

# Moderne Experimentalphysik III: Teilchenphysik

Sommersemester 2018

Thomas Müller, Roger Wolf

19. April 2018 – VL 2

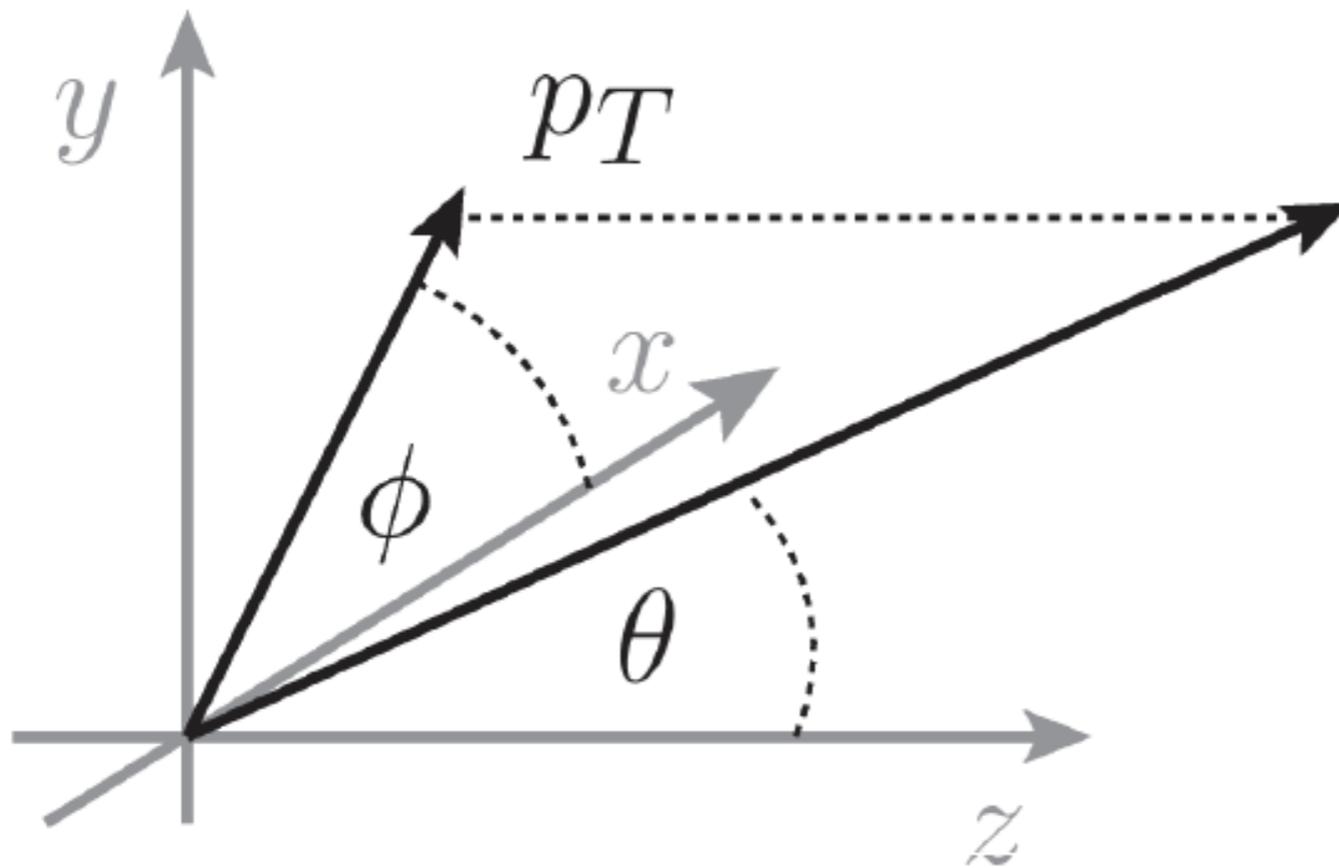
Institut für Experimentelle Teilchenphysik (ETP)





# Teilchenkinematik

- Bei bekannter Masse ist die Kinematik eines Teilchens durch drei unabhängige Variablen vollständig bestimmt, z.B.:  $(p_x \ p_y \ p_z)$  oder besser  $(p_T \ \phi \ \theta)$



$p_T$  und  $\phi$ , senkrecht zu  $z$  sind invariant unter *boosts* entlang der  $z$ -Achse,  $\theta$  aber nicht. Daher ersetzen wir  $\theta$  üblicherweise durch:

**Die Rapidität:**

$$y = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{E + p_z}{E - p_z} \right)$$

die forminvariant unter *boosts* entlang der  $z$ -Achse ist.

Hausaufgabe



# Pseudorapidität

- Für  $E \gg m$  geht die Rapidität über in die Pseudorapidität  $\eta$ , die selbst wieder nur vom Polarwinkel  $\theta$  abhängt.

## Pseudorapidität:

$$y = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{E + p_z}{E - p_z} \right) \xrightarrow{E \gg m} \eta = -\ln(\tan(\theta/2))$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{E(1 + \cos \theta)}{E(1 - \cos \theta)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{(\sin^2 \theta/2 + \cos^2 \theta/2) + (\cos^2 \theta/2 - \sin^2 \theta/2)}{(\sin^2 \theta/2 + \cos^2 \theta/2) - (\cos^2 \theta/2 - \sin^2 \theta/2)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\cos^2 \theta/2}{\sin^2 \theta/2} \right) = -\ln(\tan \theta/2) = \eta \end{aligned}$$



Verwenden Sie das Additions-  
theorem des Cosinus:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

## 1.5 Streuexperiment und Wirkungsquerschnitt



# Streuexperimente

- Fundamentale Methode zum Erkenntnisgewinn!
- Beispiele jenseits der Teilchenphysik:
  - Einfach- und Doppelspalt der QM
  - Röntgenbild beim Arzt
  - Mikroskopie ...



- Streuexperimente in der Teilchenphysik → **Fortsetzung der Mikroskopie** über das Sichtbare hinaus:

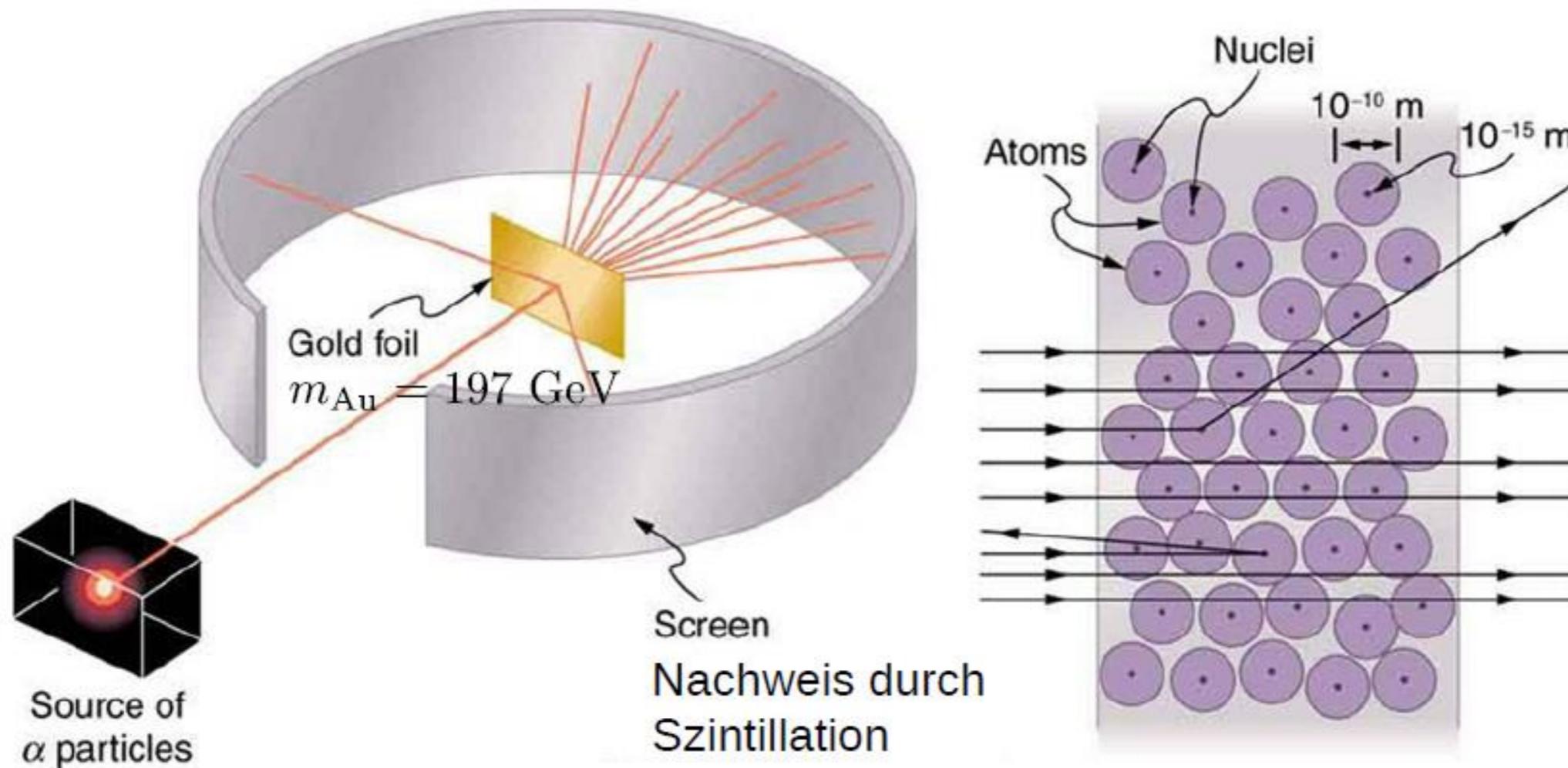
$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (\text{de-Broglie Wellenlänge})$$

→ Höhere Energie des Projektils → kürzere Wellenlänge → höhere Auflösung

- Man unterscheidet elastische und inelastische Streuung.

# Streuung (im Teilchenbild)

- Messe Rate der gestreuten Alphateilchen als Funktion des Streuwinkels (→ erlaubt Rückschlüsse auf Streuzentren, Rutherford, Geiger, Marsden, ab 1909):

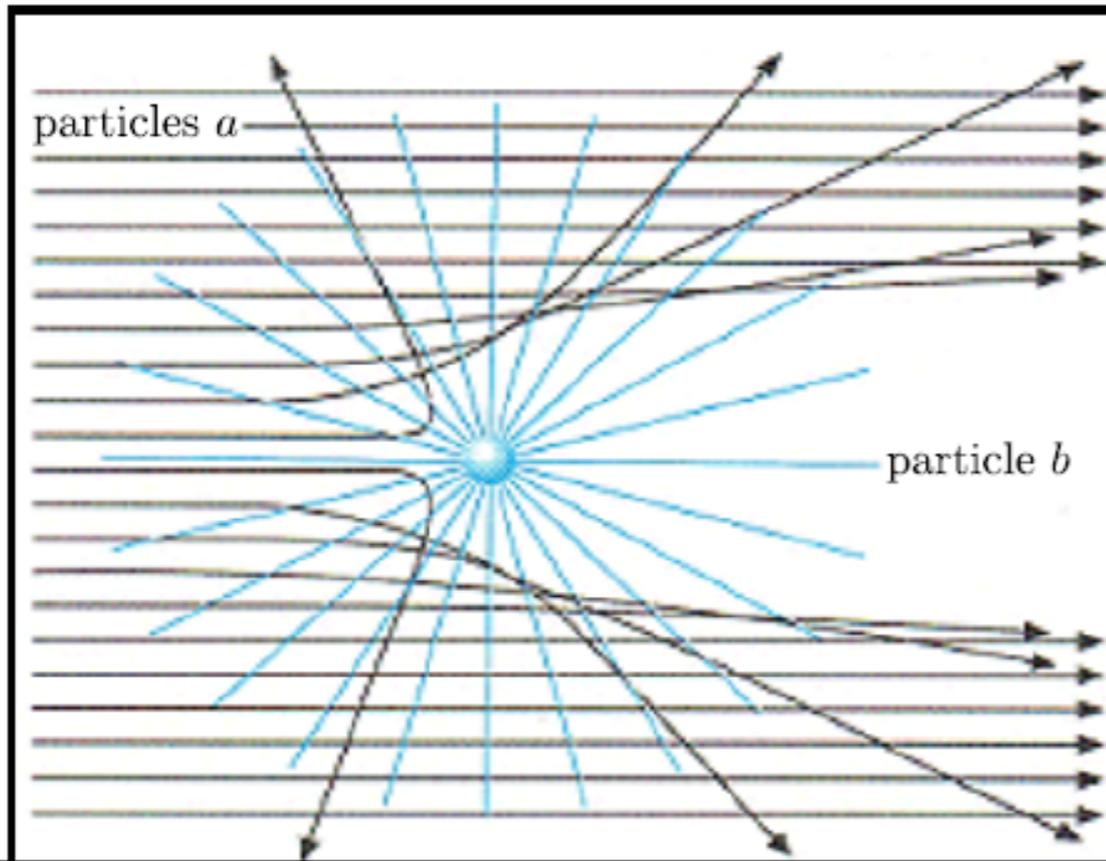


Source of  $\alpha$  particles

Abgeschirmte Radium-Quelle  
( $E_{\alpha} = 5.579 \text{ MeV}$ )

# Wirkungsquerschnitt (im Teilchenbild)

- Kontinuierlicher Fluß einlaufender (kleiner) Teilchen  $a$  auf ein (hier) ruhendes Target  $b$ . Elastische Streureaktion:  $a + b \rightarrow a + b$



$n_a$  : incident particle density  $\left[ \frac{\text{particles}}{m^3} \right]$ .

$v$  : incident particles velocity  $\left[ \frac{m}{s} \right]$ .

$\mathcal{L} = n_a \cdot v$  : incident part flux  $\left[ \frac{\text{particles}}{m^2 s} \right]$ .

$W = \mathcal{L} \cdot \sigma$  : scattering rate  $\left[ \frac{1}{s} \right]$ .

$\sigma = \frac{W}{\mathcal{L}}$  : rate/incident particle flux.

**Wirkungsquerschnitt:**  $N_{\text{obs}}$  : N observed reactions.

$N_{\text{BG}}$  : N expected BG reactions.

$\epsilon$  : detection efficiency.

$A$  : detector acceptance.

$T$  : observation time.

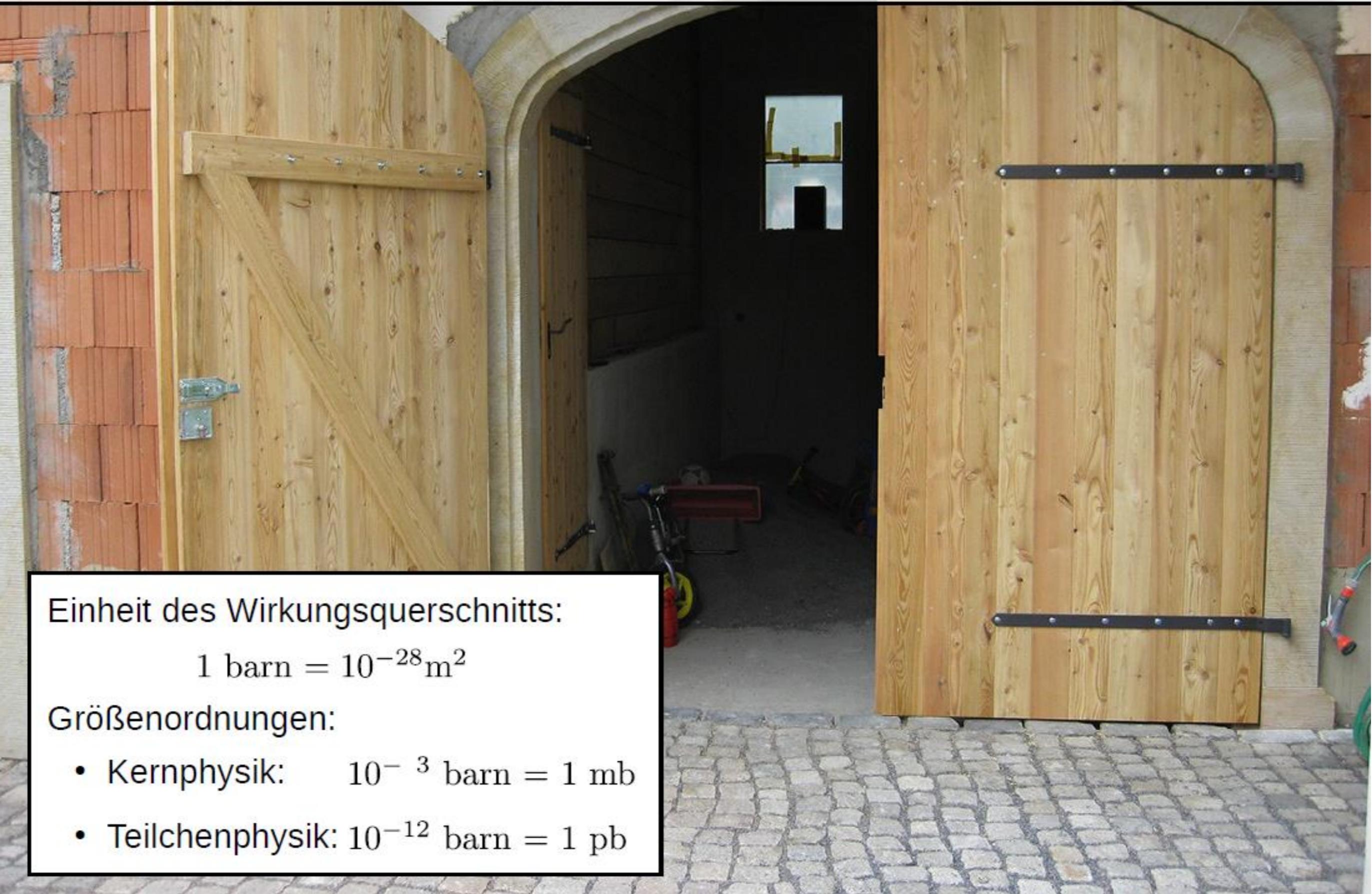
$$\sigma = \frac{N_{\text{obs}} - N_{\text{BG}}}{\mathcal{L} \cdot \epsilon \cdot A} \frac{1}{T}$$

Hausaufgabe



Der geometrische Wirkungsquerschnitt einer massiven Kugel ist  $\pi r^2$ .

# Einheit und Größenordnung



Einheit des Wirkungsquerschnitts:

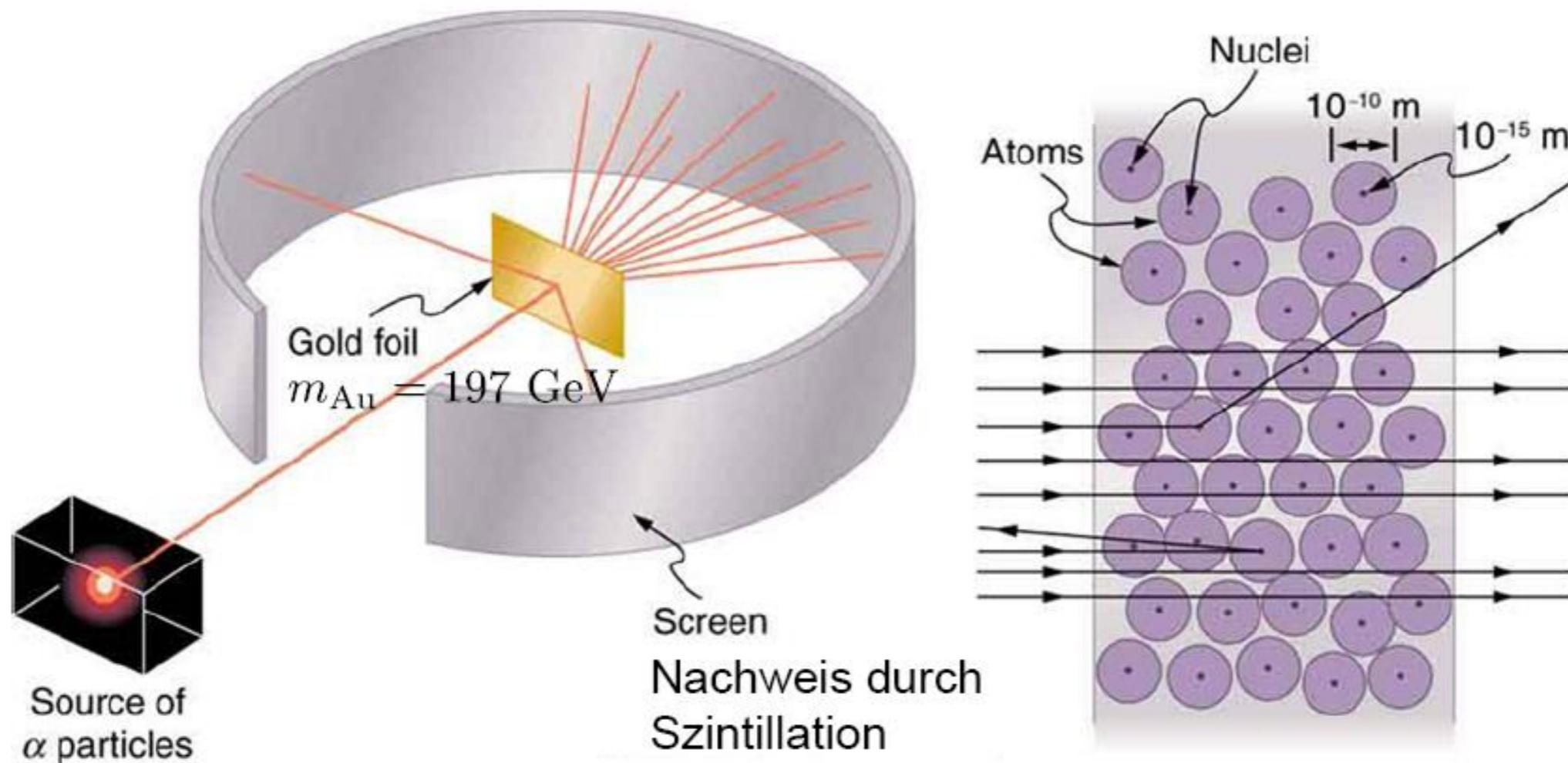
$$1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2$$

Größenordnungen:

- Kernphysik:  $10^{-3} \text{ barn} = 1 \text{ mb}$
- Teilchenphysik:  $10^{-12} \text{ barn} = 1 \text{ pb}$

# Beispiel: Rutherford-Experiment

- Messe Rate der gestreuten Alphateilchen als Funktion des Streuwinkels (→ erlaubt Rückschlüsse auf Streuzentren, Rutherford, Geiger, Marsden, ab 1909):



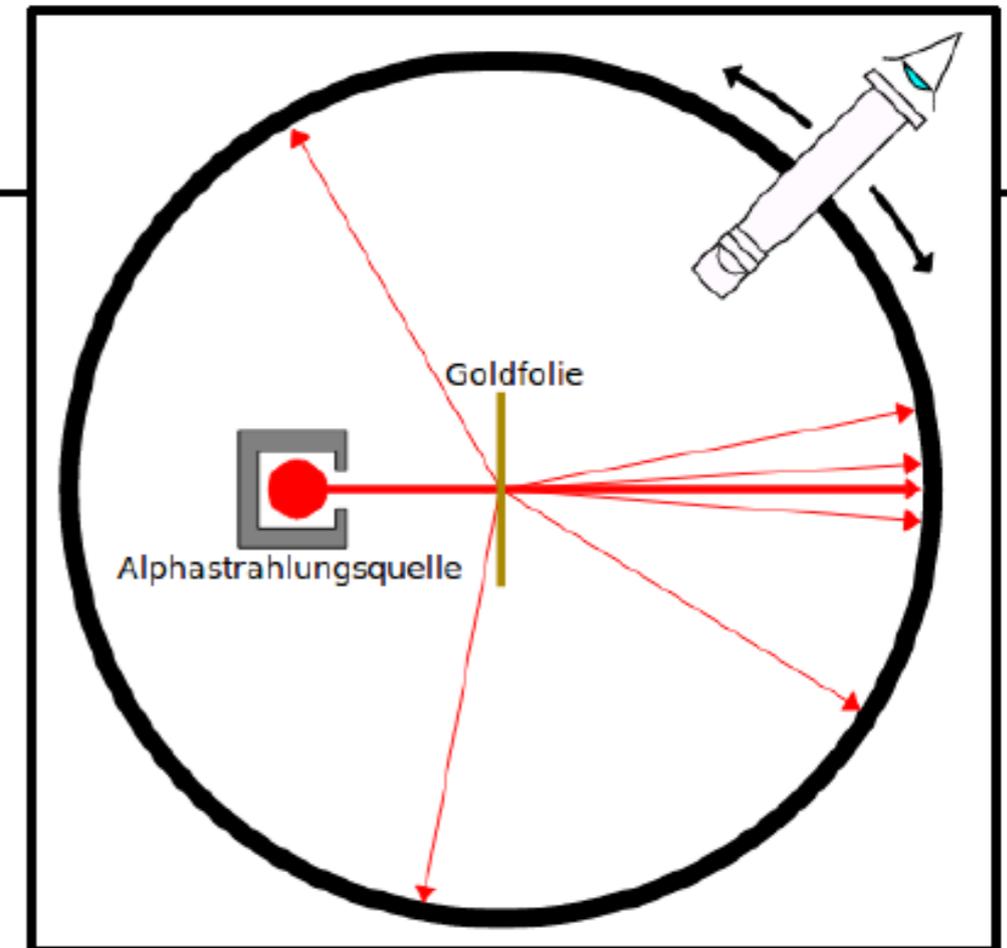
Source of  $\alpha$  particles

Abgeschirmte Radium-Quelle  
( $E_{\alpha} = 5.579 \text{ MeV}$ )

# Beobachtung vs Modell

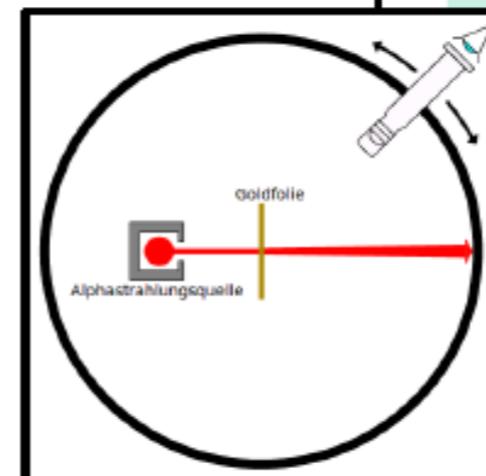
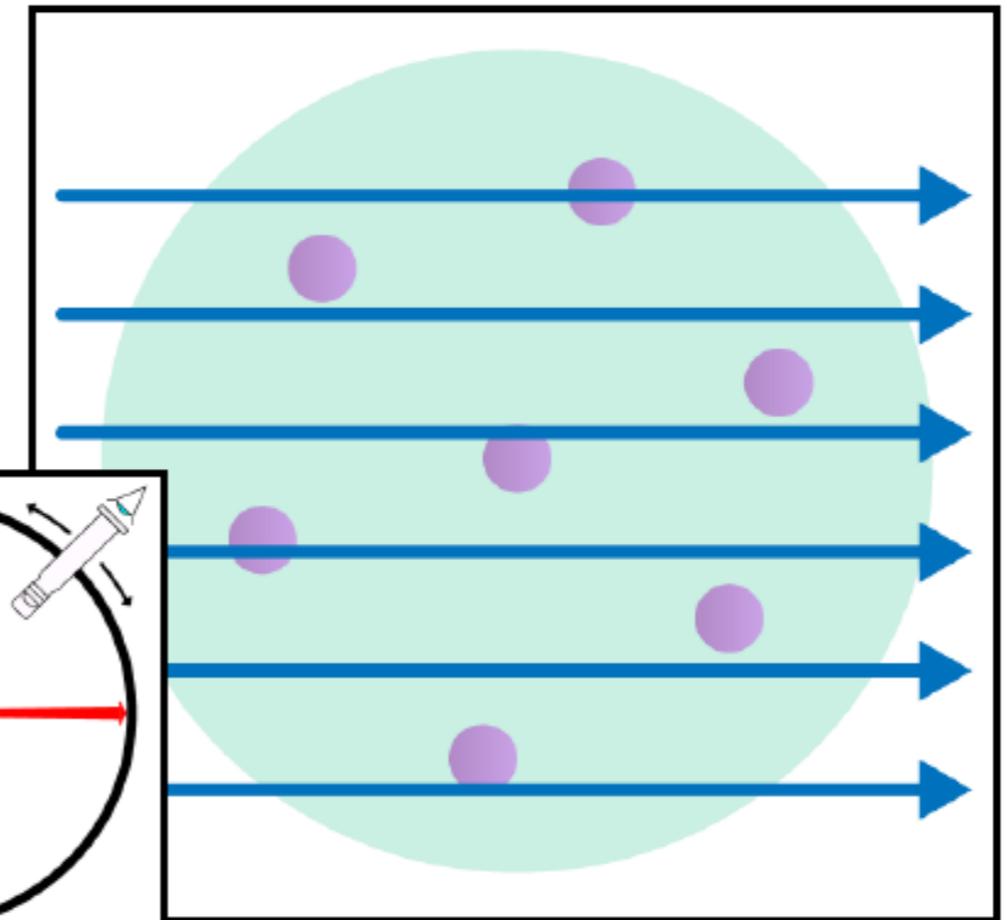
- **Beobachtung:**

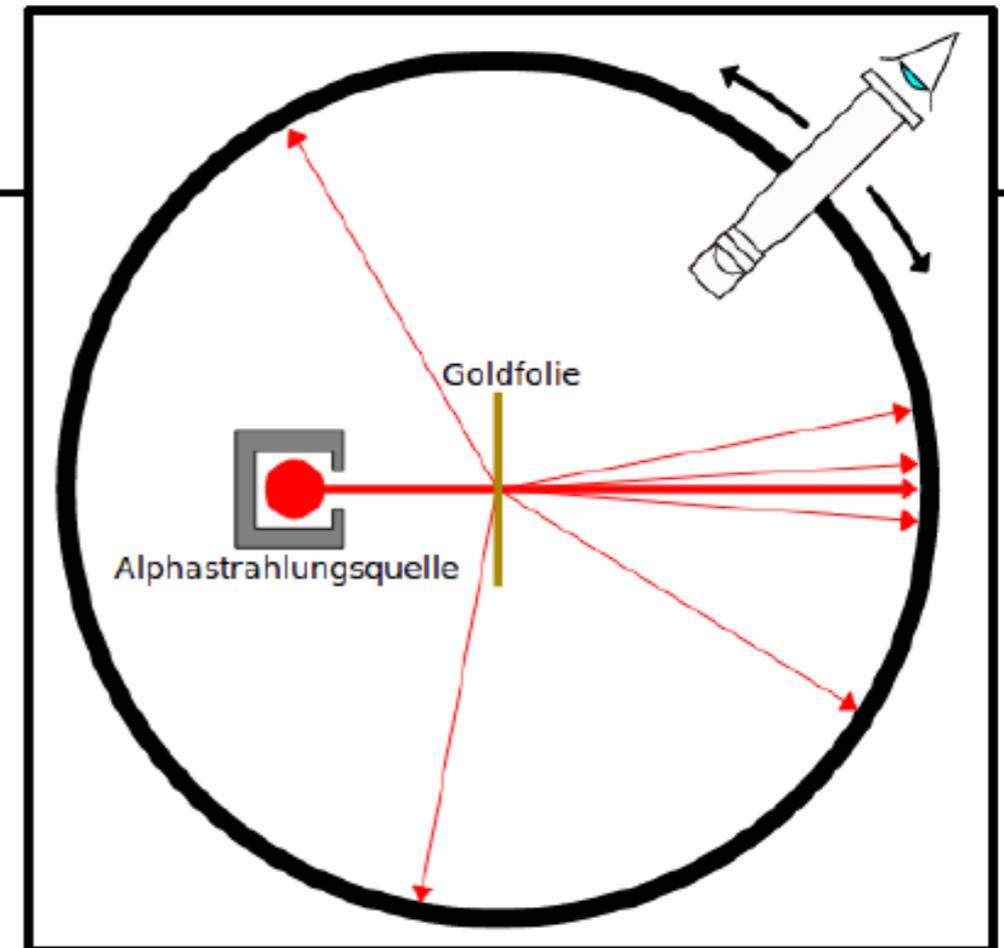
- Die meisten Alphateilchen passieren die Goldfolie **ungehindert**, nur Anteil von ca.  $10^{-5}$  ändert seine Richtung!
- Unter denen, die die Richtung ändern kommt es zu großen Streuwinkeln (bis zu 180 Grad)



- **Atommodell (Thomson):**

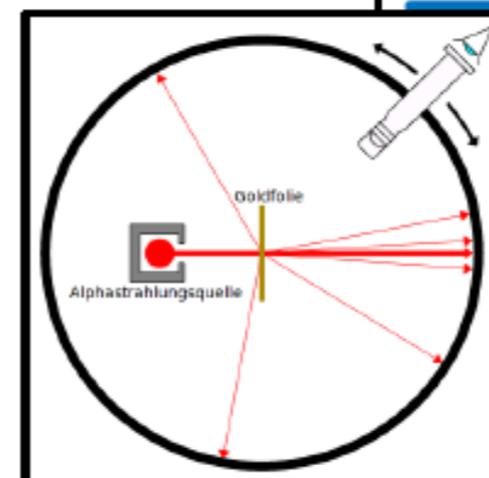
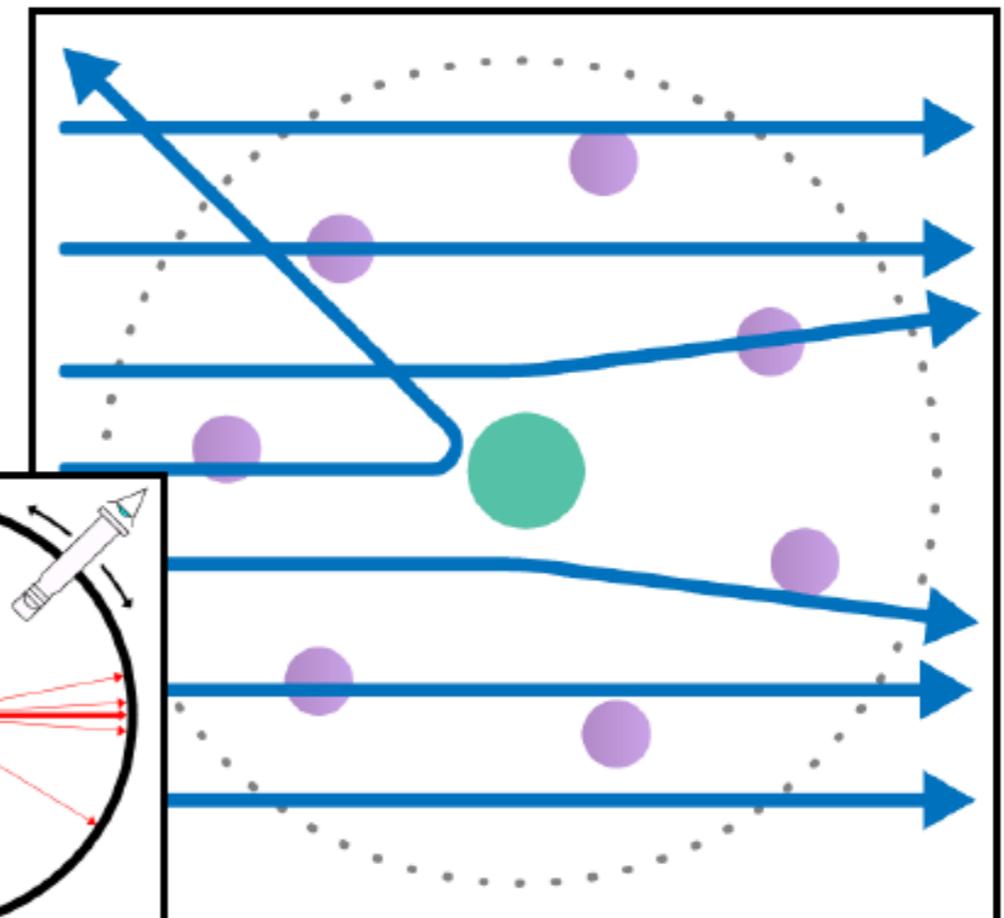
- Gleichmäßig verteilte positiv geladene Masse, Elektronen darin verteilt ("Rosinenkuchen")
- Erwarte ausschließlich **kleine Streuwinkel**.





- **Atommodell (Rutherford):**

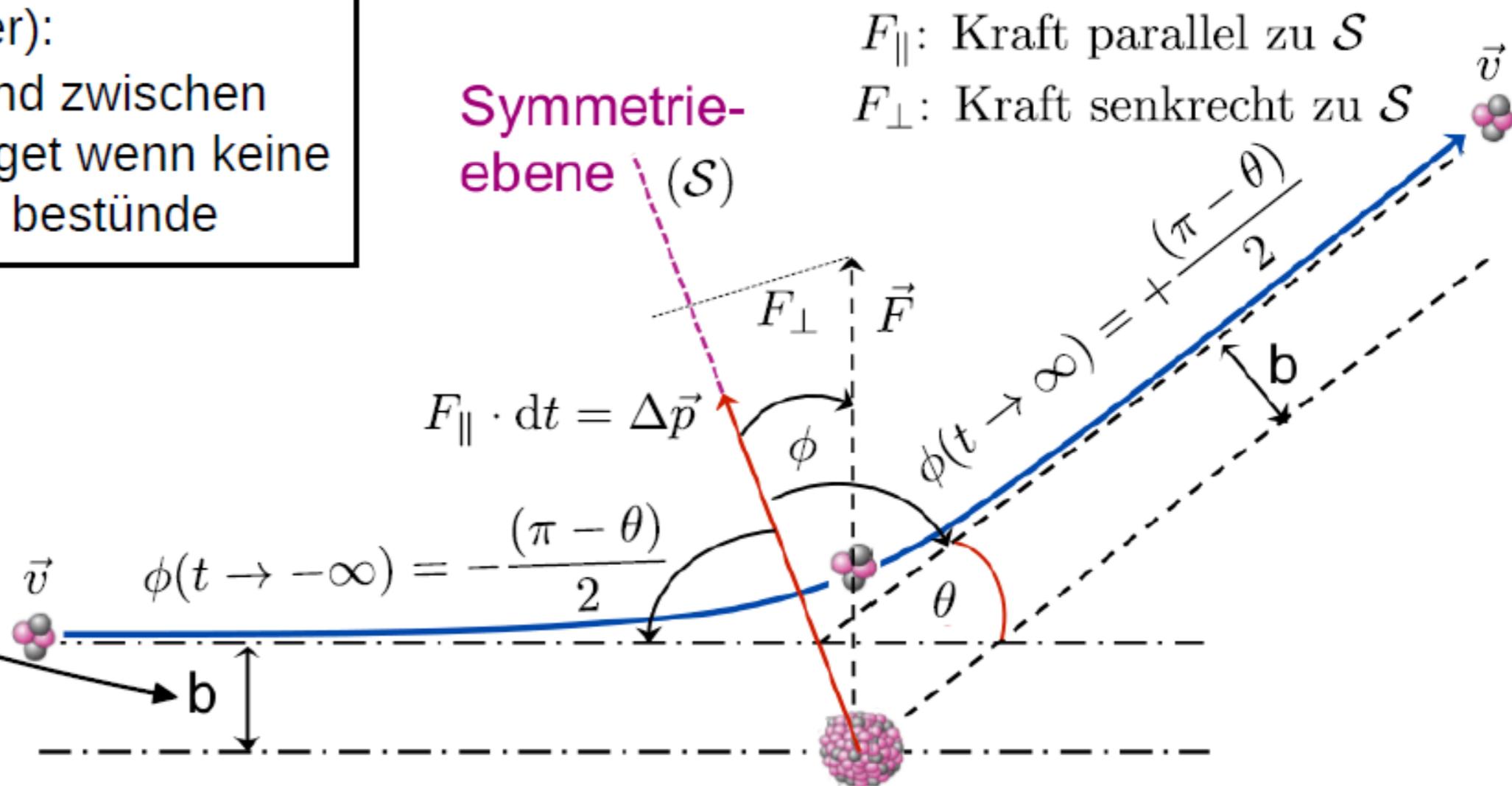
- Fast sämtliche Masse des Atoms in sehr kleinem Streuzentrum konzentriert (Atomkern).
- Elektronen quasi im leeren Raum um Atomkern verteilt.
- Rutherford-Streuung = elastische Streuung an Atomkernen der Goldfolie



# Modell: Streuung punktförmiger Teilchen

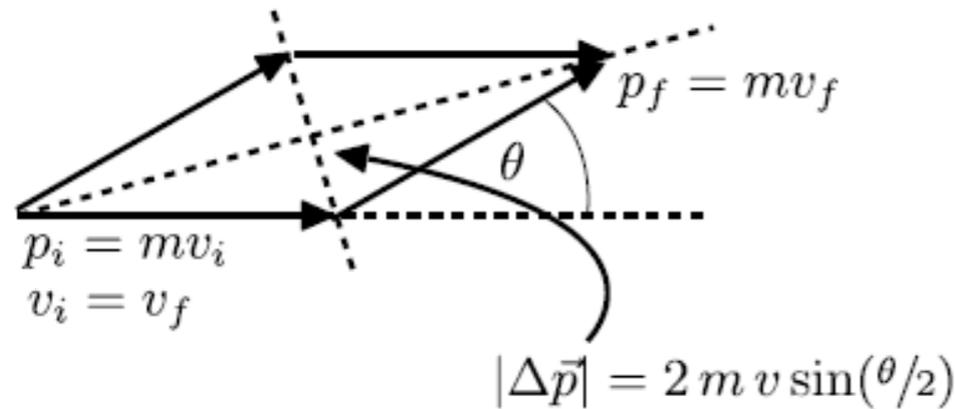
- Target und Projektil punktförmig ( $\rightarrow$  Teilchen ohne Spin)
- Coulomb-Potential zwischen Target und Projektil
- Target viel schwerer als Projektil ( $\rightarrow$  kein Rückstoß)

**Stoßparameter** (engl. impact parameter):  
Minimaler Abstand zwischen Projektil und Target wenn keine Wechselwirkung bestünde



- **Impulsänderung:**

$$|\Delta \vec{p}| = 2 m v \sin(\theta/2) \quad (1)$$



$$\begin{aligned} |\Delta \vec{p}| &= \int_{-(\pi-\theta)/2}^{(\pi-\theta)/2} \frac{z Z e^2}{4\pi\epsilon_0 v b} \cos \phi \cdot d\phi \\ &= \frac{z Z e^2}{4\pi\epsilon_0 v b} \left[ \sin \phi \right]_{-(\pi-\theta)/2}^{(\pi-\theta)/2} \\ &= \frac{z Z e^2}{4\pi\epsilon_0 v b} 2 \cos(\theta/2) \quad (2) \end{aligned}$$

- Impulsänderung durch **Kraftwirkung:**

$$|\Delta \vec{p}| = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\parallel} \cdot dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z Z e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \phi(t) \cdot dt$$

- Variablensubstitution  $dt \rightarrow d\phi$   
( $\rightarrow$  Drehimpulserhaltung):

$$\begin{aligned} |\vec{L}| &= |\vec{r} \times \vec{p}| = m v b \\ &= m \omega r^2 = m \frac{d\phi}{dt} r^2 \\ dt &= \frac{r^2}{v b} d\phi \quad (\phi \in [-(\pi - \theta)/2; +(\pi - \theta)/2]) \end{aligned}$$

- Gleichsetzen von (1) und (2):

$$\begin{aligned} \tan(\theta/2) &= \frac{z Z e^2}{4\pi\epsilon_0 m v^2 b} \equiv \frac{k}{b} \\ b(\theta) &= \frac{k}{\tan(\theta/2)} \end{aligned}$$

(Relation Streuwinkel–Stoßparameter)

Additionstheoreme:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \end{aligned}$$

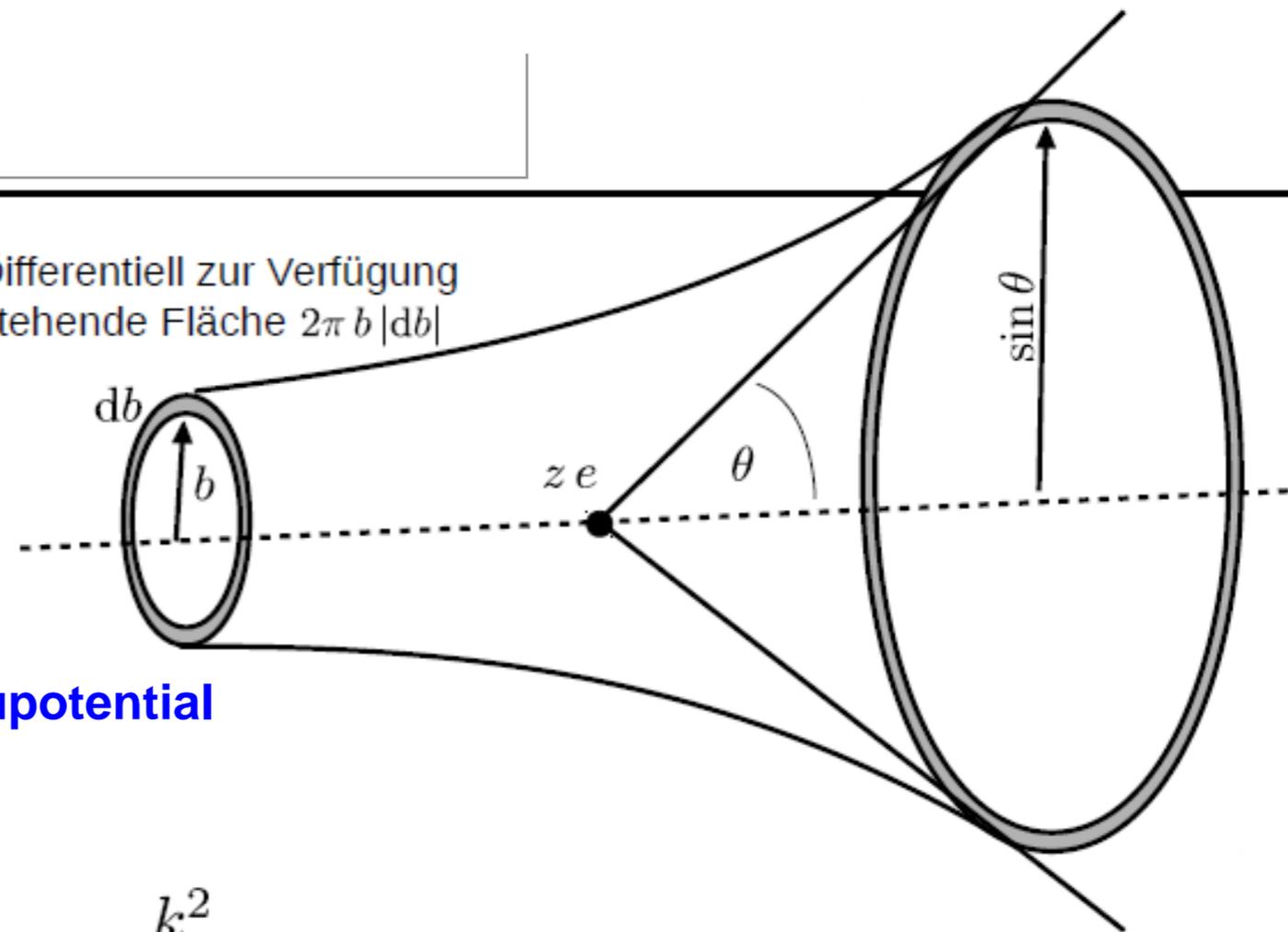
• **Geometrischer Wirkungsquerschnitt:**

$$\left. \begin{aligned} d\sigma &= 2\pi b |db| \\ d\Omega &= 2\pi \sin \theta d\theta \end{aligned} \right\} \frac{d\sigma}{d\Omega} = -\frac{b}{\sin \theta} \frac{db}{d\theta}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= -\frac{b}{\sin \theta} \left( -\frac{k}{2 \sin^2(\theta/2)} \right) \\ &= -\frac{k}{\tan(\theta/2) \sin \theta} \left( -\frac{k}{2 \sin^2(\theta/2)} \right) = \frac{k^2}{4 \sin^4(\theta/2)} \end{aligned}$$

Differentiell zur Verfügung stehende Fläche  $2\pi b |db|$

**Streupotential**



$$\tan(\theta/2) = \frac{z Z e^2}{4\pi\epsilon_0 m v^2 b} \equiv \frac{k}{b}$$

$$b(\theta) = \frac{k}{\tan(\theta/2)}$$

$$\frac{db}{d\theta} = -\frac{k}{2 \sin^2(\theta/2)}$$

Additionstheoreme:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

# Rutherford-Streuformel

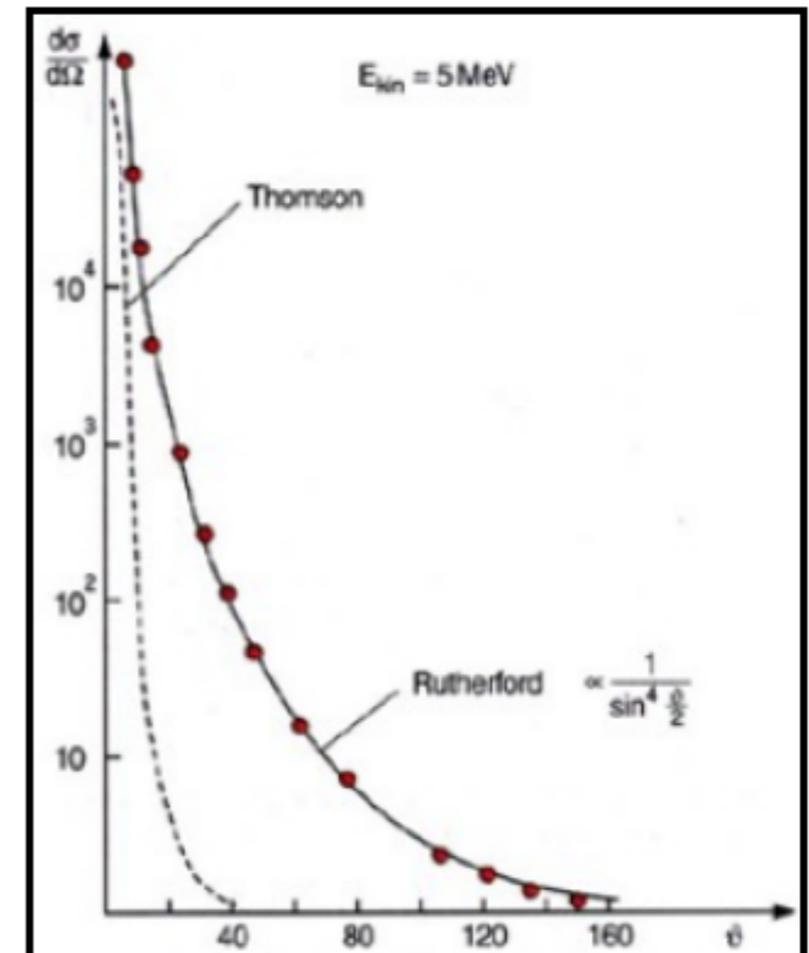
- **Differentieller Wirkungsquerschnitt (Rutherford-Streuung):**

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{z Z e^2}{4 \pi \epsilon_0 m v^2 \cdot 2 \sin^2(\frac{\theta}{2})} \right)^2 = \left( \frac{z Z \alpha (\hbar c)}{4 E_{kin}} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\frac{\theta}{2})}$$

mit:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137} \quad (\text{Feinstrukturkonstante})$$

- $\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto Z$  : Möglichkeit die Kernladungszahl zu messen
- $\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \frac{1}{E_{kin}^2}$  : je höher die Energie der Projektilen desto geringer der Wirkungsquerschnitt
- $\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \frac{1}{\sin^4(\frac{\theta}{2})}$  : starke Winkelabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts



# Rutherford-Streufornel (relativistische Notationen)

- **Differentieller Wirkungsquerschnitt (Rutherford-Streuung):**

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{z Z e^2}{4 \pi \epsilon_0 m v^2 \cdot 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right)^2 = \left( \frac{z Z \alpha (\hbar c)}{4 E_{kin}} \right)^2 \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

- Wir erinnern uns an den rel. Lorentz-Impulsübertrag  $t = (p^\mu - p'^\mu)^2$  bei elastischer Streuung (mit  $|\vec{p}| = |\vec{p}'| = p$ ):

$$t = 2 p^2 (1 - \cos \theta) = 4 p^2 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \equiv q^2 \quad dq^2 = 4 p^2 \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) d\theta$$

$$= 2 p^2 \sin \theta d\theta$$

- Für den elastischen Stoß gilt:

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = 2\pi \left( \frac{z Z \alpha (\hbar c)}{4 E_{kin}} \right)^2 \frac{\sin \theta}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad \text{mit } d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{z Z \alpha (\hbar c)}{2 m \gamma \beta^2 c^2} \right)^2 \left( \frac{4 (m \gamma \beta c)^2}{q^2 c^2} \right)^2 = \frac{(2 z Z \alpha (\hbar c))^2 E^2}{q^4 c^4}$$

$$\frac{d\sigma}{dq^2} = \pi \left( \frac{z Z \alpha (\hbar c)}{\beta c} \right)^2 \left( \frac{1}{q^2} \right)^2$$

# Mottstreuung

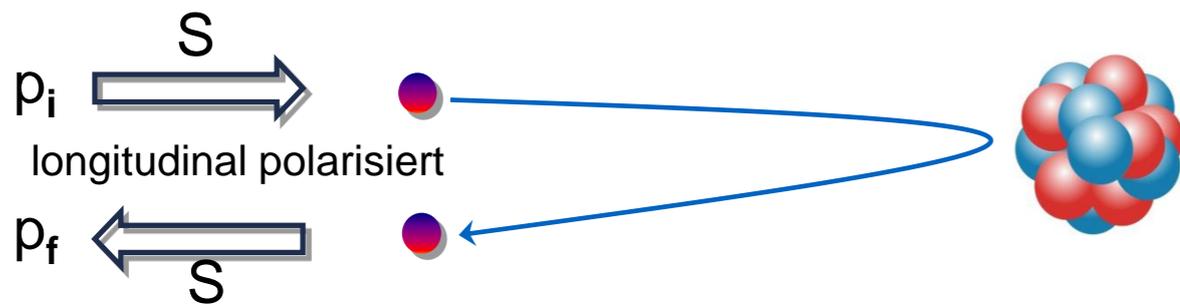
**Mott-Streuquerschnitt** für relativistische Projektile mit Spin (kein Rückstoß):

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Rutherford} \cdot \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Rutherford} \cdot \cos^2 \left(\frac{\theta}{2}\right)$$

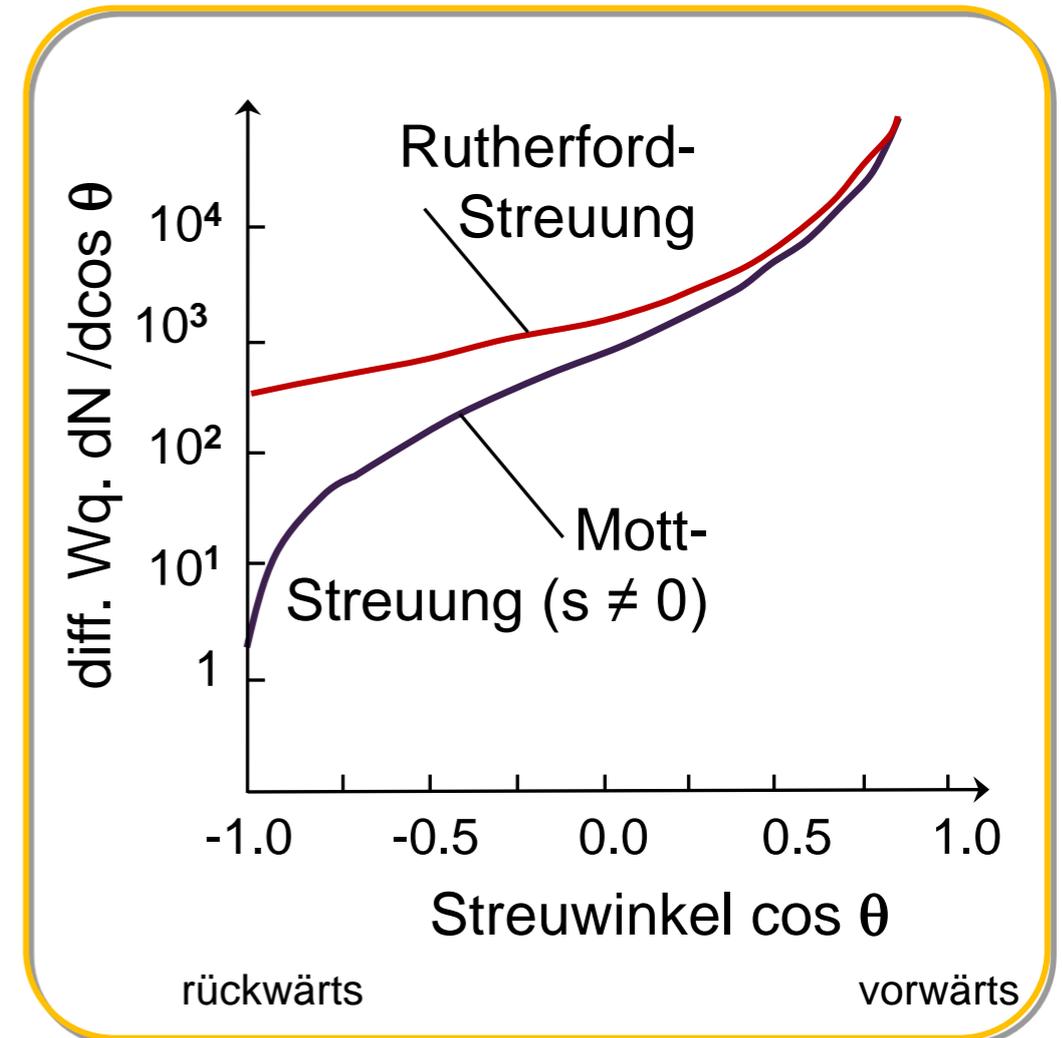
↓  
für  $\beta \rightarrow 1$

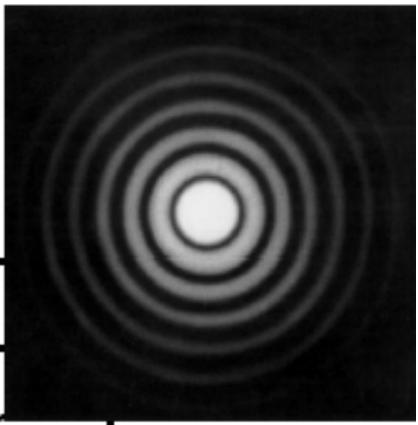
**berücksichtigt Spin-Effekte**

Beispiel: Rückwärtsstreuung eines  $e^-$   
( $s = 1/2$ ) bei zentralem Stoß ( $\ell = 0$ )



Elektronspin müsste umklappen (Spin-Flip)  
→ **Rückwärtsstreuung stark unterdrückt**





# Streuung (im Wellenbild)

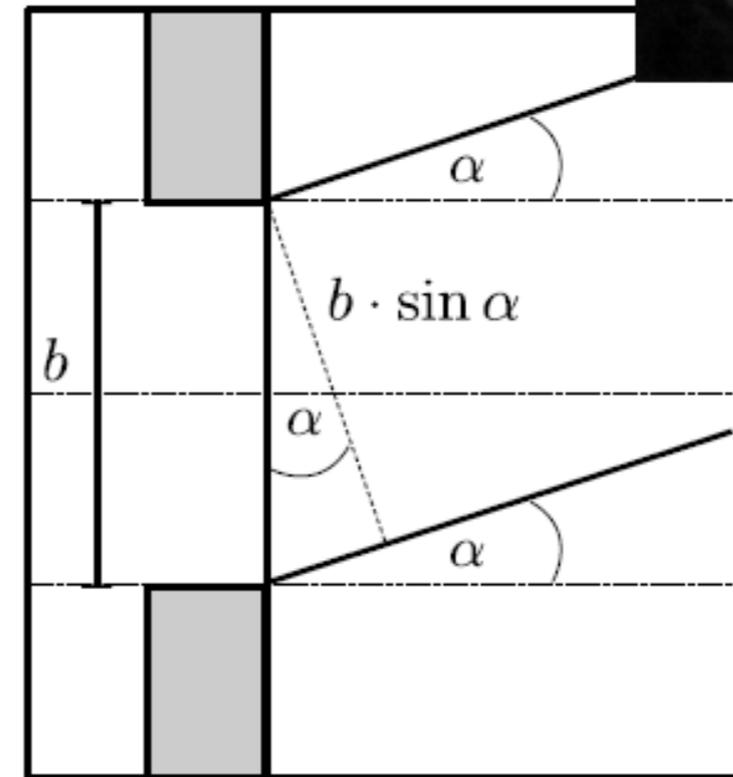
- Beispiel **Beugung von Licht am Spalt:**

$$\psi(\alpha) = \psi_0 e^{ikx} = \sum_{j < b \sin \alpha / \Delta x} \frac{\Delta x}{b \sin \alpha} \psi_0 e^{ikx_j}$$

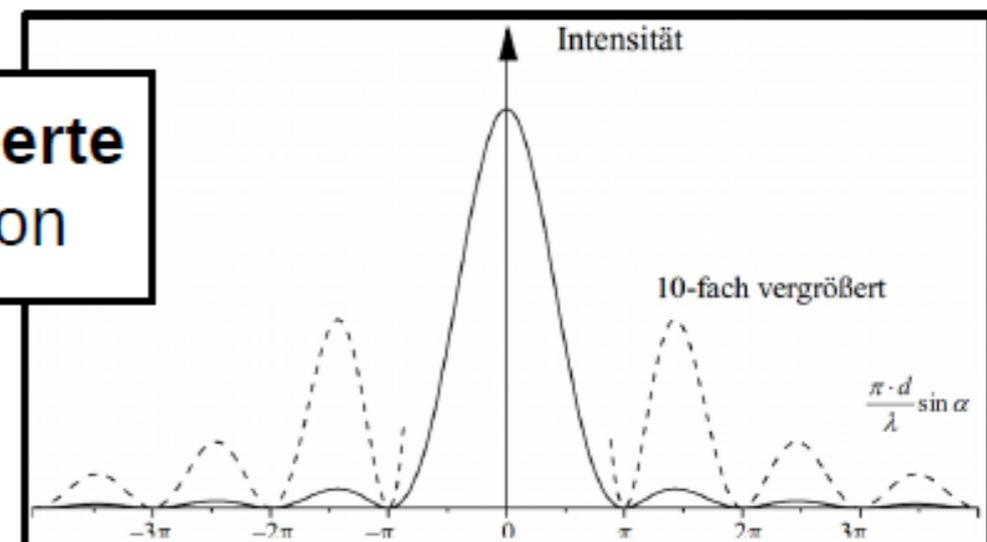
im Grenzübergang  $\Delta x \rightarrow 0$ :

$$\psi(\alpha) = \int_{-b \sin \alpha / 2}^{+b \sin \alpha / 2} \frac{dx}{b \sin \alpha} \psi_0 e^{ikx} = \left[ \frac{\psi_0}{b \sin \alpha} \frac{e^{ikx}}{ik} \right]_{-b \sin \alpha / 2}^{+b \sin \alpha / 2}$$

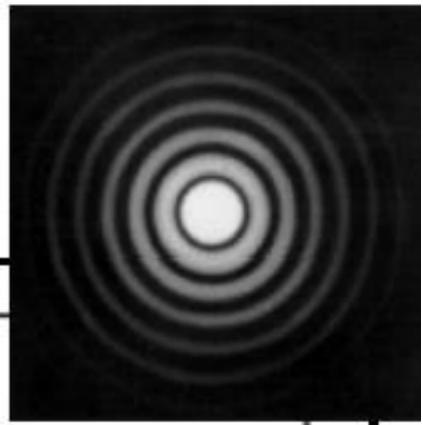
$$= \frac{\psi_0}{b \sin \alpha / 2} \left( \frac{e^{ik b \sin \alpha / 2} - e^{-ik b \sin \alpha / 2}}{2ik} \right) = \psi_0 \cdot \frac{\sin(k b \sin \alpha / 2)}{k b \sin \alpha / 2} \quad (\text{Spaltfunktion})$$



**Fouriertransformierte**  
der Rechteckfunktion

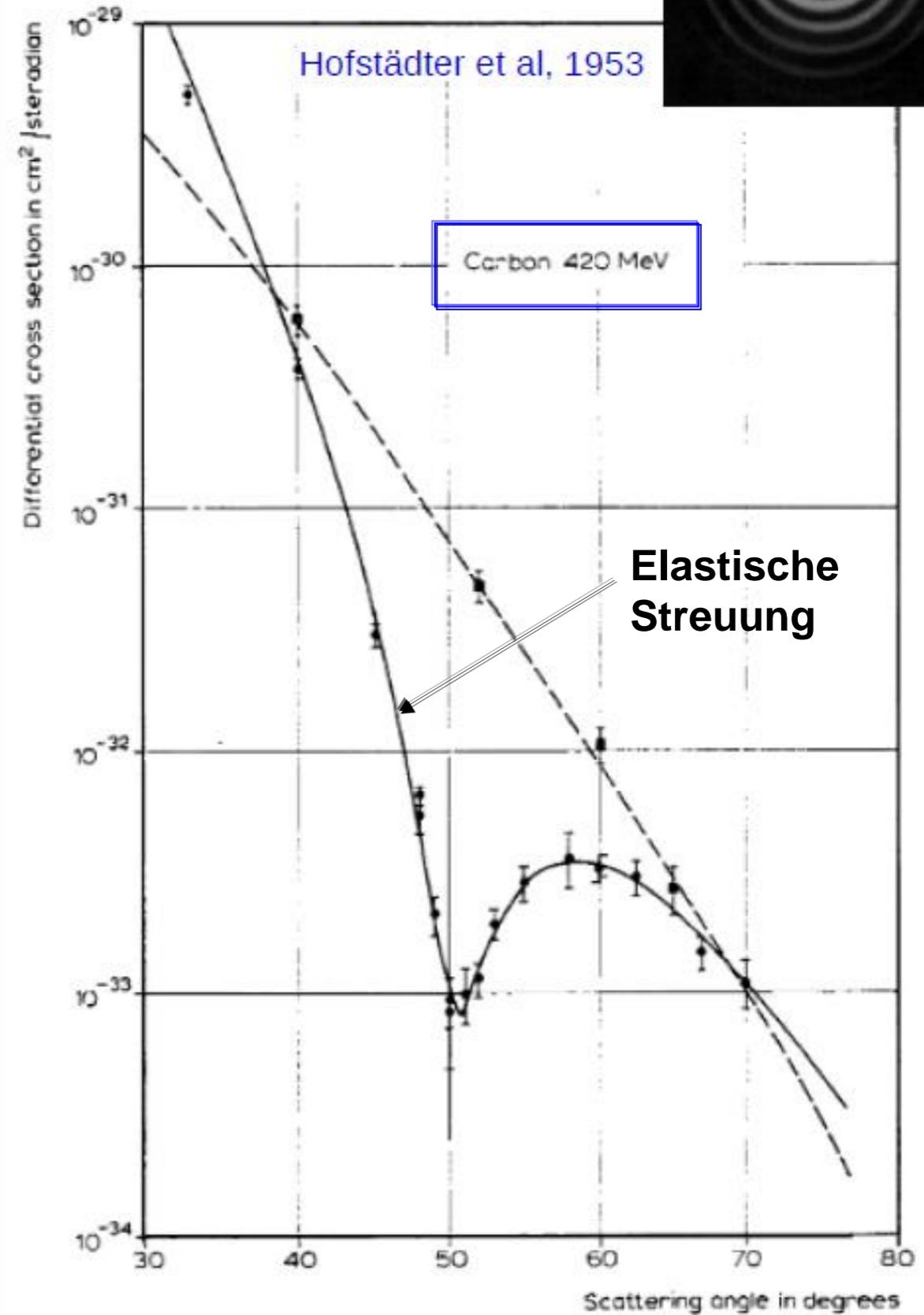
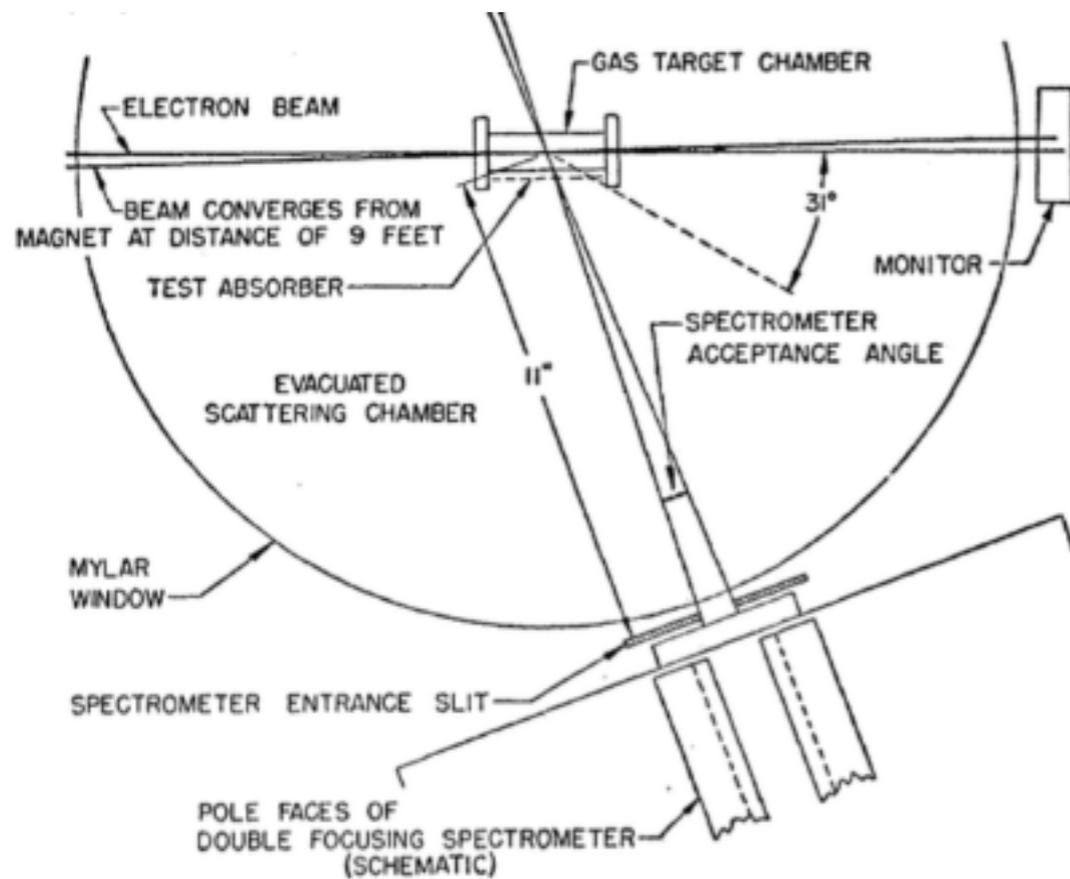


Inverse Fouriertransformation des Streubildes erlaubt Rückschlüsse auf Aussehen des Targets



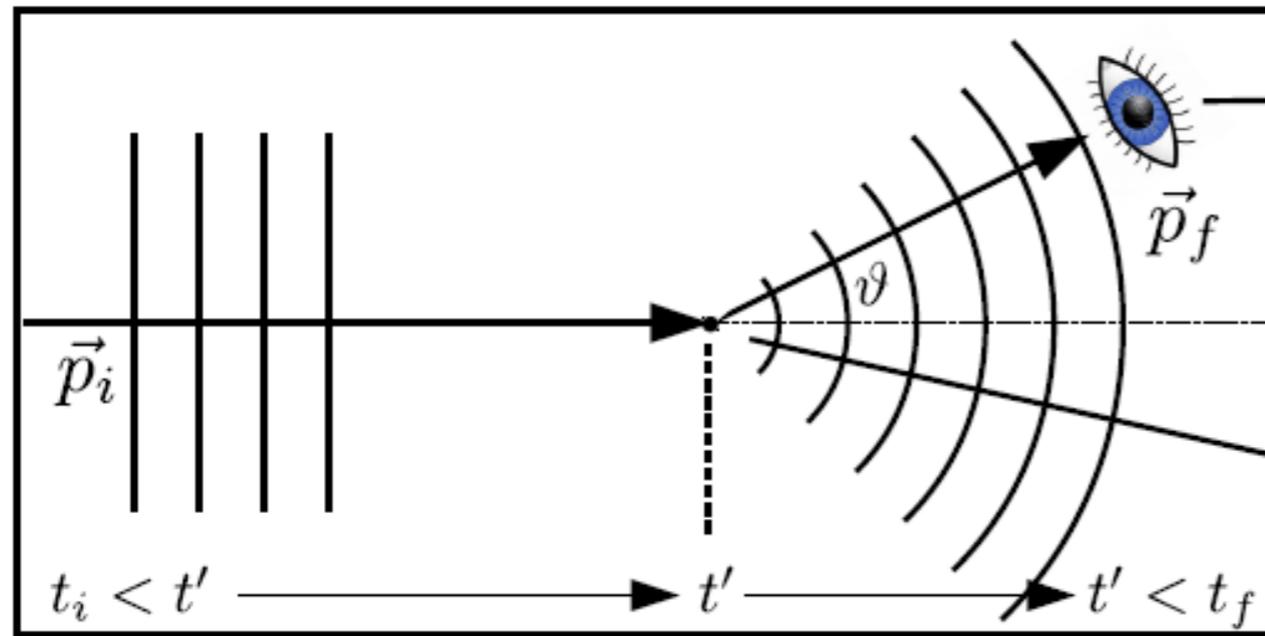
# Streuung (im Wellenbild)

- **Beugungsmuster** analog zu Lochblende, hier beobachtet in der Streuung von Elektronen an Kohlenstoff-Kernen.



# Wirkungsquerschnitt (im Wellenbild)

- Kontinuierlicher Fluß einlaufender (kleiner) Teilchen  $a$  auf ein (hier) ruhendes Target  $b$ . Elastische Streureaktion:  $a + b \rightarrow a + b$



Beobachtung in Raumwinkel  $\Delta\Omega$   
 $\rightarrow$  Projektion ebener Welle  $\psi_f$  aus  $\psi_{\text{scat}}$

Auslaufende  
 Kugelwelle  $\psi_{\text{scat}}$

Einlaufender Teilchenstrahl  $\rightarrow$  ebene Welle  $\psi_i$

Lokalisiertes  
 Potential.

Streuoperator  $\mathcal{S}$  transformiert Wellenfunktion des Anfangszustands  $\psi_i$  auf gestreute Wellenfunktion  $\psi_{\text{scat}} = \mathcal{S} \cdot \psi_i$

Beobachtungswahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{fi} &= \psi_f^\dagger \cdot \psi_{\text{scat}} \\ &= \psi_f^\dagger \cdot \mathcal{S} \cdot \psi_i \end{aligned}$$

Element  $fi$  der Streumatrix

# Fermi's Goldene Regel

- Wahrscheinlichkeit  $W$  des Übergangs von  $i$  nach  $f$  in der Quantenmechanik → Berechnung mit Hilfe von **Fermi's Goldener Regel**:

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{S}_{fi}|^2 \rho_f$$
$$\rho_f = \frac{d}{dE_f} \int_V \frac{d^3\vec{p}_f d^3\vec{x}_f}{(2\pi\hbar)^3}$$

In "führender Ordnung" der Störungstheorie:  
Streuoperator = Hamiltonoperator der Wechselwirkung zwischen Projektil und Target  $\mathcal{S} = \mathcal{H}_{int}$

$$|\mathcal{S}_{fi}|^2 = |\langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle|^2 \quad (\text{Matrixelement})$$

Phasenraumfaktor  
des Endzustands

- Relation zwischen Übergangswahrscheinlichkeit  $W$  und Wirkungsquerschnitt  $\sigma$  :

$$W = \mathcal{L} \cdot \sigma = n_a \cdot v \cdot \sigma = \frac{v}{V} \cdot \sigma$$

$$\sigma \cdot \frac{v}{V} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle|^2 \cdot \rho_f$$

# Phasenraumfaktor

$$\rho_f = \frac{d}{dE_f} \int \frac{d^3 \vec{p}_f d^3 \vec{x}_f}{(2\pi \hbar)^3} = \frac{4\pi p_f^2 V}{(2\pi \hbar)^3} \frac{dp_f}{dE_f}$$

mit  $v \approx c$ ,  $p_f = E_f/c$ ,  $dp_f = dE_f/c$  für den Impuls des gestreuten Teilchens im Endzustand

$$d\sigma \frac{v}{V} = \frac{2\pi}{\hbar} \cdot |\langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle|^2 \cdot \frac{4\pi p_f^2 V}{(2\pi \hbar)^3} \frac{dp_f}{dE_f} \cdot \frac{d\Omega}{4\pi}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{V^2 E_f^2}{(2\pi)^2 (\hbar c)^4} |\langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle|^2$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{V^2 E_f^2}{(2\pi)^2 (\hbar c)^4} |\langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle|^2$$

# Formfaktor

- Allgemeine Eigenschaft aller Streuexperimente (→ Spalt, Gitter, Kern, Nukleon, Elementarteilchen, ...)

$$F(\vec{q}) = \int_V f(\vec{x}) e^{i\vec{q}\vec{x}/\hbar} d^3\vec{x} \quad (\text{Formfaktor})$$

$$F(q) = 4\pi \int_0^\infty f(r) \frac{\sin(|q|r/\hbar)}{|q|r/\hbar} r^2 dr \quad (\text{für radialsymmetrische Ladungsverteilungen})$$

- Formfaktor = Fouriertransformierte des Targets im Ortsraum

(vgl. mit [Folie 19](#))

Inverse Fouriertransformation des Streubildes erlaubt Rückschlüsse auf Aussehen des Targets

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_V F(\vec{q}) e^{-i\vec{q}\vec{x}/\hbar} d^3\vec{q}$$

In diesem Fall → elektrische Ladungsdichte

	$\rho(r)$	$ F(\mathbf{q}^2) $	
$\rho(r) = \frac{\delta(r)}{4\pi}$	punktförmig	konstant	$F(\vec{q}) = 1$
$\rho(r) = \frac{a^3}{8\pi} e^{-ar}$	exponentiell	Dipol	$F(\vec{q}) = \left(1 + \frac{q^2}{a^2 \hbar^2}\right)^{-2}$
$\rho(r) = \sqrt[3]{\frac{a^2}{2\pi}} e^{-\frac{a^2 r^2}{2}}$	gaußförmig	gaußförmig	$F(\vec{q}) = e^{-\frac{q^2}{2 a^2 \hbar^2}}$
$\rho(r) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi} R^3 & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}$	homogene Kugel	oszillierend	$F(\vec{q}) = \frac{3}{ \vec{q} R/\hbar} \cdot \left( \sin( \vec{q} R/\hbar) -  \vec{q} R/\hbar \cos( \vec{q} R/\hbar) \right)$
$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{\frac{r-c}{a}}}$	Kugel mit diffusem Rand	oszillierend	Keine analytische Form

$r \longrightarrow$ 
 $|\mathbf{q}| \longrightarrow$