

**Übungen zu
Moderne Experimentalphysik III
(Kerne und Teilchen)
Sommersemester 2017**

Übungsblatt Nr. 4

Ausgabe: Di, 30.05.2017

Abgabe: Di, 06.06.2017 (13:30) Briefkasten Geb. 30.23

Name des Übungsgruppenleiters und Gruppenbuchstabe:

Namen der bearbeitenden Gruppe:

Aufgabe 1: Reaktionen der Teilchenphysik

(5 Punkte)

Im Quarkmodell betrachtet man die an der starken Wechselwirkung teilnehmenden Teilchen als aus Quarks und eventuell Antiquarks zusammengesetzt. Die für diese Aufgaben relevanten Eigenschaften der Quarks sind im folgenden aufgelistet.

Teilchenbezeichnung	Quarkflavour	Ladung (in Vielfachen von e)
$u(\bar{u})$	up	$+2/3$
$d(\bar{d})$	down	$-1/3$
$c(\bar{c})$	charm	$+2/3$
$s(\bar{s})$	strange	$-1/3$
$t(\bar{t})$	top	$+2/3$
$b(\bar{b})$	bottom	$-1/3$

Im folgenden betrachten wir Zerfälle der folgenden Teilchen:

- (i) Ein K^- -Meson ist aus einem **strange**- und einem **up**-Quark zusammengesetzt. Seine mittlere Lebensdauer beträgt $\tau_K = 1.2380(21) \cdot 10^{-8}$ s. Es kann unter anderem in ein Myon und ein Anti-Myonneutrino zerfallen, wie im folgenden angezeigt:

$$K^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu \mu^-$$

- (ii) Ein π^0 -Meson ist aus einer Überlagerung von $\frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})$ zusammengesetzt. Es zerfällt dominant in zwei Photonen, wie im folgenden angezeigt:

$$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$$

- (iii) Ein π^+ -Meson ist aus einem **up**- und einem **down**-Quark zusammengesetzt. Es zerfällt dominant in ein Antimyon und ein Myonneutrino. Die mittlere Lebensdauer des π^+ beträgt $\tau_\pi = (2.6033 \pm 0,0005) \cdot 10^{-8}$ s.

- (iv) Das J/ψ -Meson ist aus einem **charm**- und einem **anti-charm**-Quark zusammengesetzt. Es zerfällt dominant in ein Myon und ein Antimyon, wie im folgenden angezeigt:

$$J/\psi \rightarrow \mu^+ \mu^-$$

- (v) Das Δ^{++} -Baryon ist aus drei **up**-Quarks zusammengesetzt. Es kann unter anderem in ein Proton und ein π^+ -Meson zerfallen, wie im folgenden angezeigt:

$$\Delta^{++} \rightarrow p\pi^+$$

Die Reaktionszeit für diesen Zerfall ist von der Ordnung $\mathcal{O}(10^{-28}$ s).

Zerfall	Lebensdauer ¹	Quarkzusammensetzung ²	Zerfallsart ³
$K^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu \mu^-$	10^{-8} s		
$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$			
$\pi^+ \rightarrow$	10^{-8} s		
$J/\psi \rightarrow \mu^+ \mu^-$			
$\Delta^{++} \rightarrow p\pi^+$	10^{-28} s		

a)

Vervollständigen Sie die angegebene Tabelle:

b)

Zeichnen Sie die Feynmandiagramme des jeweiligen Zerfalls an den beteiligten Quarklinien. Sie können die nicht-beteiligten (sogenannten *spectator*-)Quarks parallel zu den beteiligten Quarklinien in das Diagramm einzeichnen, um klar zu machen, um welches Teilchen es sich bei dem jeweiligen Zerfall handelt.

c)

Zwischen den Quarks in den Mesonen und Baryonen werden permanent Gluonen ausgetauscht. In der bildlichen Darstellung kann ein Quark die Farbe grün tragen und unter Aussendung eines Gluons, das die Farben grün und anti-rot trägt die Farbe rot annehmen. Am Reaktionsvertex bleibt die (ein- und auslaufende) "Gesamtfarbe" erhalten. Zeichnen Sie ein mögliches Diagramm (unter expliziter Angabe des Farbflusses) für die oben beschriebene Reaktion, wobei das Gluon anschließend in zwei weitere Gluonen zerfällt, die wiederum in zwei Quark-Antiquark-Paare zerfallen.

d)

Ein top-Quark zerfällt innerhalb von $\mathcal{O}(10^{-25})$ s. Welcher Wechselwirkung würden Sie diesen Zerfall zuordnen?

Aufgabe 2: Fermigasmodell des Atomkerns

(7 Punkte)

Im Fermigasmodell des Atomkerns wird angenommen, dass die Nukleonen sich wie ein wechselwirkungsfreies Fermigas in einem äußeren Potential verhalten. Es werden zwei separate Kastenpotentiale für Neutronen und Protonen angenommen, wobei für Protonen zusätzlich ein Coulombpotential auftritt. Die Anzahl der Zustände im Impulsraumintervall $[p, p + dp]$ ist für den Grundzustand des Kerns bei $T = 0$ gegeben durch

$$dn = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} 4\pi p^2 dp, \quad (1)$$

vgl. Vorlesung, wobei $V = \frac{4}{3}\pi R_0^3 A$ das Kernvolumen im Ortsraum ist mit der Kernmassenzahl A . R_0 ergibt sich aus Streuexperimenten zu etwa 1,2 fm.

- (i) Berechnen Sie den Fermiimpuls p_F und zeigen Sie, dass p_F für symmetrische Kerne mit $N = Z = A/2$ unabhängig von A ist. Berücksichtigen Sie dabei die Entartung der Zustände durch Spin und Isospin.

Kann sich ein Nukleon aufgrund der Unschärferelation überhaupt im Kern aufhalten, wenn man als Impulsunschärfe den Fermiimpuls annimmt?

- (ii) Berechnen Sie das Fermienergie $E_F^{N=Z}$ für einen symmetrischen Kern. Benutzen Sie dazu die klassische Energie-Impuls-Beziehung. Ist die klassische Rechnung gerechtfertigt?
- (iii) Um welchen Faktor ändert sich das Fermienergie für Protonen und Neutronen bei asymmetrischen Kernen mit $N \neq Z$? Sie können das Ergebnis als Funktion von A , N und Z angeben.
- (iv) Zeigen Sie, dass für die totale kinetische Energie E_{tot} aller Nukleonen im Kern gilt

$$E_{\text{kin}}^{\text{tot}} = \frac{3}{10m_N} \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\hbar}{R_0} \right)^2 \left(\frac{N^{\frac{5}{3}} + Z^{\frac{5}{3}}}{A^{\frac{2}{3}}} \right), \quad (2)$$

wobei $m_N = 940 \text{ MeV}$ die Nukleonmasse sei.

Welche Gesamtenergien ergeben sich für ^{12}C und ^{14}C ?

- (v) Zeigen Sie qualitativ, dass sich aus dem Ausdruck (2) für die totale kinetische Energie die Volumen- und Asymmetrieterme der Bethe-Weizsäcker-Formel herleiten lassen. Entwickeln Sie dazu $E_{\text{kin}}^{\text{tot}}$ nach der Differenz $\Delta = N - Z$ und betrachten Sie nur Terme bis zur zweiten Ordnung. Nutzen Sie bei der Rechnung, dass $N = \frac{1}{2}(A + \Delta)$ und $Z = \frac{1}{2}(A - \Delta)$.

Aufgabe 3: Tröpfchenmodell

(4 Punkte)

Die Bindungsenergie eines Atomkerns mit der Ordnungszahl Z und der Massenzahl A kann durch die semi-empirische Bethe-Weizsäcker-Formel

$$E_B = a_V A - a_O A^{2/3} - \frac{a_C Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_A \frac{(A/2 - Z)^2}{A} + \frac{a_P}{A^{3/4}} \quad (3)$$

beschrieben werden, wobei

$$\begin{aligned} a_V &= 15,8 \text{ MeV}, \\ a_O &= 18,3 \text{ MeV}, \\ a_C &= 0,714 \text{ MeV}, \\ a_A &= 23,2 \text{ MeV}, \\ a_P &= \begin{cases} 12 \text{ MeV} & \text{gg-Kerne} \\ 0 & \text{ug/gu-Kerne} \\ -12 \text{ MeV} & \text{uu-Kerne} \end{cases} . \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Energie, die benötigt wird, um ein Neutron aus einem $^{40}_{20}\text{Ca}$ Kern zu entfernen.

Aufgabe 4: Schalenmodell des Atomkerns

(4 Punkte)

In Abb. 1 ist ein Energieniveauschema für Nukleonen im Schalenmodell gezeigt. Zum

Beispiel besetzen Neutronen und Protonen im $^{16}_8\text{O}_8$ Kern im Grundzustand jeweils die folgenden Niveaus („Schalen“)

$$(1s_{1/2})^2(1p_{3/2})^4(1p_{1/2})^2,$$

wobei der Exponent die Besetzungszahl angibt. Alle Schalen sind vollständig besetzt. Es treten für Neutronen und Protonen nur „paarige“ Nukleonen, d.h. Paare von Nukleonen mit entgegengesetztem Spin, auf (gg-Kern), sodass der Gesamtdrehimpuls J des Kerns 0 ist und die Parität $P = +1$: $J^P = 0^+$.

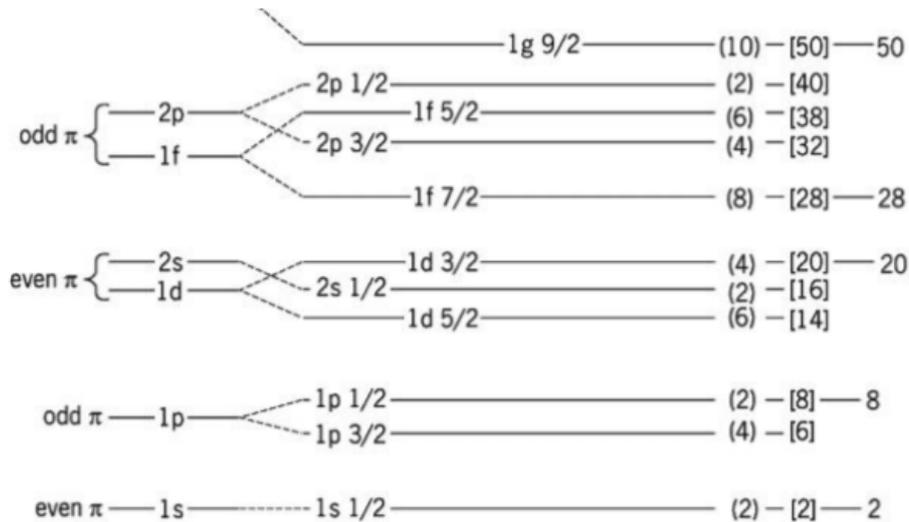


Abbildung 1: Energieniveauschema für Nukleonen im Schalenmodell. Zahlen in runden und eckigen Klammern geben die Anzahl der Zustände pro Niveau bzw. die Gesamtzahl der Zustände an.

- (i) Bei ug/gu-Kernen ist der Gesamtdrehimpuls des Kerns durch den Gesamtdrehimpuls des unpaarigen Nukleons gegeben, und die Parität durch den Bahndrehimpuls des unpaarigen Nukleons, $P = (-1)^l$. Geben Sie für $^{15}_7\text{N}_8$ und $^{17}_9\text{F}_8$ die Besetzungszahlen für Neutronen und Protonen an, sowie die Parität und den Gesamtdrehimpuls der Kerne.
- (ii) Für uu-Kerne ergibt sich der Gesamtdrehimpuls aus der Vektorsumme der beiden Gesamtdrehimpulse der unpaarigen Nukleonen, und die Parität aus dem Produkt ihrer Paritäten. Was sind die möglichen Gesamtdrehimpulse und Paritäten für $^6_3\text{Li}_3$ und $^{40}_{19}\text{K}_{21}$?

Zur Erinnerung: Bei der Addition zweier Drehimpulse mit Quantenzahlen J_1 und J_2 ergibt sich für die möglichen Quantenzahlen J des Gesamtdrehimpulses $|J_1 - J_2| \leq J \leq J_1 + J_2$.

Nehmen Sie bei der Lösung der Aufgabe an, dass sich die Kerne im Grundzustand befinden.