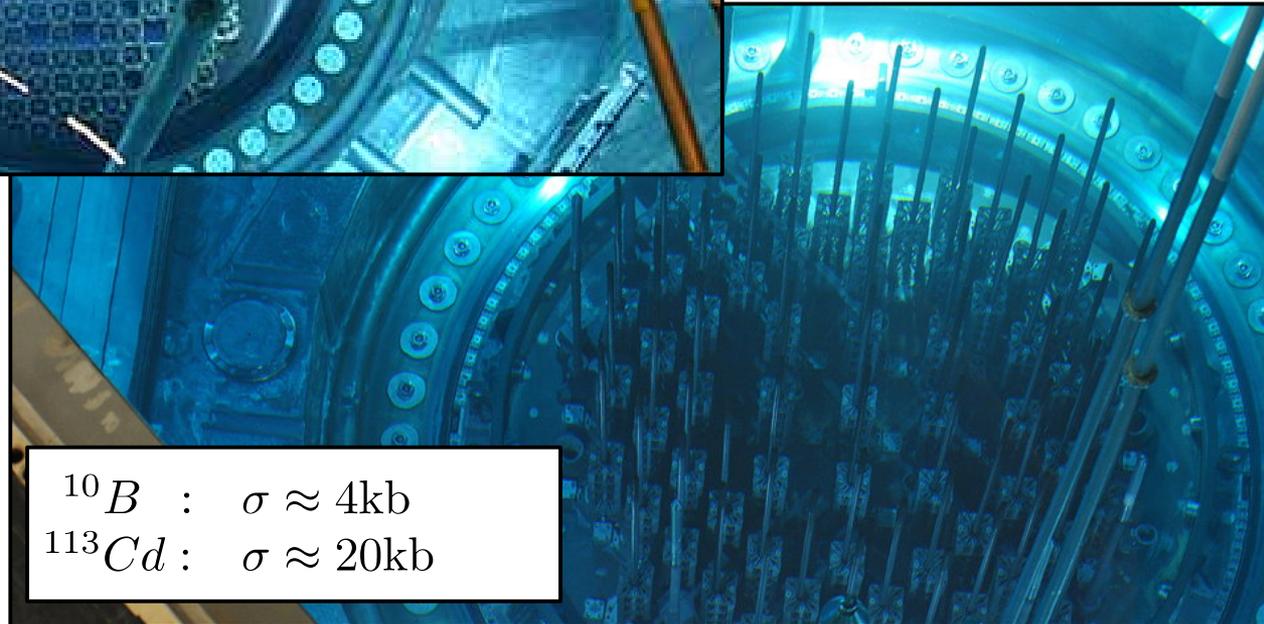
Woher kommt das blaue Leuchten?

- Betrieb: mit Hilfe von **Uran-Brennstäben**

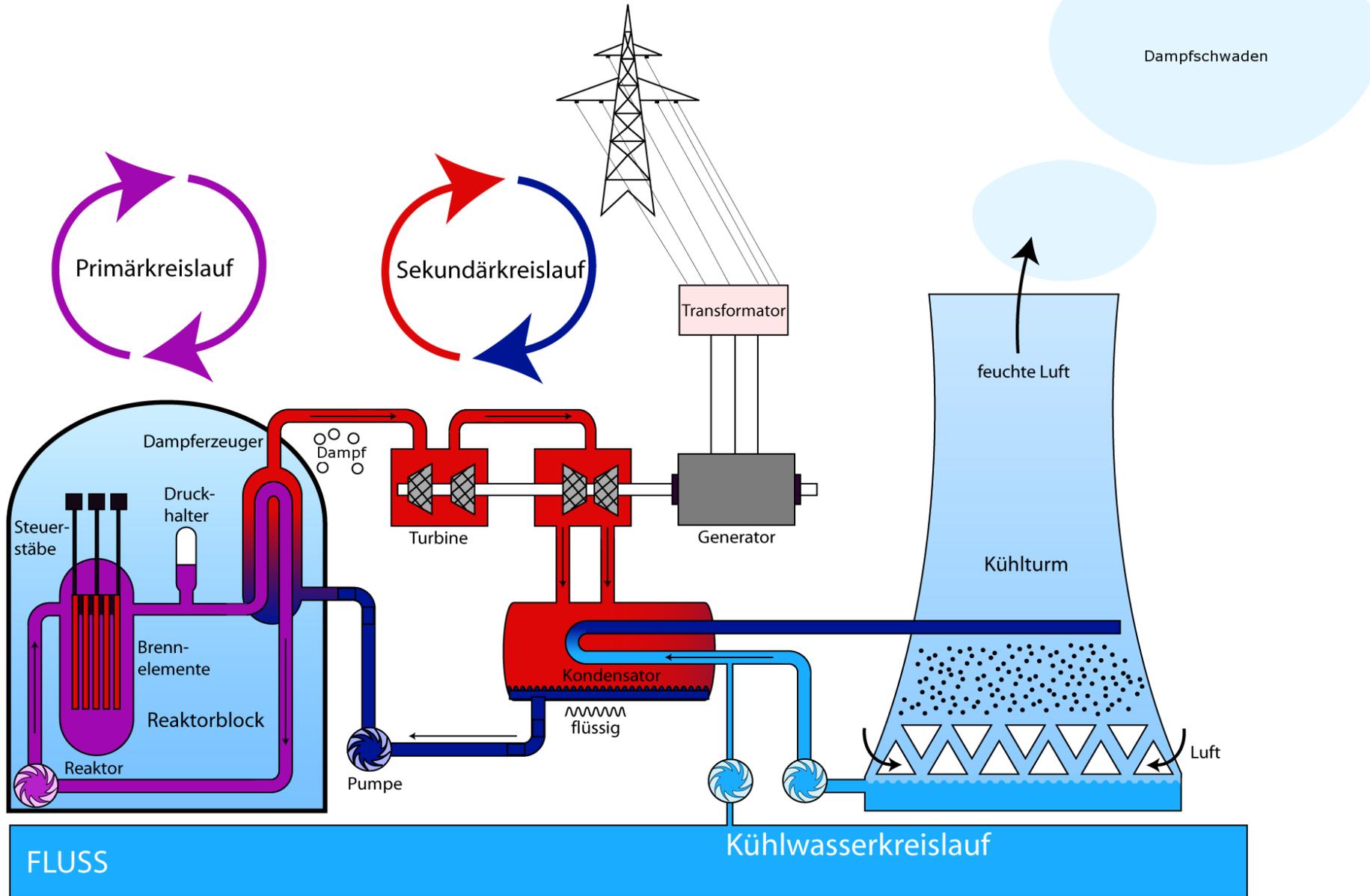


- Steuerung: mit Hilfe von **Regelstäben**
- Materialien mit hohem WQ für den Einfang thermischer Neutronen

$$^{10}\text{B} : \sigma \approx 4\text{kb}$$
$$^{113}\text{Cd} : \sigma \approx 20\text{kb}$$



Prinzip Druckwasserreaktor

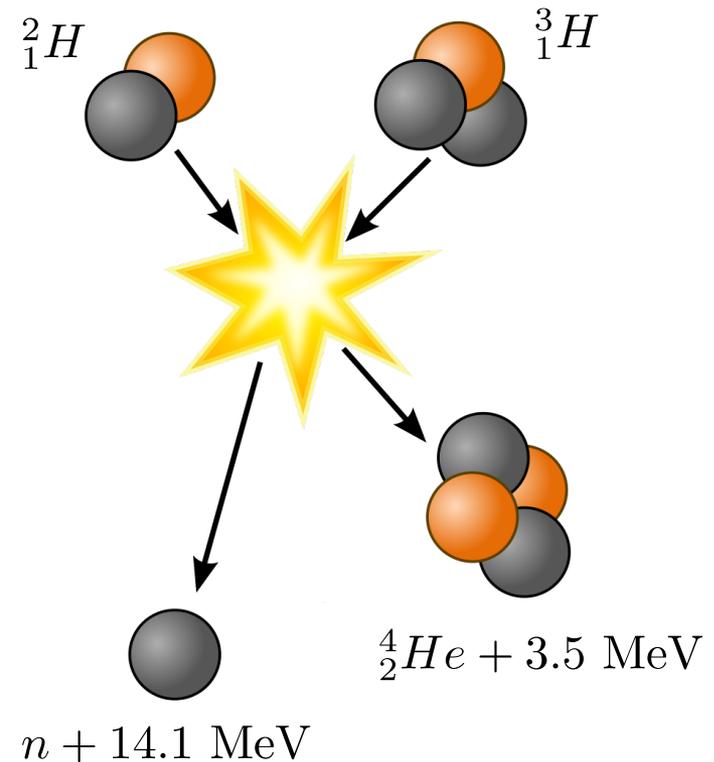
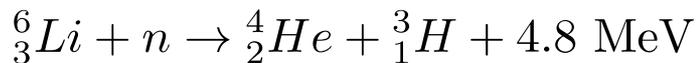


Wasserstoff-Fusion

- Am Beispiel der **Tritium-Deuterium-Fusion**
- Reaktionsrate abhängig von:
 - Teilchendichten (n_i)
 - Relativgeschwindigkeit (v)
 - Wirkungsquerschnitt (σ)
 - Volumen (V)

$$\frac{dN}{dt} = n_D \cdot n_T \cdot \langle \sigma \cdot v \rangle \cdot V$$

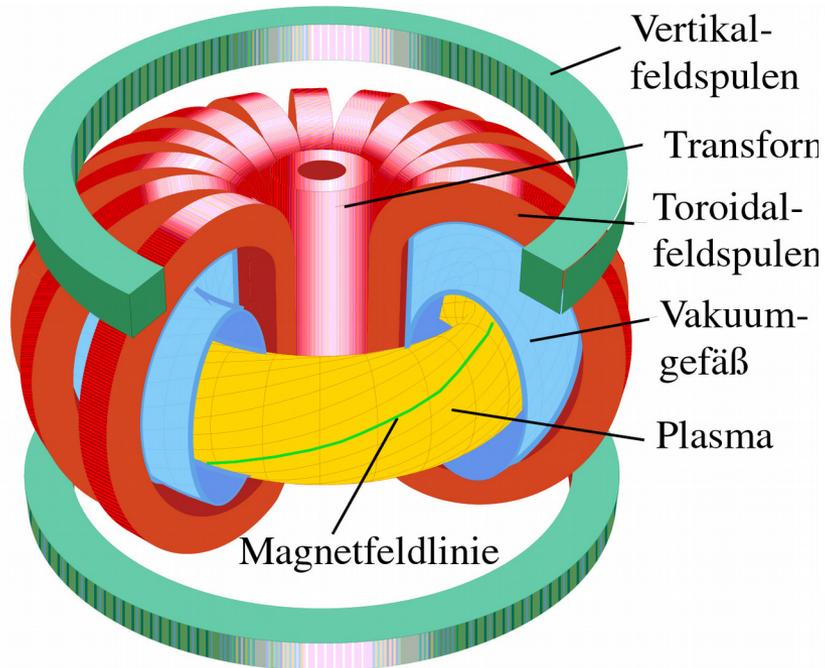
- Herstellung von ausreichend Tritium durch **“Brutreaktion”** in Mantel (engl. blanket) des Fusionsreaktors:



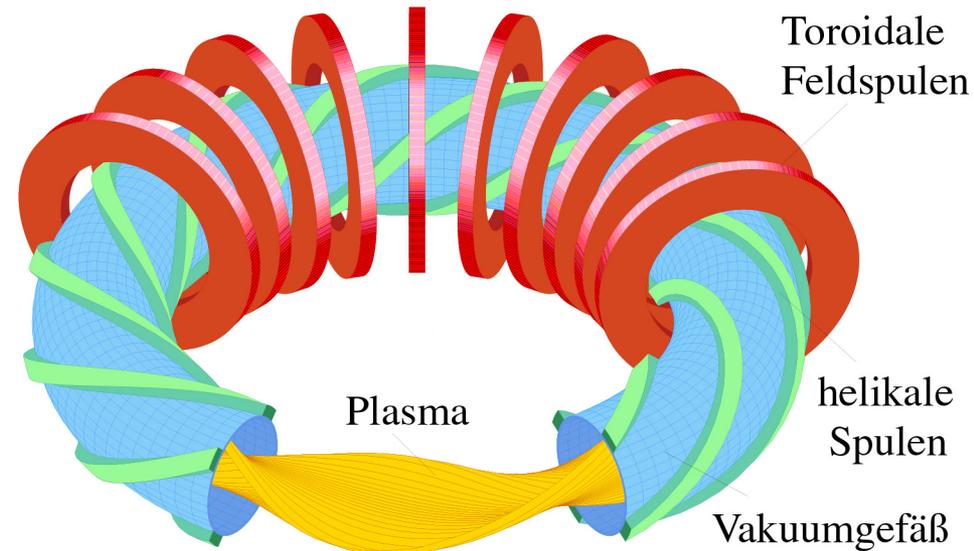
Reaktorkonzepte

- **Wasserstoffplasma**, bei Temperaturen von 100-200 MK
- Techniken um Plasma vor Ort zu halten:
 - **Magnetischer Einschluss** (hier diskutiert)
 - Trägheitseinschluss (Plasma wird durch eigene Trägheit vor Ort gehalten)

Tokamak

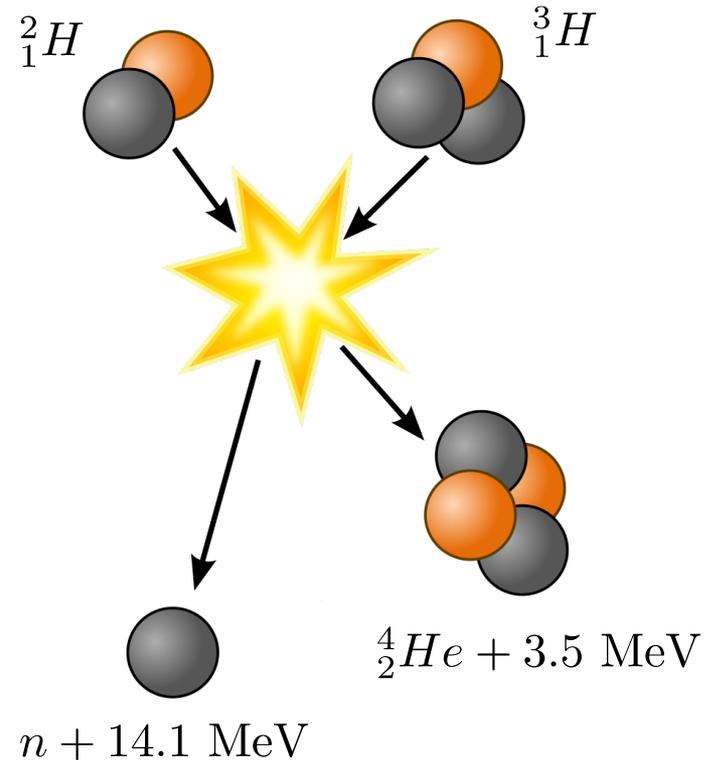


Stellarator



Lawson-Kriterium

- Ziel: Erzeuge **mehr Energie in Plasma** als zur Aufrechterhaltung des magnetischen Einschlußes benötigt wird
- Neutronen verlassen Plasma und können zur Energiegewinnung genutzt werden (→ 14.1 MeV, Stöße im Brutmantel)
- α -Teilchen **heizen Plasma** (→ 3.5 MeV)
- Verluste: Bremsstrahlung und durch Energietransport in Plasma (hier nicht diskutiert)
- Selbsterhaltender Betrieb, wenn Energieverluste in Plasma durch Aufheizung durch α -Teilchen kompensiert werden
→ **Lawson-Kriterium**



Lawson-Kriterium

Bisher noch von
keinem Reaktor
erreicht

n_e : Elektronendichte

n_T : Tritiumdichte

n_D : Deuteriumdichte

p_{loss} : Leistungsdichte thermischer Energieverlust

$$n_T = n_D = \frac{n_e}{2}$$

$$\rho_{th} = (n_e + n_T + n_D) \frac{3}{2} k_B T = 3 n_e k_B T$$

(thermische Energiedichte)

$$\frac{dN}{dt} = n_D \cdot n_T \cdot \langle \sigma \cdot v \rangle \cdot V = \frac{n_e^2}{4} \cdot \langle \sigma \cdot v \rangle \cdot V$$

(Reaktionsrate)

$$p_\alpha = \frac{E_\alpha}{V} \cdot \frac{dN}{dt} = \frac{n_e^2}{4} \cdot \langle \sigma \cdot v \rangle \cdot E_\alpha$$

(Leistungsdichte α -Zerfälle)

$$\tau_E = \frac{\rho_{th}}{p_{\text{loss}}}$$

(Einschlußzeit)

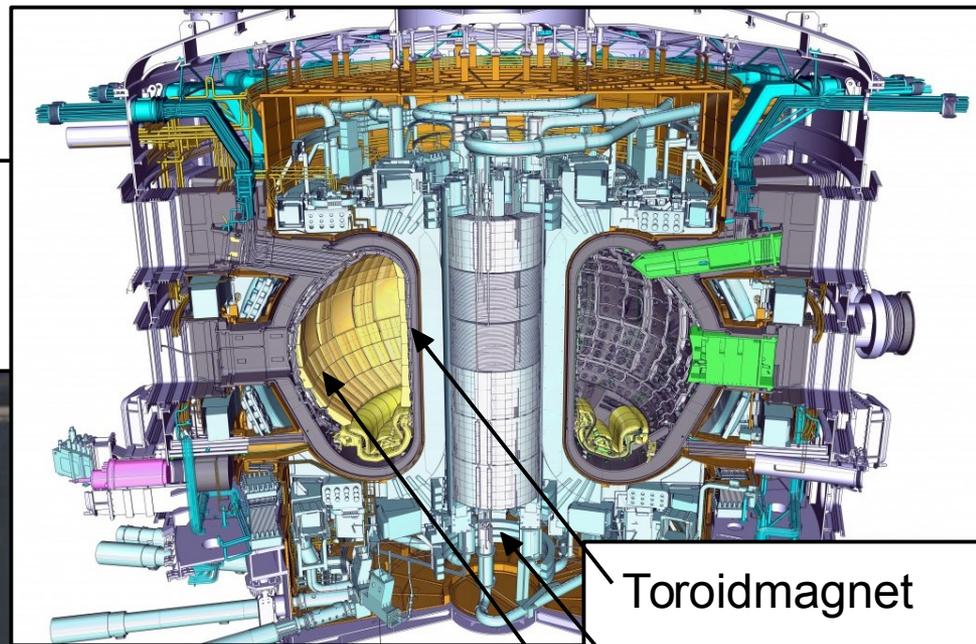
$$p_\alpha = \frac{n_e^2}{4} \cdot \langle \sigma \cdot v \rangle \cdot E_\alpha \geq p_{\text{loss}} = \frac{\rho_{th}}{\tau_E} = \frac{3 n_e k_B T}{\tau_E}$$

$$n_e \tau_E \geq \frac{12 n_e k_B T}{\langle \sigma \cdot v \rangle \cdot E_\alpha}$$

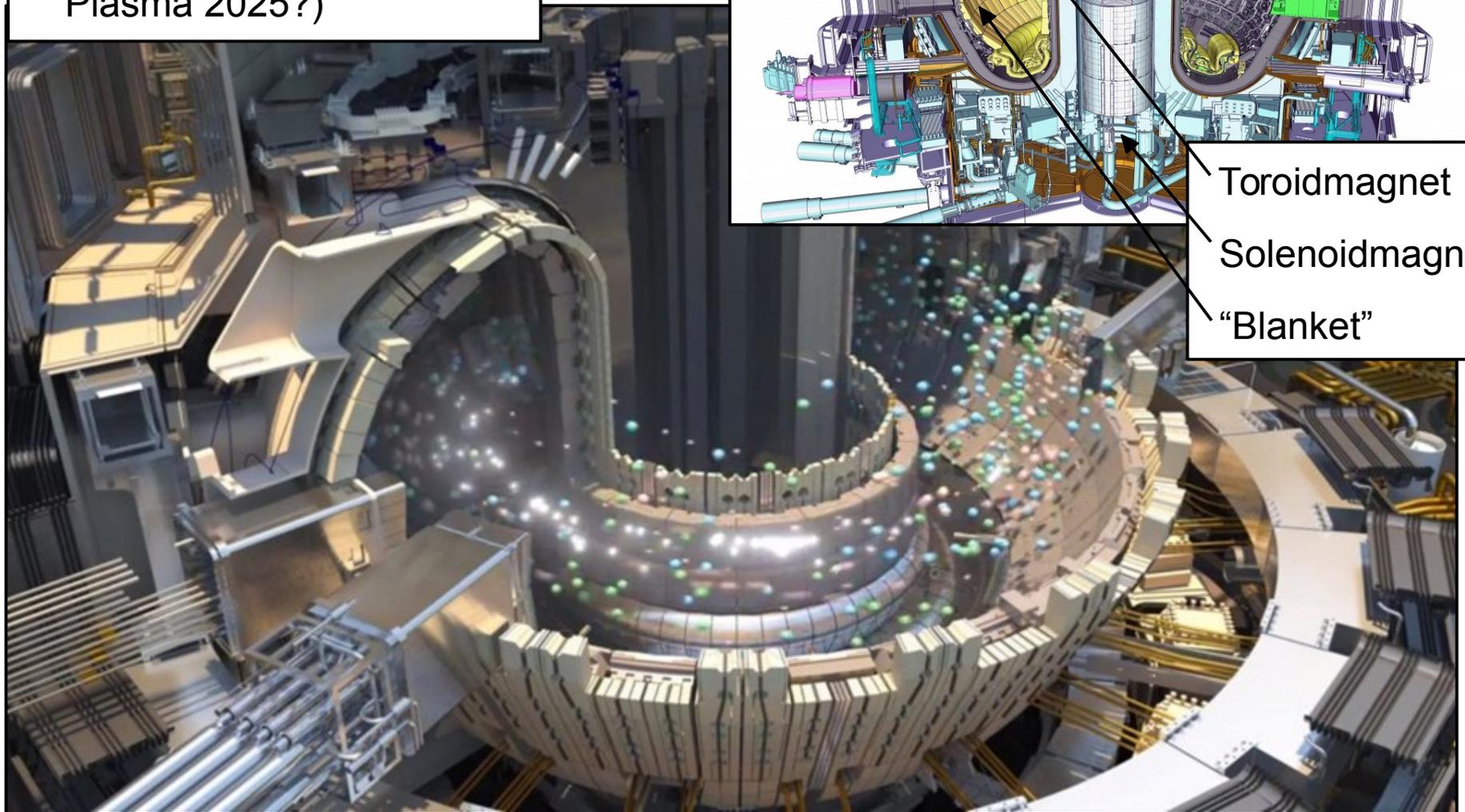
(Lawson-Kriterium)

ITER-Projekt

- Caderache (Südfrankreich)
- Derzeit im Bau (erstes Plasma 2025?)



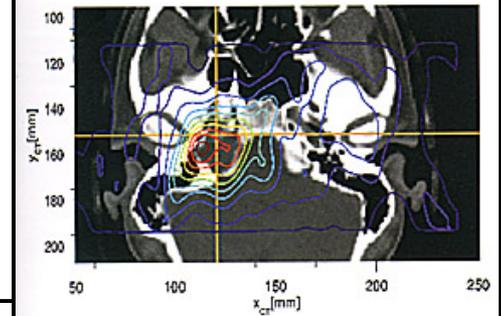
Toroidmagnet
Solenoidmagnet
"Blanket"



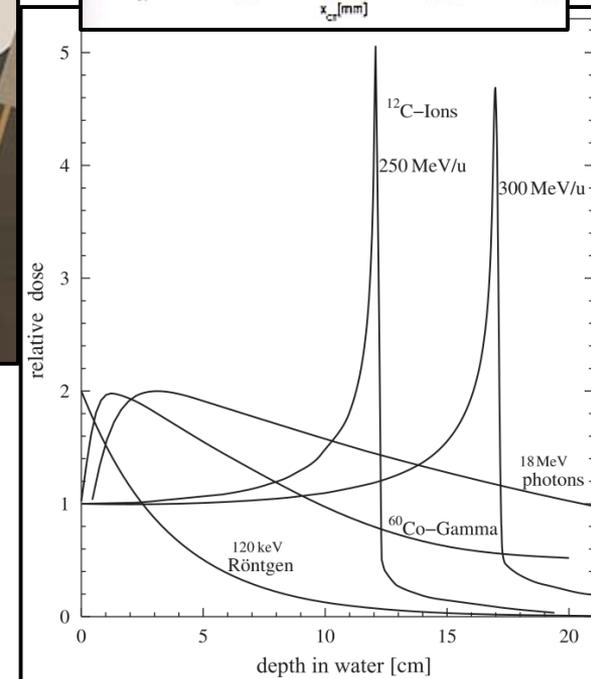
Kapitel 6.2: Kernphysik in der Medizin

Strahlentherapie (z.B. mit schweren Ionen)

- Bsp.: Schwerionentherapie in Heidelberg

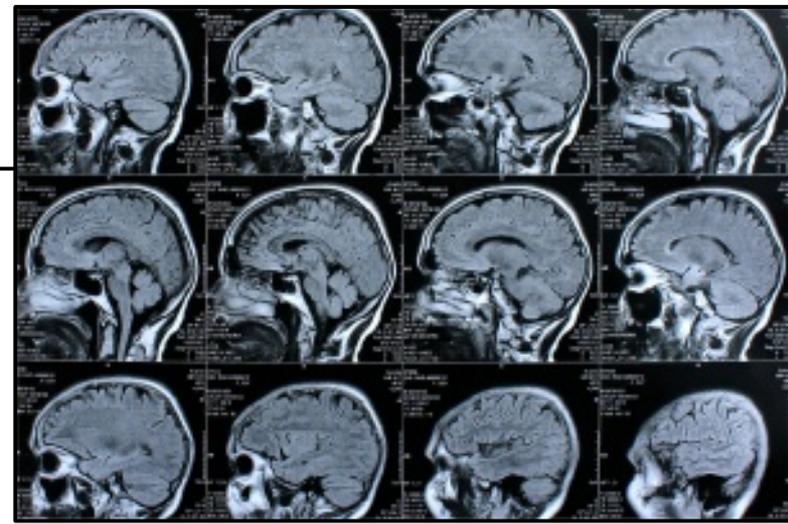


- Erlaubt **exaktere Deposition** der Strahlendosis
- Vgl VL-04 Folie 11



Magnetresonanztomographie

- Kernspin in Wasserstoff richtet sich parallel zu starkem äußerem (longitudinalem) Magnetfeld aus und wird durch transversales Wechselfeld resonant ausgelenkt.
- **Präzessionsbewegung** in longitudinalem Magnetfeld induziert Strom in Meßspulen.



$$\omega_L = g \cdot \frac{q}{2m} \cdot B \quad (\text{Lamorfrequenz})$$

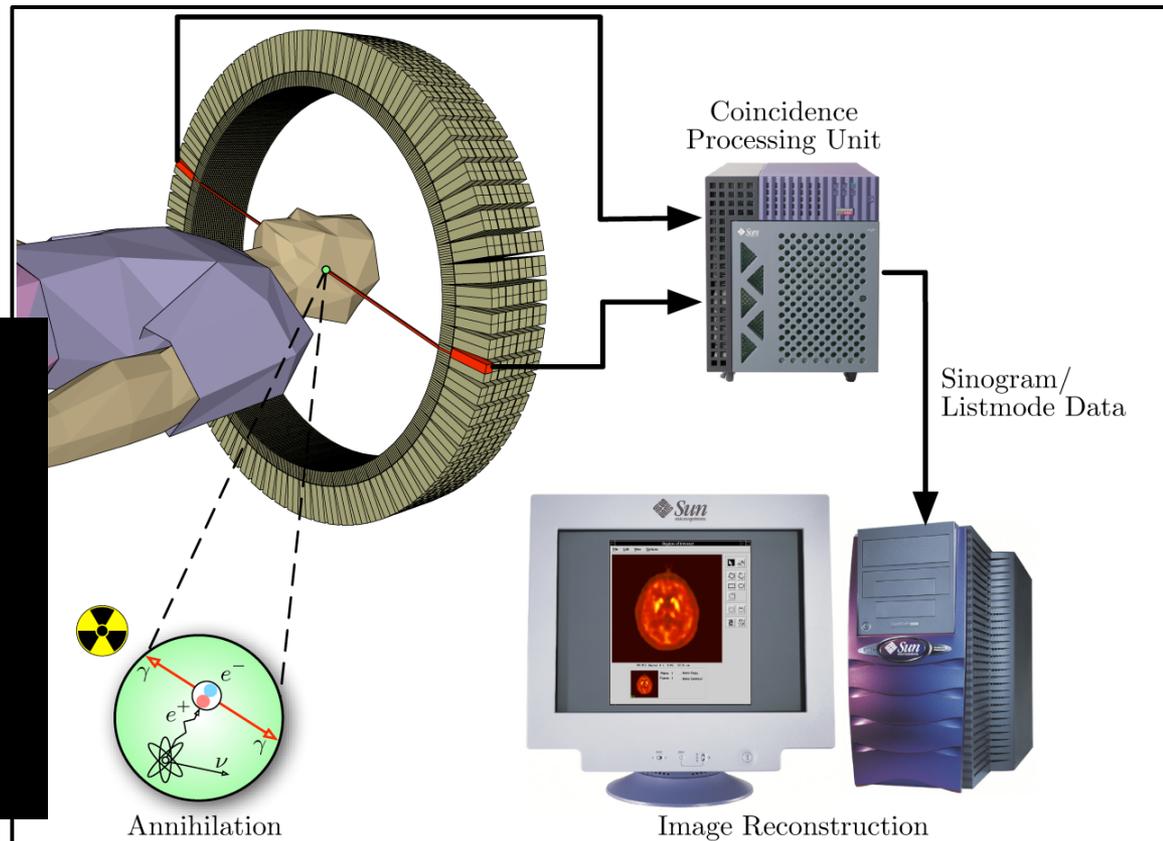


- Für p und $B=1$ Tesla $\rightarrow \omega_L = 42.58$ Hz
- Ortsauflösung durch Gradient in B-Feld

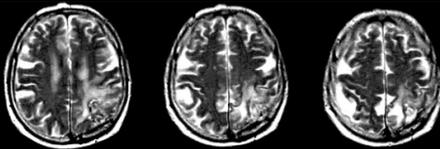
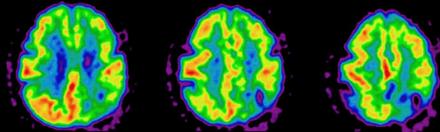
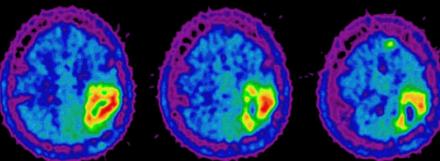
Positronen-Emissions-Tomographie

- Patient bekommt Radiopharmakon (“Marker”) gespritzt
- Marker reichert sich in betroffenem Gewebe an und emittiert Positronen (β^+ -Zerfall)
- **Paarvernichtung** mit Elektronen in Gewebe wird koinzident nachgewiesen

Marker	$T_{1/2}$ (min)
^{11}C	20.3
^{13}N	10,1
^{15}O	2.03
^{18}F	110



MRT

 ^{18}F FDG ^{18}F -Aethyl-tyrosin



KW-21/22

4 Kernmodelle

4.1 Eigenschaften stabler Kerne

4.2 Fermigas und Tröpfchenmodell

4.3 Schalenmodell

4.4 Struktur der Kernkräfte

KW-22

5 Instabile Kerne

5.1 Radioaktives Zerfallsgesetz

5.2 Alpha-, Beta-, Gammastrahlen

5.3 Kernspaltung und Kernfusion

KW-23

6 Anwendungen der Kernphysik

6.1 Energieerzeugung

6.2 Kernphysik in der Medizin

6.3 Nukleare Thermodynamik

6.4 Nukleare Astrophysik

KW-24

7 Symmetrien und Erhaltungssätze

7.1 Symmetrien und Quantenzahlen

7.2 Diskrete und kontinuierliche Symmetrien

7.3 Schlüsselexperimente zu C-, P-, CP-Verletzung

KW-25/26

8 QCD: Quarks, Gluonen und Hadronen

8.1 Quarkmodell und Hadronen

8.2 Quarkonium

8.3 Farbwechselwirkung in der QCD

8.4 Struktur der Nukleonen und Partonmodell



**YOU
ARE
HERE**



