

**Übungen zu
Moderne Experimentalphysik III
(Kerne und Teilchen)
Sommersemester 2017**

Übungsblatt Nr. 3

Ausgabe: Di, 16.05.2017

Abgabe: Di, 30.05.2017 (13:30) Briefkasten Geb. 30.23

Name des Übungsgruppenleiters und Gruppenbuchstabe:

Namen der bearbeitenden Gruppe:

Aufgabe 1: Spurdetektoren

(10 Punkte)

- a) In einer Vieldraht-Proportionalkammer seien die Anodendrähte parallel im Abstand d voneinander gespannt. Zeigen Sie, dass in diesem Falle die Ortsauflösung in Richtung x senkrecht zu den Drähten gegeben ist durch

$$\sigma_x = \frac{d}{\sqrt{12}}.$$

Die Ortsauflösung ist definiert als die Standardabweichung der gemessenen Position x bei vielen Einzelmessungen. Es kann angenommen werden, dass x gleichverteilt ist zwischen den Drähten.

Mit welchen Detektionsmethoden kann man die Ortsauflösung prinzipiell verbessern?

- b) In einem zylindrischen Spurdetektor herrsche ein Magnetfeld der Stärke B , dessen Feldlinien parallel zur Achse des Detektors orientiert seien. Der Detektor habe einen Radius L . Ein geladenes Teilchen fliege mit Impuls p von der zentralen Achse des Detektors zu seiner Außenwand, senkrecht zum Magnetfeld, vgl. Abb. 1. Zeigen Sie, dass für die relative Impulsauflösung gilt

$$\frac{\sigma_p}{p} \propto \frac{8\sigma_x}{0.3BL^2} \cdot p, \quad (1)$$

wobei σ_x die Auflösung einer einzelnen Ortsmessung entlang der Teilchenbahn sei und σ_x , L in m, B in T und p in GeV gegeben seien. Nehmen Sie an, dass der Bahnradius $R \gg L$ und zeigen Sie zunächst, dass dann für die Sagitta s der Bahn näherungsweise gilt

$$s = \frac{L^2}{8R}.$$

Benutzen Sie dann den Zusammenhang zwischen Impuls, Bahnradius, Sagitta und Ortsauflösung.

Aufgabe 2: Kalorimeter

(4 Punkte)

Motivieren Sie, warum die relative Energieauflösung eines elektromagnetischen Kalorimeters angenommen werden kann zu

$$\frac{\sigma_E}{E} = \frac{A}{\sqrt{E}}, \quad (2)$$

wobei E die Energie des einfallenden Teilchens und A eine detektorspezifische Konstante ist. Die Energieauflösung ist definiert als die Standardabweichung der gemessenen Energien bei vielen Einzelmessungen.

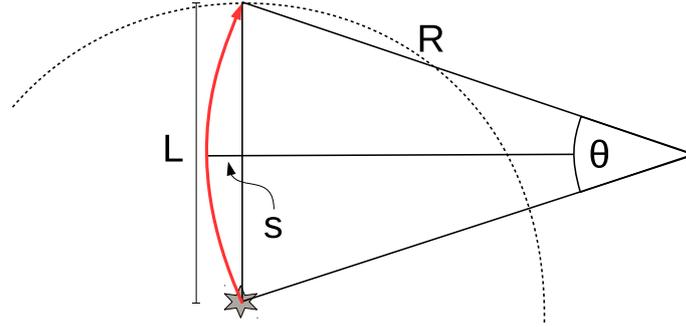


Abbildung 1: Illustration der in der Aufgabe verwendeten Anordnung. Die rekonstruierte Teilchenspur (roter Pfeil) führt von der zentralen Detektorachse (Stern) zur Außenwand (gestrichelte Linie), wobei R der Bahnradius ist und s die Sagitta der Bahn. Der Detektorradius beträgt L .

Überlegen Sie sich, wie die Energiemessung in einem elektromagnetischen Kalorimeter funktioniert und welche Fluktuation (Standardabweichung) der Anzahl der Teilchen im Schauer man erwartet.

Aufgabe 3: CMS-Detektor¹

(12 Punkte)

Der CMS-Detektor am LHC besteht im Zentralbereich aus mehreren (hohl-)zylinderförmigen Detektorsystemen, die konzentrisch um den Interaktionspunkt der Proton-Proton-Kollisionen angeordnet sind, vgl. [1]. Der innerste Detektor ist ein Spurdetektor mit etwa $L = 1,1$ m Radius. Dieser ist umschlossen von einem elektromagnetischen Kalorimeter („ECAL“), das wiederum von einem hadronischen Kalorimeter („HCAL“) umschlossen wird. Spurdetektor und Kalorimetrie befinden sich innerhalb einer supraleitenden Magnetspule mit einem Durchmesser von 5,9 m, die ein homogenes Magnetfeld der Stärke $B = 3,8$ T parallel zur Zylinderachse erzeugt. Außerhalb der Spule befinden sich Myondetektoren.

Abb. 2 zeigt als Beispiel eine Visualisierung der Spurdetektor- und ECAL-Messungen in einem Proton-Proton-Kollisionsereignis.

- a) Der Spurdetektor besteht aus 13 konzentrisch angeordneten Lagen von Siliziumpixel- und -streifenmodulen mit einer exzellenten Ortsauflösung der einzelnen Spurpunkte zwischen etwa $10 \mu\text{m}$ in den inneren und $50 \mu\text{m}$ in den äußeren Lagen. Wie groß ist die relative Impulsauflösung für geladene Teilchen mit einem Impuls von 50 GeV , die sich vom Kollisionspunkt senkrecht zum Magnetfeld nach außen bewegen? Der Proportionalitätsfaktor in (1) hängt von der Anzahl N der Ortsmessungen entlang der Teilchenbahn ab, und es gilt die „Glückstern-Formel“

$$\frac{\sigma_p}{p} = \sqrt{\frac{720}{N+4}} \cdot \frac{\sigma_x}{0,3BL^2} \cdot p. \quad (3)$$

¹Die in dieser Aufgabe verwendeten Zahlenwerte sind [1, 2, 3] entnommen.

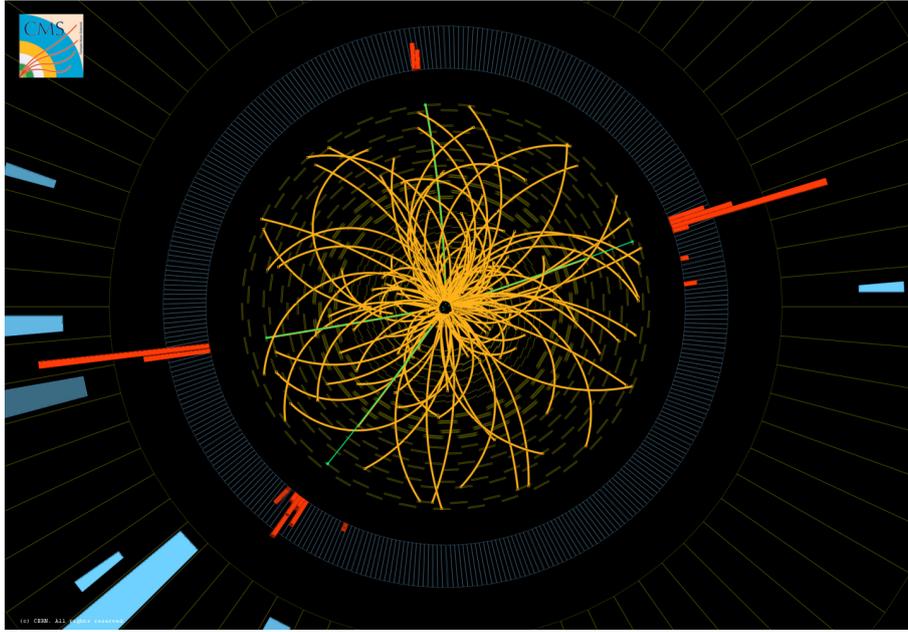


Abbildung 2: Visualisierung der Signaturen („event display“), welche die in einem Proton-Proton-Kollisionsereignis entstandenen Teilchen im CMS-Detektor erzeugen. Die Zylinderachse des Detektors zeigt in die Papierebene hinein, der Kollisionspunkt befindet sich im Bildmittelpunkt. Dargestellt sind die in konzentrischen Lagen angeordneten Module des Spurdetektors (Streifen im Zentralbereich) sowie das ECAL und HCAL (mittlerer und äußerer Kreis aus Trapezoiden). Die gelben und grünen gekrümmten Linien stellen rekonstruierte Teilchenspuren dar, die roten Balken visualisieren Energieeinträge im ECAL (die Höhe ist proportional zur gemessenen Energie). Deutlich zu erkennen sind vier Elektronsignaturen: jeweils eine Spur, hier grün hervorgehoben, sowie ein zugeordneter Energieeintrag im ECAL. Bei dem Ereignis, das am 25. Juni 2011 aufgezeichnet wurde, handelt es sich um einen Kandidaten für den Zerfall eines Higgs-Bosons in vier Elektronen. Entnommen aus [4].

Nehmen Sie an, dass in jeder Detektorlage eine Ortsmessung vorliegt und rechnen Sie mit einer mittleren Ortsauflösung von $\sigma_x = 25 \mu\text{m}$.

Wie groß muss der Teilchenimpuls mindestens sein, damit das Teilchen den Spurdetektor verlassen und auf das ECAL treffen kann?

- b) Das ECAL besteht aus 23 cm langen Bleiwolframatkristallen (PbWO_4), entsprechend 25,8 Strahlungslängen X_0 und etwa einer hadronischen Wechselwirkungslänge λ . Für die Proportionalitätskonstante der Energieauflösung (2) gilt $A = 0,036 \text{ GeV}^{1/2}$. Das HCAL ist ein Sampling-Kalorimeter mit abwechselnden Lagen aus Messingabsorbieren und Plastikszintillatoren, dessen Dicke etwa 6 hadronischen Wechselwirkungslängen λ entspricht. Für das HCAL² ist $A = 1,2 \text{ GeV}^{1/2}$.

Wie groß ist die relative Energieauflösung des ECAL für Elektronen mit einer

²Strenggenommen gilt dieser Wert für eine kombinierte ECAL+HCAL-Messung.

Energie von 50 GeV? Wie groß ist die relative Energieauflösung des HCAL für Pionen mit einer Energie von 50 GeV?

Warum verwendet man das ECAL alleine nicht zur Messung der Energie von Pionen?

- c) Vergleichen Sie die Auflösung von Spurdetektor und ECAL für Elektronen (hinreichend großer Energien, so dass $E = p$). Ab welcher Energie wird die Auflösung des ECAL besser als die des Spurdetektors? Stellen Sie die Spurdetektor- und ECAL-Auflösung als Funktion der Elektronenenergie graphisch dar für Energien zwischen 1 GeV und 100 GeV und diskutieren Sie das Resultat. Zeichnen Sie beide Kurven zur besseren Vergleichbarkeit in dasselbe Diagramm.
- d) Bisher haben wir bei der Auflösung des Spurdetektors nur den Effekt der Ortsauflösung berücksichtigt, vgl. (3). Aufgrund des vergleichsweise hohen Materialbudgets im CMS-Spurdetektor gibt es aber auch einen nicht zu vernachlässigenden Beitrag C_{mps} zur relativen Impulsauflösung durch Vielfachstreuung. Dieser ist in etwa konstant mit³ $C_{\text{mps}} = 0,01$, so dass gilt

$$\left(\frac{\sigma_p}{p}\right)^2 = (C_{\text{pos}} \cdot p)^2 + C_{\text{mps}}^2,$$

mit dem aus (3) bekannten

$$C_{\text{pos}} = \sqrt{\frac{720}{N+4}} \cdot \frac{\sigma_x}{0,3BL^2}.$$

Stellen Sie auch in diesem Falle die Auflösung für Elektronen zwischen 1 GeV und 100 GeV graphisch dar und vergleichen Sie mit den Ergebnissen im vorherigen Aufgabenteil.

- e) Ein weiterer Nachteil des hohen Materialbudgets ist, dass die Energiemessung im ECAL verfälscht wird: die Strecke vom Kollisionspunkt zum ECAL entspricht im Zentralbereich einer Dicke von etwa $0,4 X_0$. Welchen Teil seiner Energie verliert ein Elektron vom Kollisionspunkt im Mittel, bevor es das ECAL erreicht? Wie viele Photonen konvertieren im Mittel in ein Elektron-Positron-Paar?

Aufgabe 4: Zyklotron

(8 Punkte)

Die Siliziumsensoren des CMS-Spurdetektors müssen besonders strahlenhart sein, um den hohen Strahlendosen im Innern des CMS-Detektors standhalten zu können, die andernfalls das Material schädigen und so die Messgenauigkeit verschlechtern

³Zahlenwert abgeschätzt aus einem Vergleich der Ergebnisse in Aufgabenteil c) und den Ergebnissen in [3].

würden. Bei der Entwicklung der strahlenharten Sensoren wurden u.a. am Bestrahlungszentrum Karlsruhe [5] des KIT am Campus Nord Studien der Strahlungsschäden durchgeführt.

Das Bestrahlungszentrum verwendete zu diesen Zwecken ein Zyklotron, das einen Strahl von Protonen mit einer kinetischen Energie von 25 MeV erzeugt. Für diese Aufgabe nehmen wir an, dass das homogene Magnetfeld zur Ablenkung der Protonen eine konstante Feldstärke von 1 T habe.

- a) Welchen Radius muss das Zyklotron mindestens haben, um Protonen auf kinetische Energien von 25 MeV zu beschleunigen?
- b) Welche Frequenz hat die Beschleunigungsspannung?
- c) Auf welche kinetische Energie kann man α -Teilchen mit diesem Zyklotron beschleunigen? Wie groß müsste der Radius gewählt werden, um α -Teilchen auf 100 MeV beschleunigen zu können?
- d) Warum verwendet man das Zyklotron nicht zur Elektronenbeschleunigung?

Überlegen Sie sich bei der Lösung der Aufgaben, ob man klassisch oder relativistisch rechnen kann bzw. muss.

Aufgabe 5: Formfaktor

(6 Punkte)

Der experimentell bestimmte Wirkungsquerschnitt für Elektronenstreuung an ausgedehnten Ladungsverteilungen lässt sich durch Modifikation des Wirkungsquerschnitts für Streuung an punktförmigen Ladungen mit Formfaktoren beschreiben: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} \cdot |F(\vec{q})|^2$, wobei \vec{q} der Impulsübertrag des Elektrons ist. In der Bornschen Näherung entspricht der Formfaktor F der Fouriertransformierten der Ladungsverteilung,

$$F(\vec{q}) = \int \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q}\vec{r}} d^3r. \quad (4)$$

Aus Streuexperimenten ergibt sich, dass die Ladungsverteilung des Protons in etwa

$$\rho(\vec{r}) = \rho_0 e^{-ar}, \quad r \equiv |\vec{r}|, \quad (5)$$

ist mit $1/a = 0,22 \text{ fm}$.

- a) Zeigen Sie, dass bei Normierung der Ladungsdichte (5) auf eine Gesamtladung von 1 gilt $\rho_0 = \frac{a^3}{8\pi}$.
- b) Zeigen Sie, dass für radialsymmetrische Ladungsdichten $\rho(\vec{r}) = \rho(r \equiv |\vec{r}|)$ der Formfaktor (4) gegeben ist durch

$$F(\vec{q}) = 4\pi \int_0^\infty \rho(r) \frac{\sin\left(\frac{qr}{\hbar}\right)}{\frac{qr}{\hbar}} r^2 dr, \quad q \equiv |\vec{q}|.$$

Hinweis: Rechnen Sie in Kugelkoordinaten mit der z -Achse ($\theta = 0$) in Richtung von \vec{q} , sodass $\vec{q} \cdot \vec{r} = qr \cos\theta$.

c) Zeigen Sie, dass für den Formfaktor der Ladungsverteilung (5) des Protons gilt

$$F(\vec{q}) = \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{q}{a\hbar}\right)^2\right)^2}.$$

Hinweis: Es ist

$$\begin{aligned} \int x e^{Ax} \sin(Bx) dx &= \frac{x e^{Ax}}{A^2 + B^2} (A \sin(Bx) - B \cos(Bx)) \\ &\quad - \frac{e^{Ax}}{(A^2 + B^2)^2} ((A^2 - B^2) \sin(Bx) - 2AB \cos(Bx)). \end{aligned}$$

d) Zeigen Sie, dass für den mittleren quadratischen Ladungsradius $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$ des Protons gilt $\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \frac{\sqrt{12}}{a}$. Dabei ist $\langle r^2 \rangle$ definiert als $\langle r^2 \rangle = \int r^2 \rho(\vec{r}) d^3r$.

e) Vergleichen Sie den Formfaktor des Protons mit dem einer homogen geladenen Kugel, deren Radius R gleich dem mittleren quadratischen Radius des Protons sei. Stellen Sie den Verlauf der beiden Formfaktoren graphisch dar für Impulsüberträge von $q = 0 \text{ GeV}/c$ bis $q = 5 \text{ GeV}/c$ in Schritten von 0.1 GeV .

Zeigen Sie dafür zunächst, dass der Formfaktor einer kugelförmigen, konstanten Ladungsverteilung mit Radius R ,

$$\rho(r) = \begin{cases} C & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases},$$

gegeben ist durch

$$F(\vec{q}) = \frac{3}{\kappa^3} (\sin(\kappa) - \kappa \cos(\kappa)), \quad \kappa \equiv \frac{qR}{\hbar}.$$

Literatur

- [1] CMS Collaboration, “The CMS experiment at the CERN LHC”, *JINST* **3** (2008) S08004. doi:10.1088/1748-0221/3/08/S08004.
- [2] CMS ECAL/HCAL Collaboration, “The CMS barrel calorimeter response to particle beams from 2 to 350 GeV/c”, *The European Physical Journal C - Particles and Fields* **60** (2009) 359–373. doi:10.1140/epjc/s10052-009-0959-5.
- [3] CMS Collaboration, “Description and performance of track and primary-vertex reconstruction with the CMS tracker”, *Journal of Instrumentation* **9** (2014), no. 10, P10009.
- [4] L. T. Thomas McCauley, “Candidate events in the CMS Standard Model Higgs Search using 2010 and 2011 data”. CMS Collection., Dec, 2011.
- [5] “Bestrahlungszentrum Karlsruhe”. <https://www.ekp.kit.edu/Bestrahlungszentrum.php>.