Moderne Experimentalphysik III (Teilchenphysik) (SS 18)

http://ekpwww.physik.uni-karlsruhe.de/~rwolf/teaching/ss18-teilchen.html

Übungsblatt 8

Name des Übungsgruppenleiters und Gruppenbuchstabe:

Namen der bearbeitenden Gruppe:

Ausgabe: Di, 12.06.2018 (09:45) Abgabe: Mo, 18.06.2018 (13:30) Briefkasten Geb. 30.23

Aufgabe 18: QCD **(10 Punkte)**

Wie Sie in den letzten Vorlesungen gelernt haben spielen Symmetrien in der Teilchenphysik eine zentrale Rolle. Die SU(3) ist die Symmetriegruppe unter Rotationen im komplexen drei dimensionalen Raum $\mathbb{C}^3$. Sie ist das komplexe Äquivalent zur SO(3), der Rotationen im $\mathbb{R}^3$. In der Quantenmechanik haben wir es mit komplexen Wellenfunktionen zu tun, daher bewegen wir uns im komplexen Raum. Sie haben die SU(3) Symmetrie bereits als Symmetrie der flavor u, d, und s kennengelernt, mit deren Hilfe sich Baryonen und Mesonen in Multipletts einordnen lassen. Die Bedeutung dieser Symmetrie haben Sie z.B. in Aufgabe 17 diskutiert. Wie Sie gelernt haben ist die SU(3) flavor Symmetrie nur näherungsweise erfüllt; man sagt es handelt sich um eine gebrochene Symmerie. In dieser Aufgabe versuchen wir uns einer sehr fundamentalen, exakten SU(3) Symmetrie zu nähern, der SU(3) Farbsymmetrie. Die kontinuierlichen Drehungen im $\mathbb{C}^3$, lassen sich durch komplexe Rotationsmatrizen, $\mathbf{G}$, darstellen, für die gilt:

$$\mathbf{G}^\dagger \equiv \mathbf{G}^{\tau\,*} = \mathbf{G}^{-1}\,. \tag{1}$$

Dabei ist $\mathbf{G}^{\tau\,*}$ die transponierte und komplex konjugierte Matrix zu $\mathbf{G}$. Man nennt $\mathbf{G}^\dagger$ zu $\mathbf{G}$ adjungiert. Man kann alle möglichen Matrizen $\mathbf{G}$, die diese Eigenschaft besitzen in der folgenden Form darstellen:

$$\mathbf{G} = e^{i\sum \vartheta_j \mathbf{T}_j} \qquad 1 \leq j \leq 8 \tag{2}$$

Dabei ist die Exponentialfunktion mit Matrizen im Argument durch ihre Reihenentwicklung definiert, die ϑ_j sind kontinuierliche Parameter, und die $\mathbf{T}_j$ sind acht spezielle Matrizen, die man die Generatoren der SU(3) Transformationsgruppe nennt.

a)
Die $\mathbf{T}_j$ entsprechen bis auf den Faktor 1/2

$$\mathbf{T}_j = \frac{1}{2}\lambda_j \qquad j = 1\ldots 8$$

den acht Gell–Mann Matrizen λ_j. Geben Sie eine konkrete Darstellung der acht Gell–Mann Matrizen an.

b)
Als Physiker interessieren wir uns im allgemeinen für Reihenentwicklungen nur bis zu der Ordnung, in der sich für uns relevante Eigenschaften abzeichnen. Betrachten Sie die in Gleichung (2) definierten Matrizen bis zur ersten Ordnung, in der Matrizen $\mathbf{T}_j$ auftauchen, und vergewissern Sie sich für die Konfiguration $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta = 0.1$ und $\vartheta_j = 0$ für $j > 2$, dass die in Gleichung (1) gegebene Beziehung tatsächlich (bis auf Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\vartheta^2)$) erfüllt ist.

c)
Mathematisch führt man die starke Wechselwirkung durch den Freiheitsgrad "Farbe" in das SM ein. Jedem Teilchen, das an der starken Wechselwirkung teilnimmt (d.h. jedem Quark) wird ein Farbtriplett, als neuer Bestandteil seiner Wellenfunktion zugeordnet:

$$\begin{aligned} \chi_\mathrm{R} &= \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad & \chi_\mathrm{G} &= \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad & \chi_\mathrm{B} &= \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \\ \bar{\chi}_\mathrm{R} &= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}, & \bar{\chi}_\mathrm{G} &= \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}, & \bar{\chi}_\mathrm{B} &= \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3}$$

Dabei entspricht χ_{R} der Farbe "rot", χ_{G} der Farbe "grün" und χ_{B} der Farbe "blau" und $\bar{\chi}_{\mathrm{R}}$ der Farbe "antirot", $\bar{\chi}_{\mathrm{G}}$ der Farbe "antigrün" und $\bar{\chi}_{\mathrm{B}}$ der Farbe "antiblau". SU(3) Farbsymmetrie bedeutet, dass physikalische Observablen invariant gegebüber beliebigen Farbkombinationen sind, d.h. sie hängen nicht von der Orientierung der Vektoren im durch χ_{R}, χ_{G} und χ_{B} aufgespannten Raum $\mathbb{C}^3$ ab. (Die $\bar{\chi}_{\mathrm{R}}$, $\bar{\chi}_{\mathrm{G}}$ und $\bar{\chi}_{\mathrm{B}}$ spannen einen zu $\mathbb{C}^3$ adjungierten Raum auf.) Bestätigen Sie das Verhalten der folgenden Operatoren:

$$I_\pm = \frac{1}{2}\left(\lambda_1 \pm i\lambda_2\right) \qquad \text{schiebt "grün" nach "rot" und zurück.}$$
$$V_\pm = \frac{1}{2}\left(\lambda_4 \mp i\lambda_5\right) \qquad \text{schiebt "rot" nach "blau" und zurück.}$$
$$U_\pm = \frac{1}{2}\left(\lambda_6 \pm i\lambda_7\right) \qquad \text{schiebt "blau" nach "grün" und zurück.}$$

d)

In der mathematischen Formulierung folgt die starke Wechselwirkung aus der Forderung lokaler Eichinvarianz bezüglich des Farbfreiheitsgrades. Diese lokale Eichinvarianz läßt sich nur dann allgemein gewährleisten, wenn die farbgeladenen Objekte durch Austauschteilchen verbunden sind, die acht Eichfelder G_j^μ. Die starke Wechselwirkung läßt sich dann (formell durch minimale Ankopplung, wie in der Elektrodynamik) wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned}\sum \lambda_j G_j^\mu = \sqrt{2}\Big(& I_+\left(G\bar{R}\right)^\mu + I_-\left(R\bar{G}\right)^\mu + \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_3 G_3^\mu \\ &+ U_+\left(B\bar{G}\right)^\mu + U_-\left(G\bar{B}\right)^\mu + V_+\left(R\bar{B}\right)^\mu + V_-\left(B\bar{R}\right)^\mu + \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_8 G_8^\mu\Big)\,.\end{aligned} \tag{4}$$

Wie müssen die Felder $\left(G\bar{R}\right)^\mu$, $\left(R\bar{G}\right)^\mu$, ... definiert sein, damit die in Gleichung (4) angegebene Identität erfüllt ist. Die Felder $\left(G\bar{R}\right)^\mu$, $\left(R\bar{G}\right)^\mu$, ... entsprechen den acht physikalischen Gluonfeldern. Ein Gluon trägt dabei immer Farbe und Antifarbe und kann die Farbe eines Quarks ändern.

e)

Sie können die physikalischen Gluonfelder jetzt ebenso, wie in der SU(3) flavor Symmetrie in einem Farboktett und einem Farbsinglett anordnen. Die Triplett-Bausteine hierzu sind in Abbildung 1 gegeben. Stellen Sie das Farboktett und das Farbsinglett graphisch dar. Drücken Sie ferner die Felder G_3^μ und G_8^μ durch die Felder $\left(R\bar{R}\right)^\mu$, $\left(G\bar{G}\right)^\mu$ und $\left(B\bar{B}\right)^\mu$ aus, indem Sie die Matrizen λ_3 und λ_8 mit den entsprechenden Basisvektoren ausmultiplizieren.

f)

Wie Sie sehen wirkt nicht jeder Gluonaustausch farbändernd auf ein Quark. Ein typischer Gluonvertex, der die Farbe der Quarks ändert ist in Abbildung 2 gezeigt. Zeichnen Sie einen äquivalenten Vertex, bei dem ein Quark seine Farbe von "grün" nach "blau" wechselt und einen Vertex, bei dem ein Quark seine "blaue" Farbe behält.

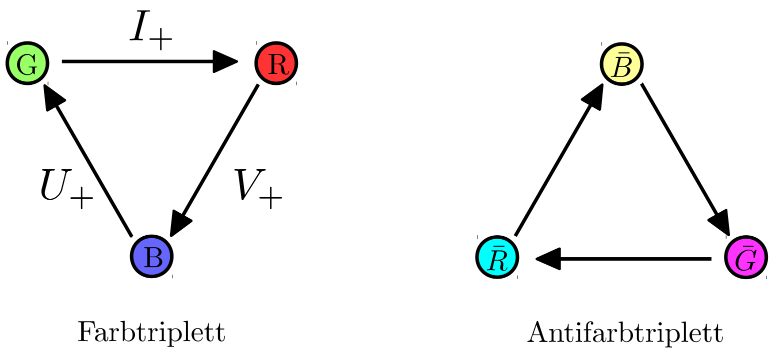

Abbildung 1: Farbtripletts der starken Wechselwirkung, links Farbe und recht Antifarbe.

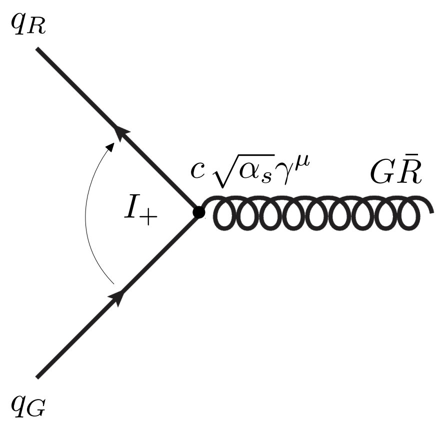

Abbildung 2: Darstellung eines möglichen Gluonvertex, der die Farbe eines Quarks von "grün" nach "rot" ändert, wenn man ihn von "unten nach oben" ließt. Zusätzlich eingezeichnet sind der entsprechende Operator I_+, das Gluonfeld, $G\bar{R}$, sowie die am Vertex auftretenden Faktoren γ^μ, $\sqrt{\alpha_s}$ und c. Der Farbfaktor c ist durch die Struktur der SU(3) vorgegeben und folgt aus der Definition des Gluonfeldes $G\bar{R}$ in Gleichung (4).

Aufgabe 19: Stabilität von $q\bar{q}$-Zuständen **(10 Punkte)**

Im folgenden werden wir die Stabilität von $q\bar{q}$-Zuständen untersuchen. Wir beschränken uns hierzu auf den Ein-Gluon-Austausch in einem Cornell-Potential

$$\begin{aligned} V(r) &= C_F\frac{\alpha_s}{r} + k\,r \\ \alpha_s &= \frac{g_s}{4\pi} \\ C_\mathrm{F} &= \frac{1}{2}c_1c_2 \qquad \text{(Farbfaktor)}\,, \end{aligned} \tag{5}$$

wie Sie es z.B. in Vorlesung 11 (Folie 10) kennen gelernt haben. Dabei entspricht α_s der Kopplunskonstanten der starken Wechselwirkung (äquivalent zur Feinstrukturkonstanten in der Elektrodynamik) und g_s der Ladung der starken Kraft. Der Faktor C_F in Gleichung (5) entspricht einem globalen Farbfaktor und setzt sich aus den einzelnen Farbfaktoren in den Vertizes, wie in Abbildung 2 gezeigt zusammen. Der zusätzliche Faktor 1/2 in der Definition von C_F spielt für diese Aufgabe keine Rolle. Das Potential in Gleichung (5) ist anziehend für $V(r) < 0$ und abstoßend für $V(r) > 0$.

a)
Zeichnen Sie ein vollständiges Feynmandiagramm für einen $q\bar{q}$-Zustand, aus einem "roten" Quark und einem "antiblauen" Antiquark. Beachten Sie, dass für ein Antiquark g_s analog zur elektrischen Ladung sein Vorzeichen wechselt. Berechnen Sie C_F aus den Einzelfaktoren beider Vertizes im jeweiligen Diagramm mit Hilfe der Vorfaktoren, wie Sie sie aus Gleichung (4) kennen. Ist das Potential abstoßend oder anziehend?

b)
Gehen Sie vor, wie für Teilaufgabe **a)** für drei weitere Diagramme, von denen ein jedes jeweils zu einem Summanden der Farbwellenfunktion

$$\psi_S = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(q_R\bar{q}_R + q_G\bar{q}_G + q_B\bar{q}_B \right)$$

beiträgt, in dem Quark und Antiquark die jeweils gleiche (Anti-)Farbe tragen. Ist das Potential anziehend oder abstoßend?