

Moderne Experimentalphysik III: Teilchenphysik (Physik VI)

Thomas Müller, Roger Wolf
19. April 2018

INSTITUTE OF EXPERIMENTAL PARTICLE PHYSICS (IEKP) – PHYSICS FACULTY

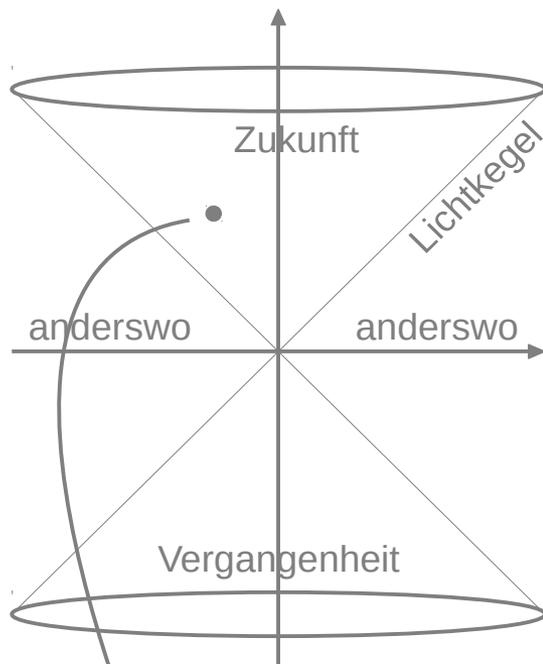


THE STORY
SO FAR

Vierervektorkalkül

- Konstanz der Lichtgeschwindigkeit:**

Die spezielle Relativitätstheorie fußt auf der Beobachtung $c = \text{const}$ in allen Inertialsystemen



(Minkowski-Raum)

(Ereignis)

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2 \stackrel{(1)}{=} dt^2 - d\vec{x}^2 = \text{const} \quad (\text{Abstand})$$

Ort und Zeit lassen sich in einen Lorentzvektor gruppieren:

$$x_\mu = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(Lorentzvektor)

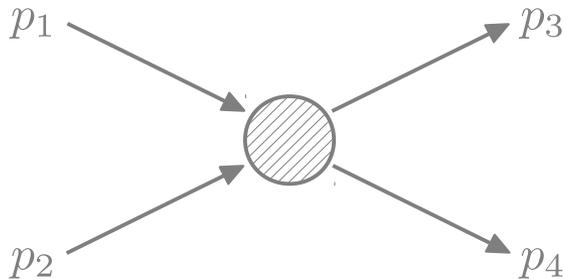
$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(beachte außergewöhnliche Metrik)

$$ds^2 = dx_\mu dx^\mu = dx_\mu g^{\mu\nu} dx_\nu$$

Invarianten in elastischen Stößen

- Betrachte elastischen Stoß zweier Teilchen im Minkowski-Raum:



Der Stoß ist durch drei unabhängige Variablen eindeutig bestimmt: z.B. Schwerpunktsenergie, ploarer & azimuthaler Streuwinkel im Schwerpunktsystem

- Der elastische Stoß läßt sich auch durch lorentzinvariante Größen unabhängig vom Bezugssystem beschreiben:

$$p_1^\mu + p_2^\mu = p_3^\mu + p_4^\mu \quad (\text{Viererimpulserhaltung})$$

$$s = (p_1^\mu + p_2^\mu)^2 = (p_3^\mu + p_4^\mu)^2 \quad (\text{Quadrat der Schwerpunktsenergie})$$

$$t = (p_1^\mu - p_3^\mu)^2 = (p_4^\mu - p_2^\mu)^2 \quad (\text{Quadrat des Viererimpulsübertrags})$$

$$u = (p_1^\mu - p_4^\mu)^2 = (p_3^\mu - p_2^\mu)^2$$

Mandelstam-Variablen

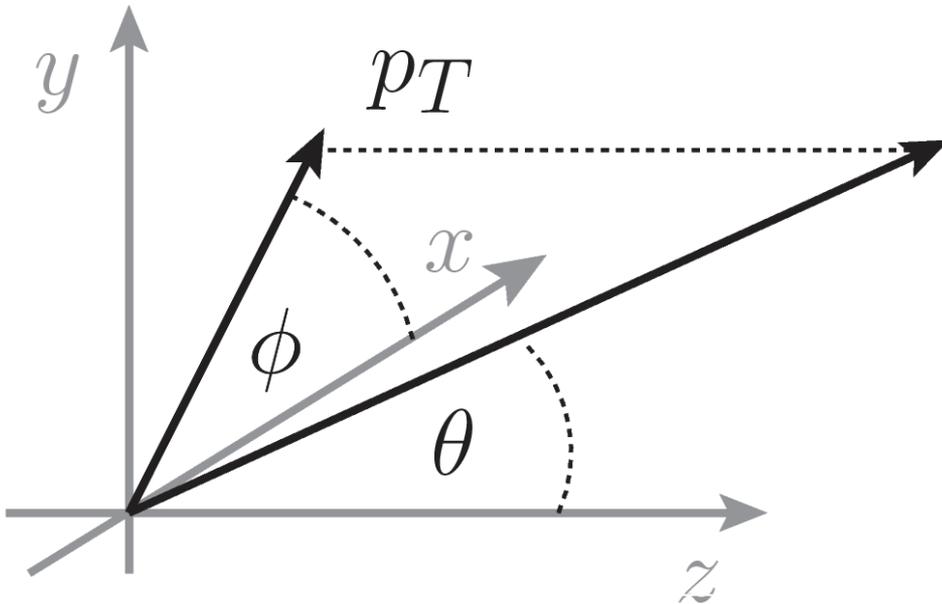


heute

- Kinematik in der Teilchenphysik
- Streuung im Teilchenbild
- Wirkungsquerschnitt
- Streuung im Wellenbild
- Formfaktor

Teilchenkinematik

- Bei bekannter Masse ist die Kinematik eines Teilchens durch drei unabhängige Variablen vollständig bestimmt, z.B.: $(p_x \ p_y \ p_z)$ oder besser $(p_T \ \phi \ \theta)$



p_T und ϕ , senkrecht zu z sind invariant unter *boosts* entlang der z -Achse, θ aber nicht. Daher ersetzen wir θ üblicherweise durch:

Die Rapidität:

$$y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E + p_z}{E - p_z} \right)$$

die forminvariant unter *boosts* entlang der z -Achse ist.

Hausaufgabe



Pseudorapidität

- Für $E \gg m$ geht die Rapidität über in die Pseudorapidität η , die selbst wieder nur vom Polarwinkel θ abhängt.

Pseudorapidität:

$$y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E + p_z}{E - p_z} \right) \xrightarrow{E \gg m} \eta = -\ln(\tan(\theta/2))$$



Verwenden Sie das Additionstheorem des Cosinus:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

Pseudorapidität

- Für $E \gg m$ geht die Rapidität über in die Pseudorapidität η , die selbst wieder nur vom Polarwinkel θ abhängt.

Pseudorapidität:

$$y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E + p_z}{E - p_z} \right) \xrightarrow{E \gg m} \eta = -\ln(\tan(\theta/2))$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E(1 + \cos \theta)}{E(1 - \cos \theta)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(\sin^2 \theta/2 + \cos^2 \theta/2) + (\cos^2 \theta/2 - \sin^2 \theta/2)}{(\sin^2 \theta/2 + \cos^2 \theta/2) - (\cos^2 \theta/2 - \sin^2 \theta/2)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\cos^2 \theta/2}{\sin^2 \theta/2} \right) = -\ln(\tan \theta/2) = \eta \end{aligned}$$



Verwenden Sie das Additionstheorem des Cosinus:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

Pseudorapidität

- Für $E \gg m$ geht die Rapidität über in die Pseudorapidität η , die selbst wieder nur vom Polarwinkel θ abhängt.

Pseudorapidität:

$$y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E + p_z}{E - p_z} \right) \xrightarrow{E \gg m} \eta = -\ln(\tan(\theta/2))$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E(1 + \cos \theta)}{E(1 - \cos \theta)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(\sin^2 \theta/2 + \cos^2 \theta/2) + (\cos^2 \theta/2 - \sin^2 \theta/2)}{(\sin^2 \theta/2 + \cos^2 \theta/2) - (\cos^2 \theta/2 - \sin^2 \theta/2)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\cos^2 \theta/2}{\sin^2 \theta/2} \right) = -\ln(\tan \theta/2) = \eta \end{aligned}$$

Hausaufgabe



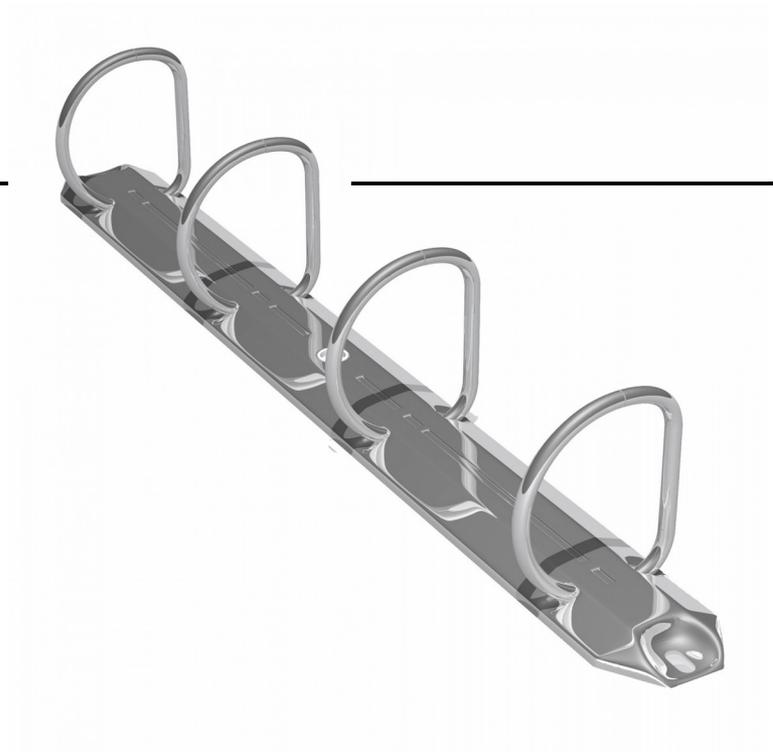
Verwenden Sie das Additionstheorem des Cosinus:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

Vergegenwärtigen Sie sich nochmal die Luftschauer-kollision von [Folie 5](#). Stellen Sie sich ein Teilchen vor, das in seinem Ruhesystem unter $\theta=90^\circ$ gestreut wird. Wie groß ist der Streuwinkel des Teilchens im Laborsystem Erde?

Zusammenfassung

- Wiederholung: relativistische Kinematik
- Schwerpunktsenergie, Teilchenkinematik
- Rapidität und Pseudorapidität



1.5 Streuexperiment und Wirkungsquerschnitt



Streuexperimente

- Fundamentale Methode zum Erkenntnisgewinn!
- Beispiele jenseits der Teilchenphysik:
 - Einfach- und Doppelspalt der QM
 - Röntgenbild beim Arzt
 - Mikroskopie ...



- Streuexperimente in der Teilchenphysik → **Fortsetzung der Mikroskopie** über das Sichtbare hinaus:

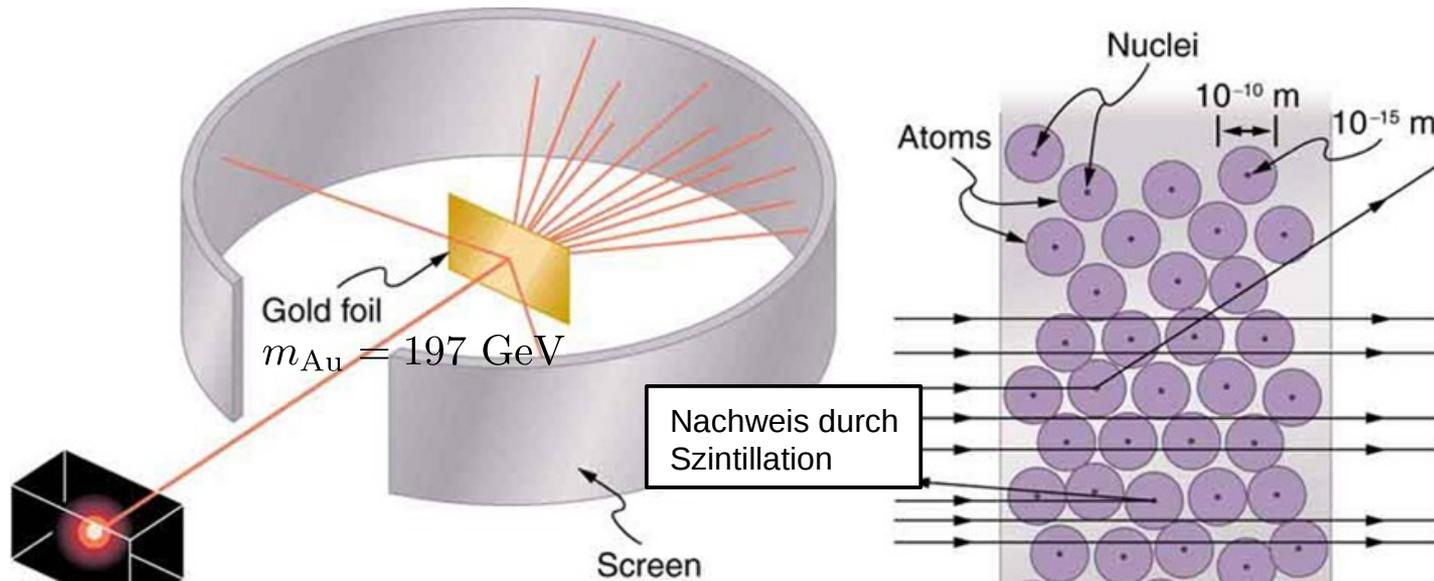
$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (\text{de-Broglie Wellenlänge})$$

→ Höhere Energie des Projektils → kürzere Wellenlänge → höhere Auflösung

- Man unterscheidet elastische und inelastische Streuung.

Streuung (im Teilchenbild)

- Messe Rate der gestreuten Alphateilchen als Funktion des Streuwinkels (→ erlaubt Rückschlüsse auf Streuzentren, Rutherford, Geiger, Marsden, ab 1909):



Source of α particles

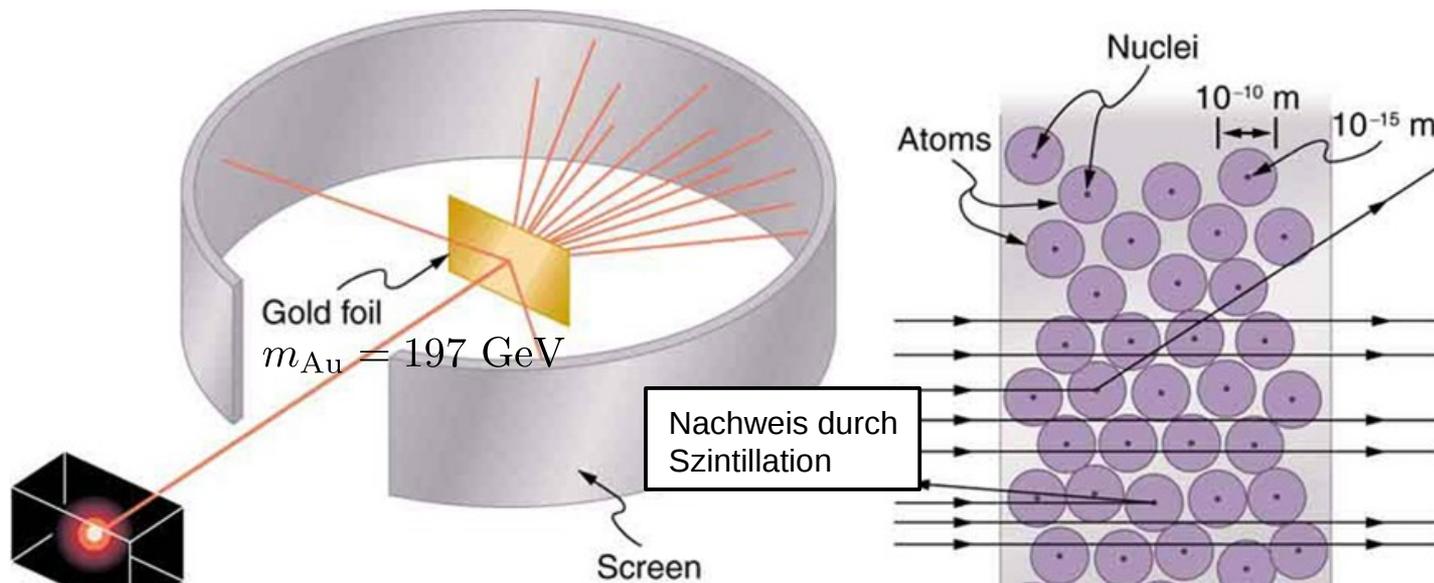
Abgeschirmte
Radium-Quelle
($E_\alpha = 5.579 \text{ MeV}$)

Schwerpunktsenergie des Streuprozesses?



Streuung (im Teilchenbild)

- Messe Rate der gestreuten Alphateilchen als Funktion des Streuwinkels (→ erlaubt Rückschlüsse auf Streuzentren, Rutherford, Geiger, Marsden, ab 1909):



Source of α particles

Abgeschirmte
Radium-Quelle
($E_\alpha = 5.579 \text{ MeV}$)

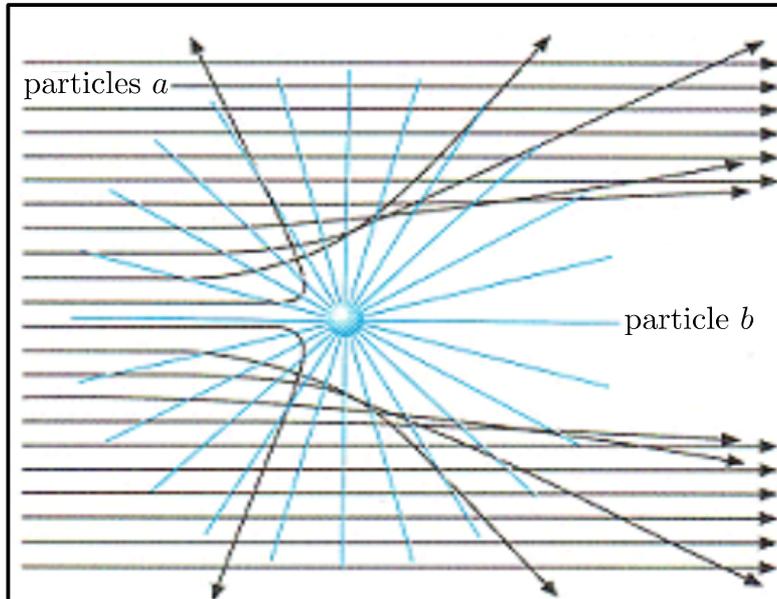
Schwerpunktsenergie des Streuprozesses?

$$\begin{aligned}
 E_{cms} &= \sqrt{2 E_\alpha m_{\text{Au}} + m_{\text{Au}}^2} - m_{\text{Au}} \\
 &= m_{\text{Au}} \cdot \sqrt{1 + \frac{2 E_\alpha m_{\text{Au}}}{m_{\text{Au}}^2}} - m_{\text{Au}} \\
 &= m_{\text{Au}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2 E_\alpha m_{\text{Au}}}{m_{\text{Au}}^2} \right) - m_{\text{Au}} \\
 &= E_\alpha = 5.579 \text{ MeV}
 \end{aligned}$$



Wirkungsquerschnitt (im Teilchenbild)

- Kontinuierlicher Fluß einlaufender (kleiner) Teilchen a auf ein (hier) ruhendes Target b . Elastische Streureaktion: $a + b \rightarrow a + b$



n_a : incident particle density $\left[\frac{\text{particles}}{m^3} \right]$.

v : incident particles velocity $\left[\frac{m}{s} \right]$.

$\mathcal{L} = n_a \cdot v$: incident part flux $\left[\frac{\text{particles}}{m^2 s} \right]$.

$W = \mathcal{L} \cdot \sigma$: scattering rate $\left[\frac{1}{s} \right]$.

$\sigma = \frac{W}{\mathcal{L}}$: rate/incident particle flux.

Wirkungsquerschnitt: N_{obs} : N observed reactions.

N_{BG} : N expected BG reactions.

$$\sigma = \frac{N_{\text{obs}} - N_{\text{BG}}}{\mathcal{L} \cdot \epsilon \cdot A} \frac{1}{T}$$

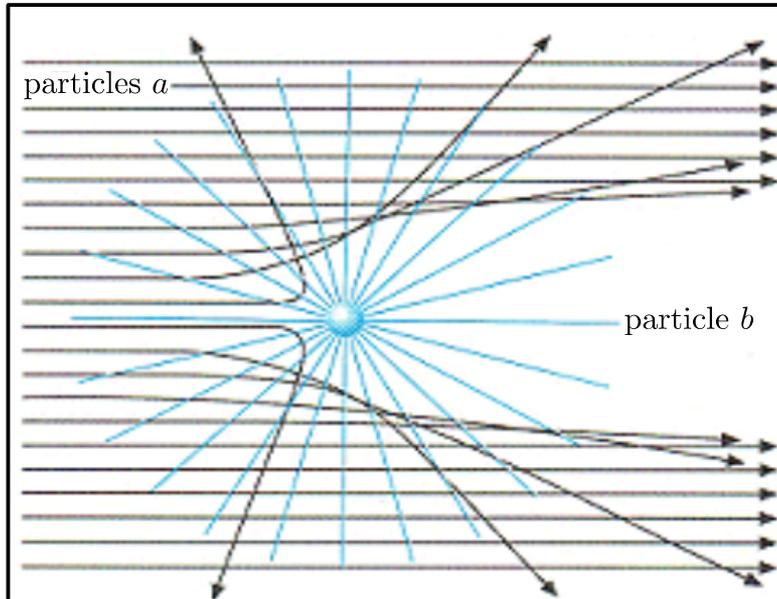
ϵ : detection efficiency.

A : detector acceptance.

T : observation time.

Wirkungsquerschnitt (im Teilchenbild)

- Kontinuierlicher Fluß einlaufender (kleiner) Teilchen a auf ein (hier) ruhendes Target b . Elastische Streureaktion: $a + b \rightarrow a + b$



n_a : incident particle density $\left[\frac{\text{particles}}{m^3} \right]$.

v : incident particles velocity $\left[\frac{m}{s} \right]$.

$\mathcal{L} = n_a \cdot v$: incident part flux $\left[\frac{\text{particles}}{m^2 s} \right]$.

$W = \mathcal{L} \cdot \sigma$: scattering rate $\left[\frac{1}{s} \right]$.

$\sigma = \frac{W}{\mathcal{L}}$: rate/incident particle flux.

Wirkungsquerschnitt: N_{obs} : N observed reactions.

N_{BG} : N expected BG reactions.

ϵ : detection efficiency.

A : detector acceptance.

T : observation time.

$$\sigma = \frac{N_{\text{obs}} - N_{\text{BG}}}{\mathcal{L} \cdot \epsilon \cdot A} \frac{1}{T}$$

Hausaufgabe



Der geometrische Wirkungsquerschnitt einer massiven Kugel ist πr^2 .

Einheit und Größenordnung



Einheit des Wirkungsquerschnitts:

$$1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2$$

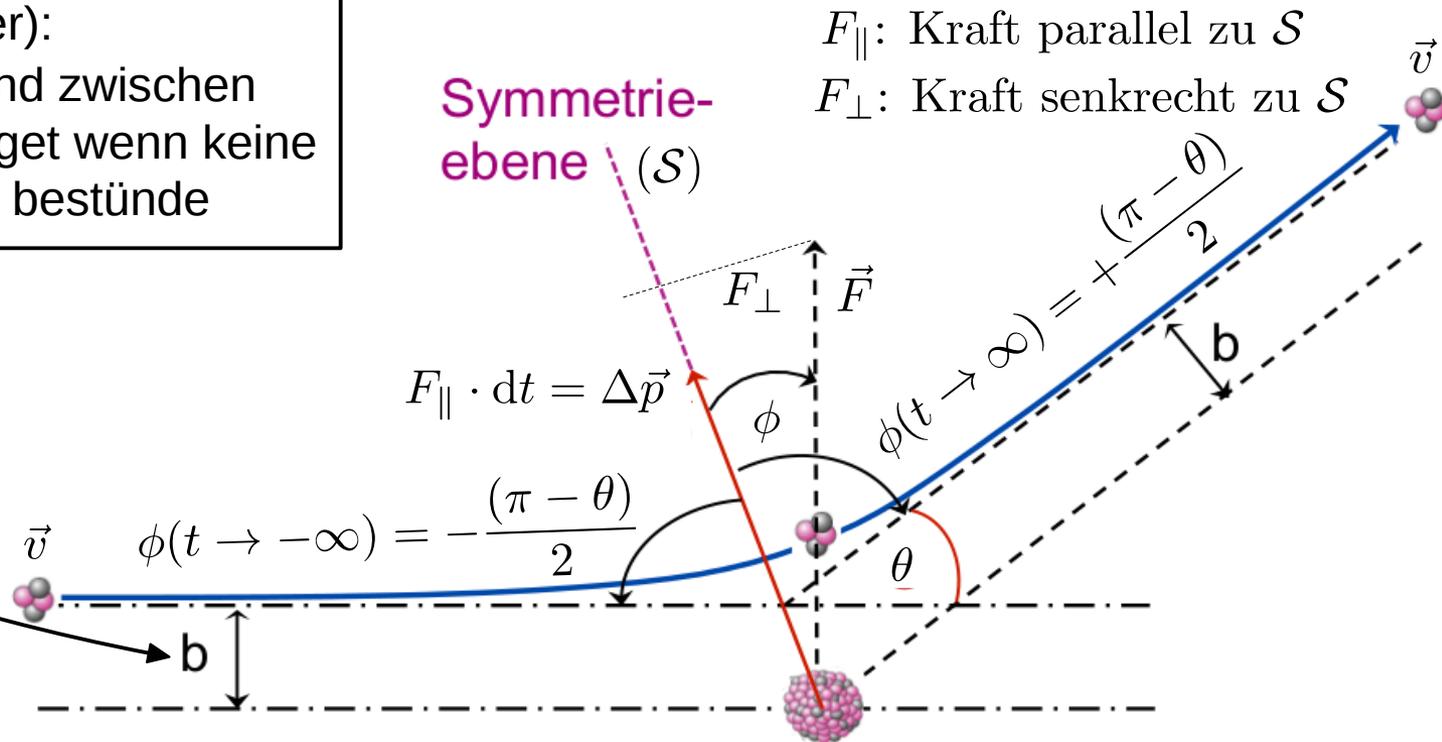
Größenordnungen:

- Kernphysik: $10^{-3} \text{ barn} = 1 \text{ mb}$
- Teilchenphysik: $10^{-12} \text{ barn} = 1 \text{ pb}$

Modell: Streuung punktförmiger Teilchen

- Target und Projektil punktförmig (\rightarrow Teilchen ohne Spin)
- Coulomb-Potential zwischen Target und Projektil
- Target viel schwerer als Projektil (\rightarrow kein Rückstoß)

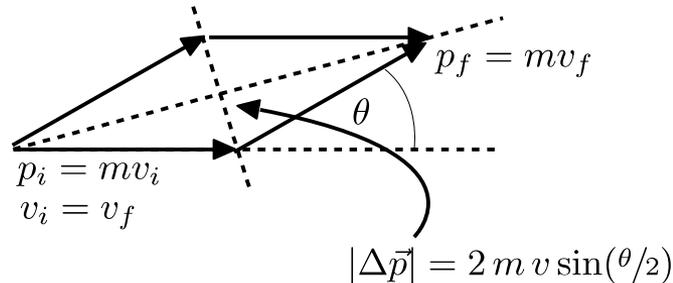
Stoßparameter (engl. impact parameter):
Minimaler Abstand zwischen Projektil und Target wenn keine Wechselwirkung bestünde



Modell: Streuung punktförmiger Teilchen

- **Impulsänderung:**

$$|\Delta \vec{p}| = 2 m v \sin(\theta/2) \quad (1)$$



$$\begin{aligned} |\Delta \vec{p}| &= \int_{-(\pi-\theta)/2}^{(\pi-\theta)/2} \frac{z Z e^2}{4\pi\epsilon_0 v b} \cos \phi \cdot d\phi \\ &= \frac{z Z e^2}{4\pi\epsilon_0 v b} \left[\sin \phi \right]_{-(\pi-\theta)/2}^{(\pi-\theta)/2} \\ &= \frac{z Z e^2}{4\pi\epsilon_0 v b} 2 \cos(\theta/2) \quad (2) \end{aligned}$$

- Impulsänderung durch **Kraftwirkung:**

$$|\Delta \vec{p}| = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\parallel} \cdot dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z Z e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \phi(t) \cdot dt$$

- Variablensubstitution $dt \rightarrow d\phi$
(\rightarrow Drehimpulserhaltung):

$$|\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{p}| = m v b$$

$$= m \omega r^2 = m \frac{d\phi}{dt} r^2$$

$$dt = \frac{r^2}{v b} d\phi \quad (\phi \in [-(\pi - \theta)/2; +(\pi - \theta)/2])$$

- Gleichsetzen von (1) und (2):

$$\tan(\theta/2) = \frac{z Z e^2}{4\pi\epsilon_0 m v^2 b} \equiv \frac{k}{b}$$

$$b(\theta) = \frac{k}{\tan(\theta/2)}$$

(Relation Streuwinkel–Stoßparameter)

Additionstheoreme:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

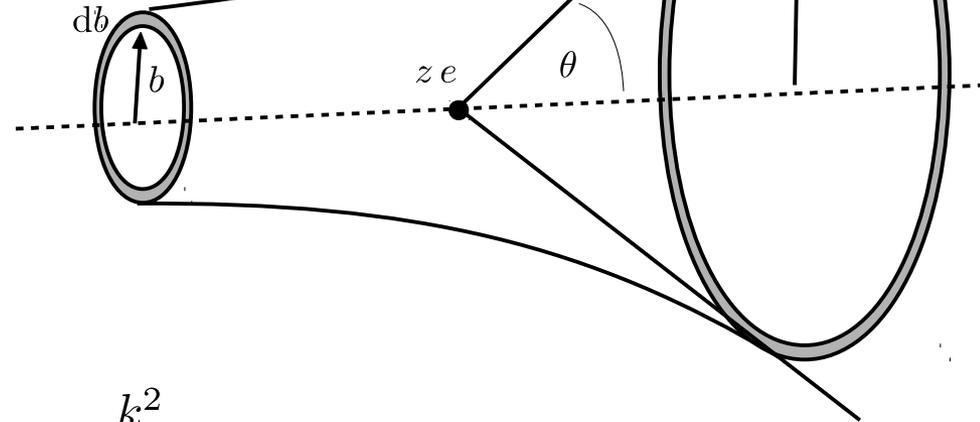
Modell: Streuung punktförmiger Teilchen

- Geometrischer Wirkungsquerschnitt:

$$\left. \begin{aligned} d\sigma &= 2\pi b |db| \\ d\Omega &= 2\pi \sin \theta d\theta \end{aligned} \right\} \frac{d\sigma}{d\Omega} = -\frac{b}{\sin \theta} \frac{db}{d\theta}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= -\frac{b}{\sin \theta} \left(-\frac{k}{2 \sin^2(\theta/2)} \right) \\ &= -\frac{k}{\tan(\theta/2) \sin \theta} \left(-\frac{k}{2 \sin^2(\theta/2)} \right) = \frac{k^2}{4 \sin^4(\theta/2)} \end{aligned}$$

Differenziell zur Verfügung stehende Fläche $2\pi b |db|$



$$\tan(\theta/2) = \frac{z Z e^2}{4\pi\epsilon_0 m v^2 b} \equiv \frac{k}{b}$$

$$b(\theta) = \frac{k}{\tan(\theta/2)}$$

$$\frac{db}{d\theta} = -\frac{k}{2 \sin^2(\theta/2)}$$

Additionstheoreme:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

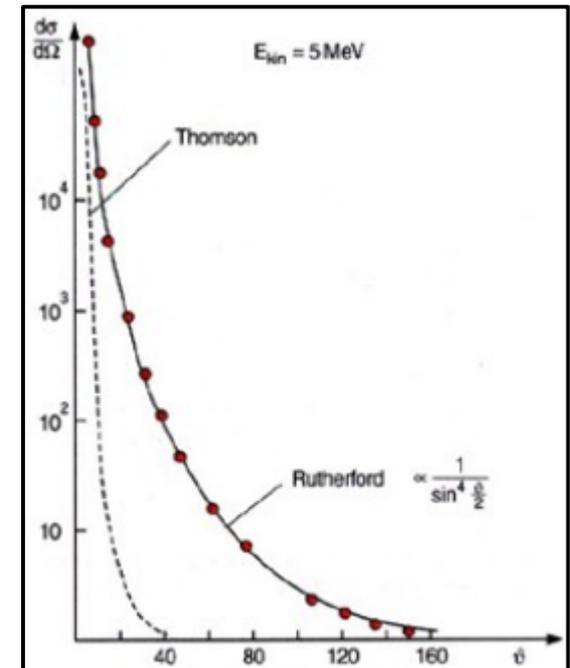
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

Rutherford-Streuung

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{z Z e^2}{4 \pi \epsilon_0 m v^2 \cdot 2 \sin^2(\frac{\theta}{2})} \right)^2 = \left(\frac{z Z \alpha (\hbar c)}{4 E_{kin}} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\frac{\theta}{2})}$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137} \quad (\text{Feinstrukturkonstante})$$

- $\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto Z$: Möglichkeit die Kernladungszahl zu messen
- $\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \frac{1}{E_{kin}^2}$: je höher die Energie der Projektile desto geringer der Wirkungsquerschnitt
- $\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \frac{1}{\sin^4(\frac{\theta}{2})}$: starke Winkelabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts





$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{z Z e^2}{4 \pi \epsilon_0 m v^2 \cdot 2 \sin^2(\frac{\theta}{2})} \right)^2 = \left(\frac{z Z \alpha (\hbar c)}{4 E_{kin}} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\frac{\theta}{2})}$$

- Erinnerung: Lorentzimpulsübertrag $t = (p^\mu - p'^\mu)^2$ bei elastischer Streuung (mit $|\vec{p}| = p$ und $|\vec{p}'| = p'$):

$$t = -2 p p' (1 - \cos \theta)$$

$$= -4 p p' \sin^2(\theta/2) \equiv q^2$$

$$dq^2 = -4 p p' \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) d\theta$$

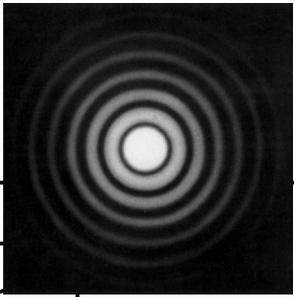
$$= -2 p p' \sin \theta d\theta$$

- Für den elastischen Stoß:

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = 2\pi \left(\frac{z Z \alpha (\hbar c)}{4 E_{kin}} \right)^2 \frac{\sin \theta}{\sin^4(\frac{\theta}{2})} \quad \text{mit } d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{\sin \theta d\theta d\phi} = \left(\frac{z Z \alpha (\hbar c)}{4 m c^2 (\gamma - 1)} \right)^2 \left(\frac{4 p_1 p_3}{q^2} \right)^2$$

$$\frac{d\sigma}{dq^2} = - \left(\frac{z Z \alpha (\hbar c)}{4 m c^2 (\gamma - 1)} \right)^2 \frac{4\pi p_1 p_3}{q^4}$$

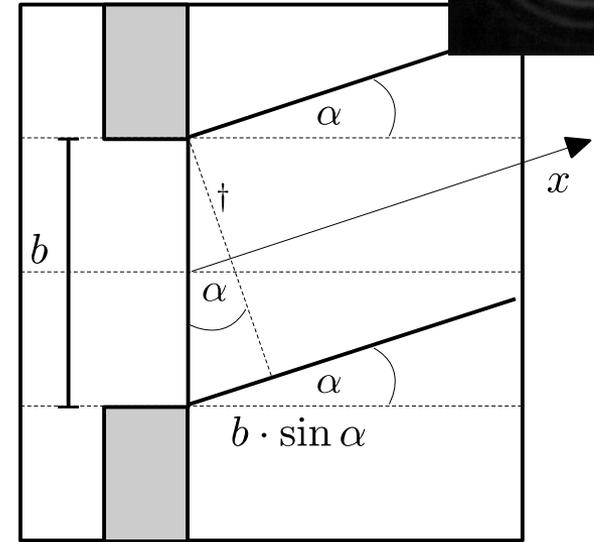


Streuung (im Wellenbild)

- Beispiel **Beugung von Licht am Spalt:**

$$\psi(\alpha) = \psi_0 e^{ikx} = \sum_{j < b \sin \alpha / \Delta x} \frac{\Delta x}{b \sin \alpha} \psi_0 e^{ikx_j}$$

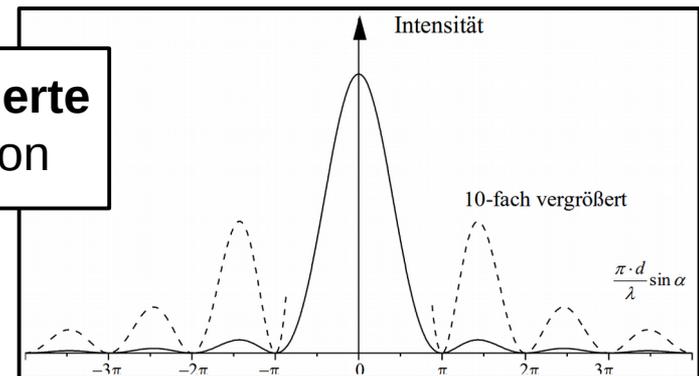
- Zerlege Wellenfront über der vollen Breite des Spaltes (b) in N Teilwellen mit der Intensität $1/N$ (z.B. 10 Teilwellen mit $1/10$ der Intensität)
- Alle Teilwellen entlang der gestrichelten Linie (\dagger) addieren sich mit ihrer Phase am Ort x_j . (Anmerkung: $\Delta x = x_j - x_{j-1}$ für $j > 0$ und $\sum \Delta x = b \sin \alpha$, x ist die Ausbreitungsrichtung der Welle).
- $1/N$ lässt sich ausdrücken durch: $1/N = \Delta x / b \sin \alpha$

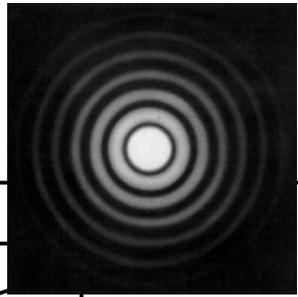


(Spaltfunktion)

**Fouriertransformierte
der Rechteckfunktion**

Inverse Fouriertransformation des Streubildes erlaubt Rückschlüsse auf Aussehen des Targets





Streuung (im Wellenbild)

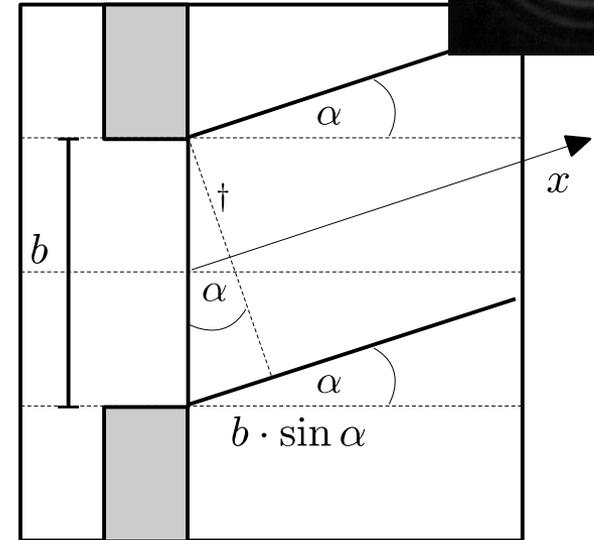
- Beispiel **Beugung von Licht am Spalt:**

$$\psi(\alpha) = \psi_0 e^{ikx} = \sum_{j < b \sin \alpha / \Delta x} \frac{\Delta x}{b \sin \alpha} \psi_0 e^{ikx_j}$$

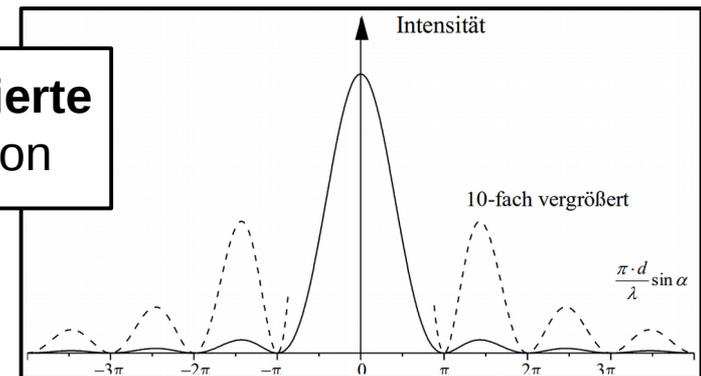
im Grenzübergang $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\psi(\alpha) = \int_{-b \sin \alpha / 2}^{+b \sin \alpha / 2} \frac{dx}{b \sin \alpha} \psi_0 e^{ikx} = \left[\frac{\psi_0}{b \sin \alpha} \frac{e^{ikx}}{ik} \right]_{-b \sin \alpha / 2}^{+b \sin \alpha / 2}$$

$$= \frac{\psi_0}{b \sin \alpha / 2} \left(\frac{e^{ik b \sin \alpha / 2} - e^{-ik b \sin \alpha / 2}}{2ik} \right) = \psi_0 \cdot \frac{\sin(k b \sin \alpha / 2)}{k b \sin \alpha / 2} \quad (\text{Spaltfunktion})$$

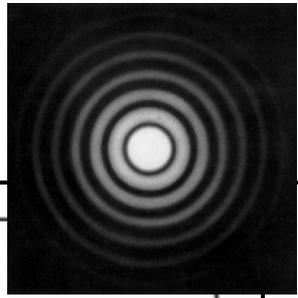


**Fouriertransformierte
der Rechteckfunktion**



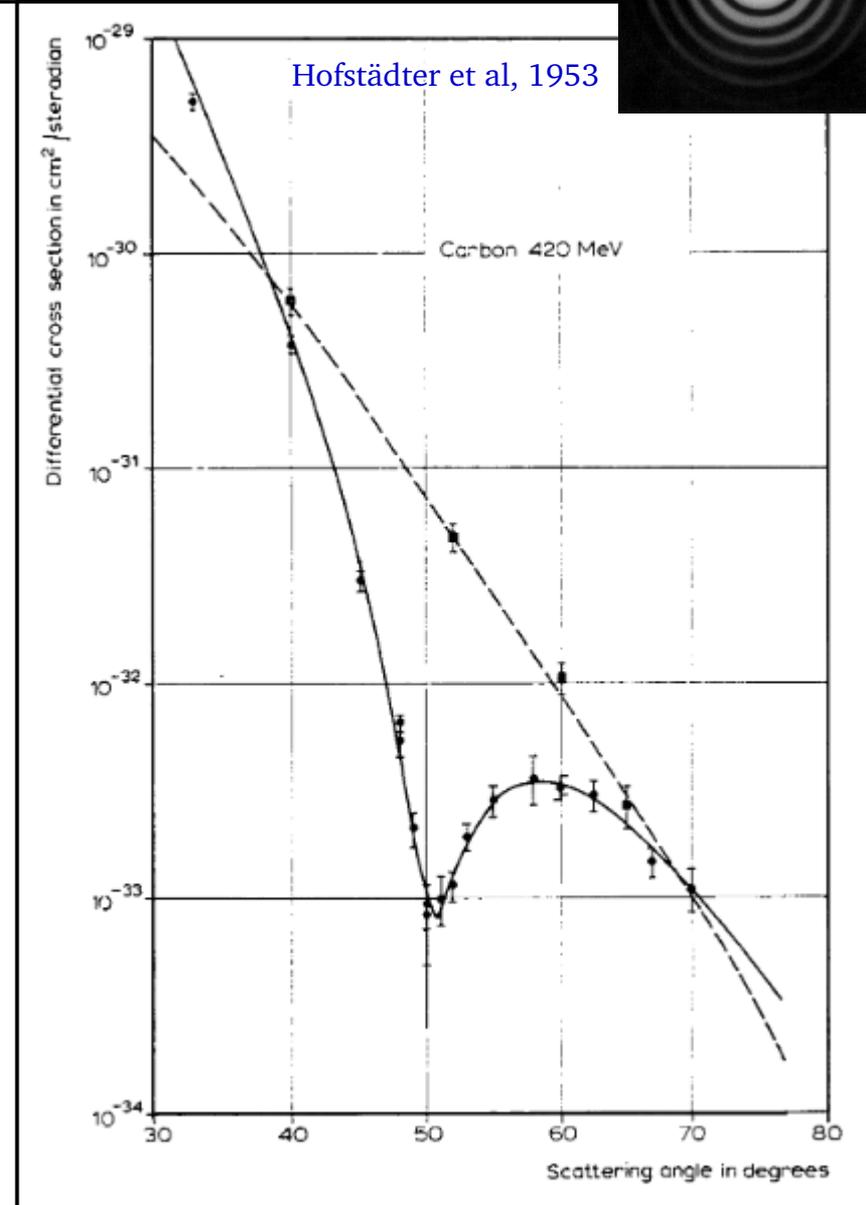
Inverse Fouriertransformation des Streubildes erlaubt Rückschlüsse auf Aussehen des Targets

Zu Folie 26



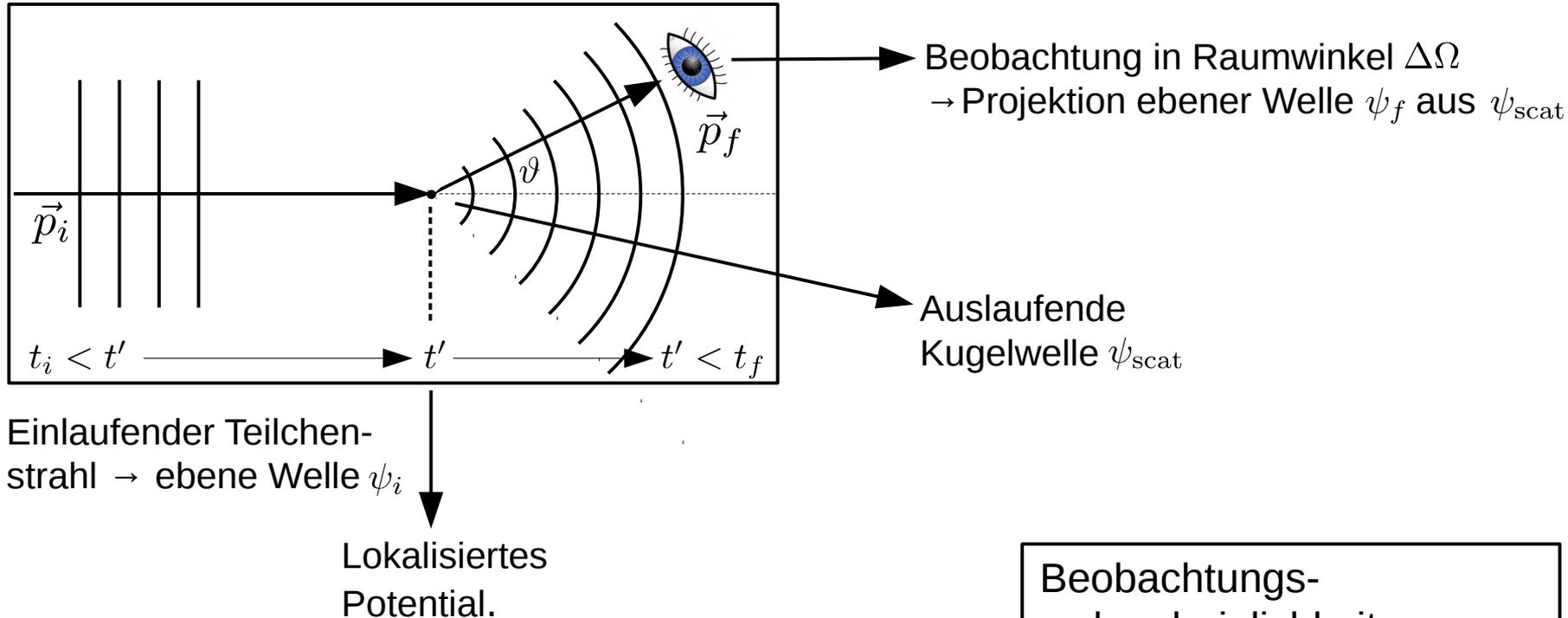
Streuung (im Wellenbild)

- **Beugungsmuster** analog zu Lochblende, hier beobachtet in der Streuung von Elektronen an Kohlenstoff-Kernen.



Wirkungsquerschnitt (im Wellenbild)

- Kontinuierlicher Fluß einlaufender (kleiner) Teilchen a auf ein (hier) ruhendes Target b . Elastische Streureaktion: $a + b \rightarrow a + b$



Streuoperator \mathcal{S} transformiert Wellenfunktion des Anfangszustands ψ_i auf gestreute Wellenfunktion $\psi_{\text{scat}} = \mathcal{S} \cdot \psi_i$

Beobachtungswahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{fi} &= \psi_f^\dagger \cdot \psi_{\text{scat}} \\ &= \psi_f^\dagger \cdot \mathcal{S} \cdot \psi_i \end{aligned}$$

Element fi der Streumatrix

Fermi's Goldene Regel

- Wahrscheinlichkeit W des Übergangs von i nach f in der Quantenmechanik → Berechnung mit Hilfe von **Fermi's Goldener Regel**:

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{S}_{fi}|^2 \rho_f$$

$$\rho_f = \frac{d}{dE_f} \int_V \frac{d^3\vec{p}_f d^3\vec{x}_f}{(2\pi\hbar)^3}$$

Phasenraumfaktor
des Endzustands

In "führender Ordnung" der Störungstheorie:
Streuoperator = Hamiltonoperator der Wechselwirkung zwischen Projektil und Target $\mathcal{S} = \mathcal{H}_{int}$

$$|\mathcal{S}_{fi}|^2 = |\langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle|^2 \quad (\text{Matrixelement})$$

- Relation zwischen Übergangswahrscheinlichkeit W und Wirkungsquerschnitt σ :

$$W = \mathcal{L} \cdot \sigma = n_a \cdot v \cdot \sigma = \frac{v}{V} \cdot \sigma$$

$$\sigma \cdot \frac{v}{V} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle|^2 \cdot \rho_f$$

Phasenraumfaktor

$$\rho_f = \frac{d}{dE_f} \int \frac{d^3 \vec{p}_f d^3 \vec{x}_f}{(2\pi \hbar)^3} = \frac{4\pi p_f^2 V}{(2\pi \hbar)^3} \frac{dp_f}{dE_f}$$

mit $v \approx c$, $p_f = E_f/c$, $dp_f = dE_f/c$ für den Impuls des gestreuten Teilchens im Endzustand

$$d\sigma \frac{v}{V} = \frac{2\pi}{\hbar} \cdot |\langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle|^2 \cdot \frac{4\pi p_f^2 V}{(2\pi \hbar)^3} \frac{dp_f}{dE_f} \cdot \frac{d\Omega}{4\pi}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{V^2 E_f^2}{(2\pi)^2 (\hbar c)^4} |\langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle|^2$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{V^2 E_f^2}{(2\pi)^2 (\hbar c)^4} |\langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle|^2$$

Streuamplitude (Matrixelement)

$$\langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle = \frac{ze}{V} \int_V e^{-i\vec{p}_f \vec{x} / \hbar} \phi(\vec{x}) e^{i\vec{p}_i \vec{x} / \hbar} d^3 \vec{x} = \int_V \phi(\vec{x}) e^{i\vec{q} \vec{x} / \hbar} d^3 \vec{x}$$

mit:

$$\mathcal{H}_{int} = ze \phi(\vec{x}) \quad \vec{q} = \vec{p}_i - \vec{p}_f \quad \psi_{i,f} = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{p}_{i,f} \vec{x} / \hbar}$$

Als nächstes verwenden wir die Identität: $\int_V (u \Delta v - v \Delta u) d^3 \vec{x} = 0$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{V^2 E_f^2}{(2\pi)^2 (\hbar c)^4} |\langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle|^2$$

Streuamplitude (Matrixelement)

$$\langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle = \frac{ze}{V} \int e^{-i\vec{p}_f \vec{x} / \hbar} \phi(\vec{x}) e^{i\vec{p}_i \vec{x} / \hbar} d^3 \vec{x} = \int \phi(\vec{x}) e^{i\vec{q} \vec{x} / \hbar} d^3 \vec{x}$$

mit:

$$\mathcal{H}_{int} = ze \phi(\vec{x}) \quad \vec{q} = \vec{p}_i - \vec{p}_f \quad \psi_{i,f} = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{p}_{i,f} \vec{x} / \hbar}$$

Als nächstes verwenden wir die Identität: $\int_V (u \Delta v - v \Delta u) d^3 \vec{x} = 0$

$$\int_V -\frac{q^2}{\hbar^2} \phi(\vec{x}) e^{i\vec{q} \vec{x} / \hbar} d^3 \vec{x} = \int_V \Delta \phi(\vec{x}) e^{i\vec{q} \vec{x} / \hbar} d^3 \vec{x}$$

$$\int_V \phi(\vec{x}) e^{i\vec{q} \vec{x} / \hbar} d^3 \vec{x} = -\frac{\hbar^2}{q^2} \int_V \Delta \phi(\vec{x}) e^{i\vec{q} \vec{x} / \hbar} d^3 \vec{x} = -\frac{\hbar^2}{q^2} \int_V \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0} e^{i\vec{q} \vec{x} / \hbar} d^3 \vec{x}$$

$$\rho(\vec{x}) = Ze f(\vec{x})$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{V^2 E_f^2}{(2\pi)^2 (\hbar c)^4} |\langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle|^2$$

$$\langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle = \frac{z Z e^2 \hbar^2}{\epsilon_0 q^2 V} \int_V f(\vec{x}) e^{i\vec{q} \vec{x} / \hbar} d^3 \vec{x}$$

Zusammenfassung

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{V^2 E_f^2}{(2\pi)^2 (\hbar c)^4} \left| \frac{z Z e^2 \hbar^2}{\epsilon_0 q^2 V} \int_V f(\vec{x}) e^{i\vec{q}\vec{x}/\hbar} d^3\vec{x} \right|^2 && \text{mit } \alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = \frac{1}{137} \\
 &= \frac{V^2 E_f^2}{(2\pi)^2 (\hbar c)^4} \left(\frac{4\pi z Z \alpha \hbar^3 c}{q^2 V} \right)^2 \left| \int_V f(\vec{x}) e^{i\vec{q}\vec{x}/\hbar} d^3\vec{x} \right|^2 \\
 &= \frac{(2 z Z \alpha (\hbar c))^2 E_f^2}{q^4 c^4} \underbrace{\left| \int_V f(\vec{x}) e^{i\vec{q}\vec{x}/\hbar} d^3\vec{x} \right|^2}_{\equiv 1 \text{ f\"ur } f(\vec{x}) = \delta(\vec{x})}
 \end{aligned}$$

d.h. Reproduktion des klassischen Resultats für punktförmiges Target

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{V^2 E_f^2}{(2\pi)^2 (\hbar c)^4} |\langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle|^2$$

$$\langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle = \frac{z Z e^2 \hbar^2}{\epsilon_0 q^2 V} \int_V f(\vec{x}) e^{i\vec{q}\vec{x}/\hbar} d^3\vec{x}$$

Formfaktor

- Allgemeine Eigenschaft aller Streuexperimente (→ Spalt, Gitter, Kern, Nukleon, Elementarteilchen, ...)

$$F(\vec{q}) = \int_V f(\vec{x}) e^{i\vec{q}\vec{x}/\hbar} d^3\vec{x} \quad (\text{Formfaktor})$$

$$F(q) = 4\pi \int_0^\infty f(r) \frac{\sin(|q|r/\hbar)}{|q|r/\hbar} r^2 dr \quad (\text{für radialsymmetrische Ladungsverteilungen})$$

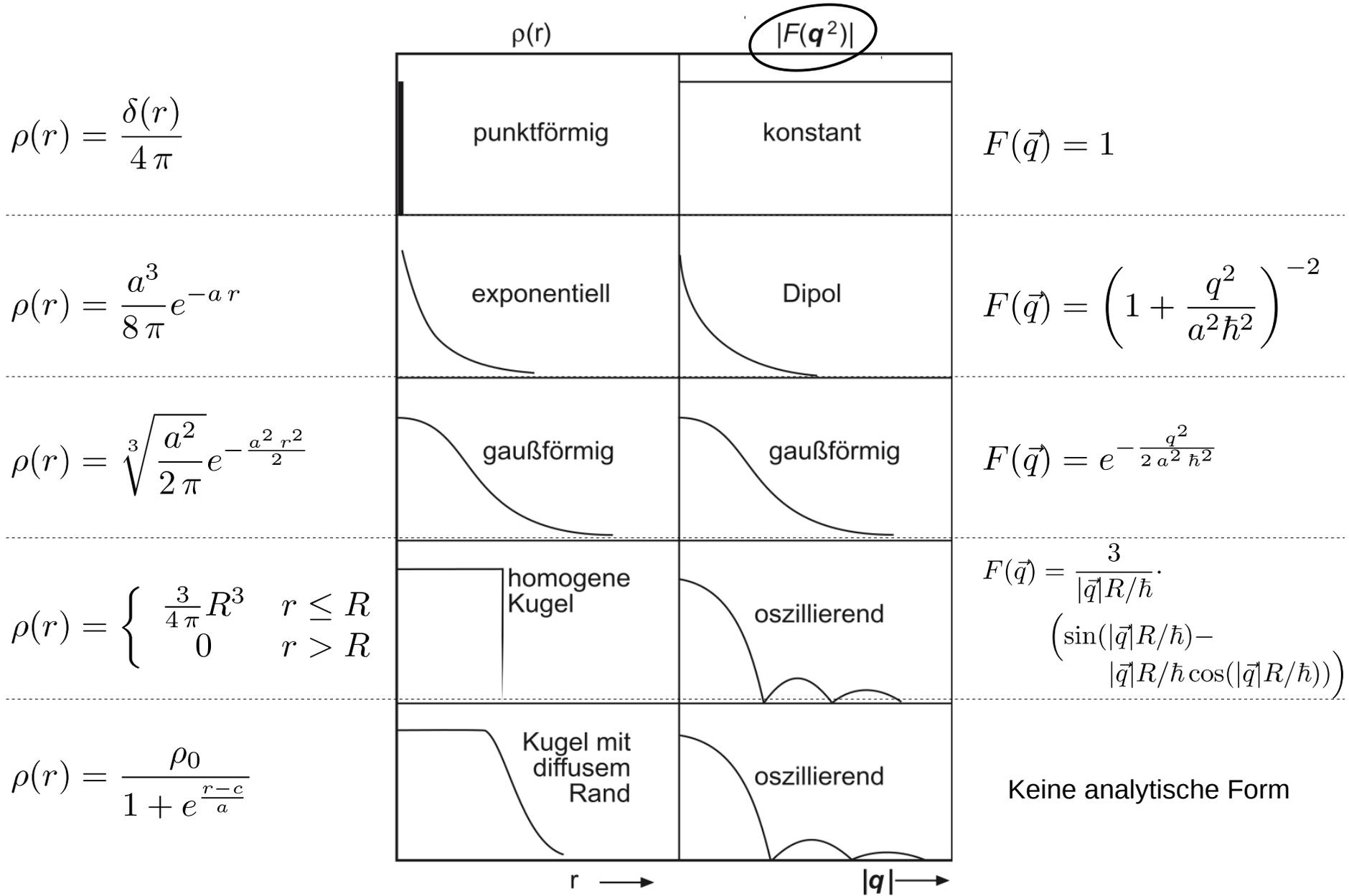
- Formfaktor = Fouriertransformierte des Targets im Ortsraum

(vgl. mit [Folie 19](#))

Inverse Fouriertransformation des Streubildes erlaubt Rückschlüsse auf Aussehen des Targets

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_V F(\vec{q}) e^{-i\vec{q}\vec{x}/\hbar} d^3\vec{q}$$

In diesem Fall → elektrische Ladungsdichte



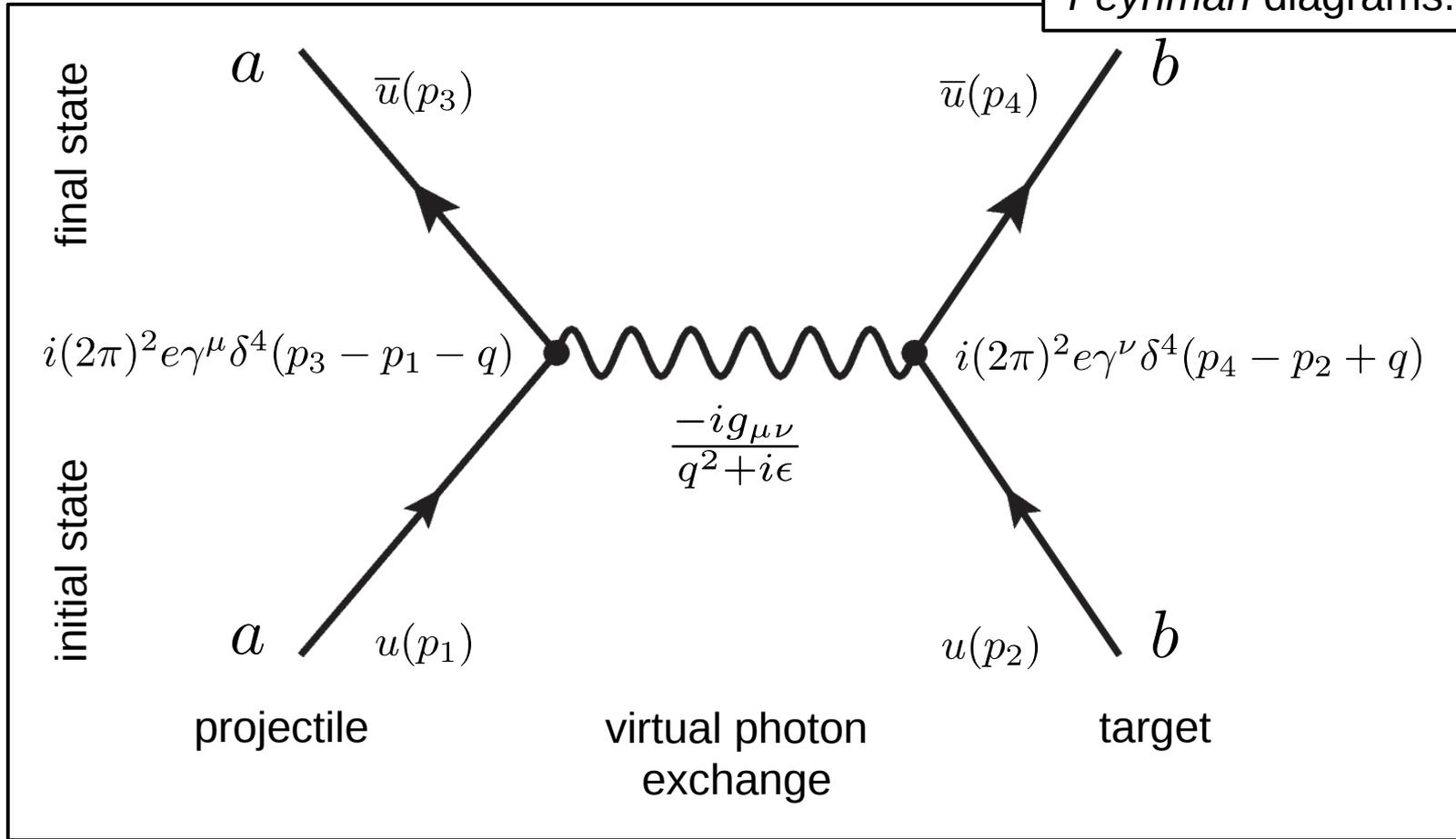
Gliederung der Vorlesung



Vorlesung:	Vorlesungstag:	Übungsblatt:
VL-01 Einheiten, Relativistische Kinematik	Di 17.04.2018	-
VL-02 Teilchenstreuung	Do 19.04.2018	-
VL-03 Wirkungsquerschnitt	Di 24.04.2018	Blatt-01
VL-04 Teilchenbeschleunigung	Do 26.04.2018	-
Vorlesung fällt aus	Di 01.05.2018	Blatt-02
VL-05 Teilchennachweis durch Ionisation	Do 03.05.2018	-
VL-06 Elektromag. WW und Schauer	Di 08.05.2018	Blatt-03
Vorlesung fällt aus	Do 10.05.2018	-
VL-07 Detektoren der Teilchenphysik	Di 15.05.2018	Blatt-04
VL-08 Symmetrien und Erhaltungsätze	Do 17.05.2018	-
VL-09 Fundamentale Teilchen und Kräfte im SM	Di 22.05.2018	Blatt-05
VL-10 Diskrete Symmetrien des SM	Do 24.05.2018	-
VL-11 Teilchenzoo: vom Hadron zum Quark	Di 29.05.2018	Blatt-06
Vorlesung fällt aus	Do 31.05.2018	-
VL-12 Farbladung und QCD	Di 05.06.2018	Blatt-07
VL-13 Phänomenologie der schwachen WW	Do 07.06.2018	-
VL-14 Theorie der elektroschwachen WW	Di 12.06.2018	Blatt-08
VL-15 Higgs Mechanismus	Do 14.06.2018	-
VL-16 SM: Quarksektor	Di 19.06.2018	Blatt-09
VL-17 Top: Entdeckung und Eigenschaften	Do 21.06.2018	-
VL-18 Higgs: Entdeckung und Eigenschaften	Di 26.06.2018	-
VL-19 Neutrinoophysik	Do 28.06.2018	-

The matrix element \mathcal{S}_{fi}

Matrix element calculations can be represented pictorially with the help of *Feynman diagrams*.

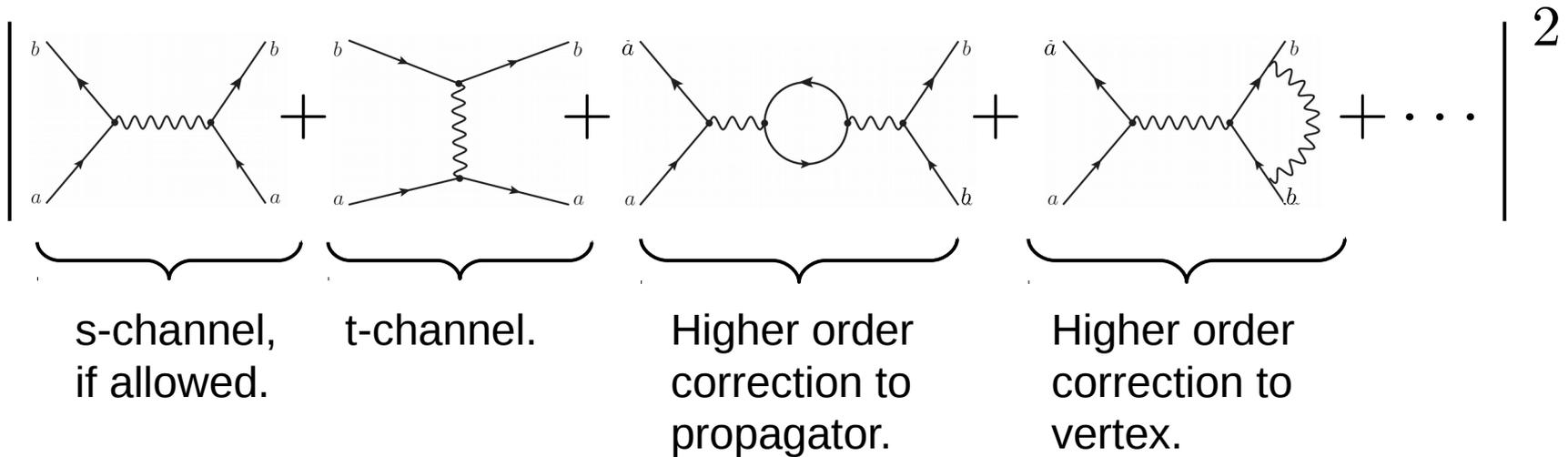


$$\mathcal{S}_{fi}^{(1)} = i ((2\pi)^2 e)^2 \cdot \int d^4q \delta^4(p_3 - p_1 - q) \bar{u}(p_3) \gamma^\mu u(p_1) \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} \delta^4(p_4 - p_2 + q) \bar{u}(p_4) \gamma^\nu u(p_2)$$

The matrix element \mathcal{S}_{fi}

- The full calculation (ideally) includes all possible diagrams to all orders in QM perturbation theory:

$$|\mathcal{S}_{fi}|^2 =$$



- Coherent sum: includes absolute values squared of individual diagrams and interference terms across different diagrams.