

Moderne Experimentalphysik III: Hadronen und Teilchen (Physik VI)

Thomas Müller, Roger Wolf
14. Juni 2018

INSTITUTE OF EXPERIMENTAL PARTICLE PHYSICS (IETP) – PHYSICS FACULTY



Kapitel 6.5: Theorie der elektro- schwachen Wechselwirkung

Drei Säulen des Standardmodells

Quantenfeldtheorie

- Relativistische QM.
- Erzeugung/Vernichtung von Teilchen.

Symmetriebrechung

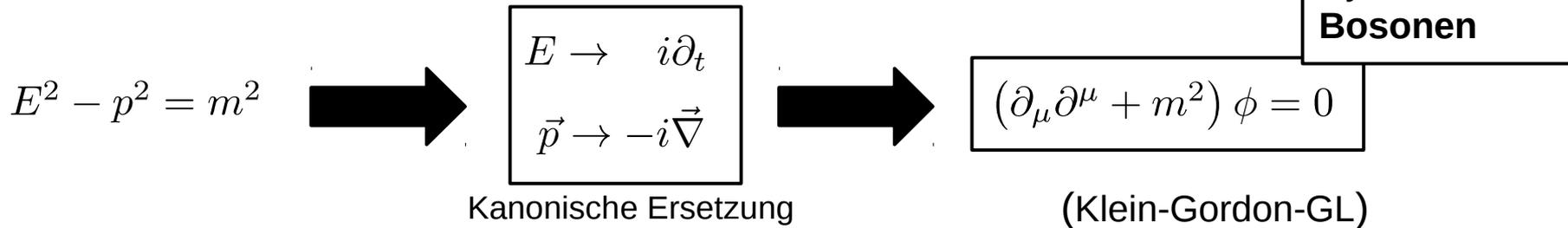
- Teilchenmasse (hier noch nicht diskutiert).

Symmetrien

- Fundamentale WW.
- Struktur der Materie

Klein-Gordon/Dirac-Gleichung

- Beschreibung **relativistischer Prozesse** der Teilchenphysik:



- Lösungen:

$$\phi_+(\vec{x}, t) = u(\vec{p}) e^{+i(\vec{p}\vec{x} - Et)}$$

$$\phi_-(\vec{x}, t) = v(\vec{p}) e^{-i(\vec{p}\vec{x} - Et)}$$

$$E(\vec{p}) = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} \quad (\text{Ebene Welle})$$

- Besonderheit: Hamilton-Operator **nicht-lokal**:

$$\hat{H}_0 = \sqrt{m^2 - \vec{\nabla}^2} = m \sqrt{1 - \frac{\vec{\nabla}^2}{m^2}} = m - \frac{\vec{\nabla}^2}{2m} + \dots \quad (*)$$

Klein-Gordon/Dirac-Gleichung

- Beschreibung **relativistischer Prozesse** der Teilchenphysik:

Dynamik von
Bosonen

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = 0$$

(Klein-Gordon-GL)

- Linearisierte Form:

Dynamik von
Fermionen

$$i\partial_t \psi = \hat{H}_0 \psi = (-i\vec{\alpha}\vec{\nabla} + \beta m) \psi$$

(Dirac-GL)

$\vec{\alpha}$ und β sind keine einfachen Zahlen (siehe (*)) sondern algebraische Operatoren. Sie lassen sich aber als Matrizen darstellen.

Zweifache Anwendung muß auf Klein-Gordon-GL zurückführen

$$\begin{aligned} (i\partial_t)^2 \psi &= (-i\vec{\alpha}\vec{\nabla} + \beta m)^2 \psi \\ &= \left[\underbrace{-(\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i)}_{\{ \alpha_i, \alpha_j \} = 2\delta_{ij}} \partial_i \partial_j \right. \\ &\quad \left. - im \underbrace{(\alpha_i \beta + \beta \alpha_i)}_{\{ \alpha_i, \beta \} = 0} \partial_i + \underbrace{(\beta m)^2}_{\beta^2 = 1} \right] \psi \stackrel{!}{=} \left[-\vec{\nabla}^2 + m \right] \psi \end{aligned}$$

(Antikommutator-Relationen)

Dirac Darstellung

- Konkrete Darstellung der Matrizen α_i und β :

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

($\sigma_i (i = 1, 2, 3)$ Pauli-Matrizen)

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dirac Darstellung

- Manifest relativistisch-kovariante Formulierung mit Hilfe der $\gamma^{\mu(1)}$ -Matrizen:

$$\gamma^0 \equiv \beta$$

$$\gamma^i \equiv \beta \alpha_i$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}$$

$$\{\alpha_i, \beta\} = 0$$

$$[\beta, \beta] = 0$$



$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$$

(Kompakte Schreibweise
der Algebra)

- Dirac-Gleichung in relativistisch kovarianter Form:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0$$

(Dirac-Gleichung)

Muß mindestens 4-dim haben,
sonst lassen sich Kommutator-
Relationen nicht erfüllen (2)

- (1) Formelles Transformationsverhalten eines Lorentzvektors.
- (2) siehe Backup.

Lösungen der Dirac-Gleichung

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0$$

$$\psi_+(\vec{x}) = u(\vec{p}) e^{+i(\vec{p}\vec{x} - Et)}$$

$$\psi_-(\vec{x}) = v(\vec{p}) e^{-i(\vec{p}\vec{x} - Et)}$$

$$E(\vec{p}) = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$$

(Ebene Welle)

Spinoren
↓

for $+m$	$u_\uparrow(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$u_\downarrow(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
for $-m$	$v_\uparrow(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$v_\downarrow(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

at rest ($\vec{p} \equiv 0$)

Lösungen der Dirac-Gleichung

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0$$

$$\psi_+(\vec{x}) = u(\vec{p}) e^{+i(\vec{p}\vec{x} - Et)}$$

$$\psi_-(\vec{x}) = v(\vec{p}) e^{-i(\vec{p}\vec{x} - Et)}$$

$$E(\vec{p}) = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$$

(Ebene Welle)

Spinoren
↓

(Lorentz Transformation)

$$\Lambda : (m, 0, 0, 0) \rightarrow (E, p_x, p_y, p_z)$$

for +m

$$u_\uparrow(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_\downarrow(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

for -m

$$v_\uparrow(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_\downarrow(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

at rest ($\vec{p} \equiv 0$)

for +m

$$u_\uparrow(\vec{p}) = N \begin{pmatrix} E + m \\ 0 \\ p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix}$$

$$u_\downarrow(\vec{p}) = N \begin{pmatrix} 0 \\ E + m \\ p_x - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix}$$

for -m

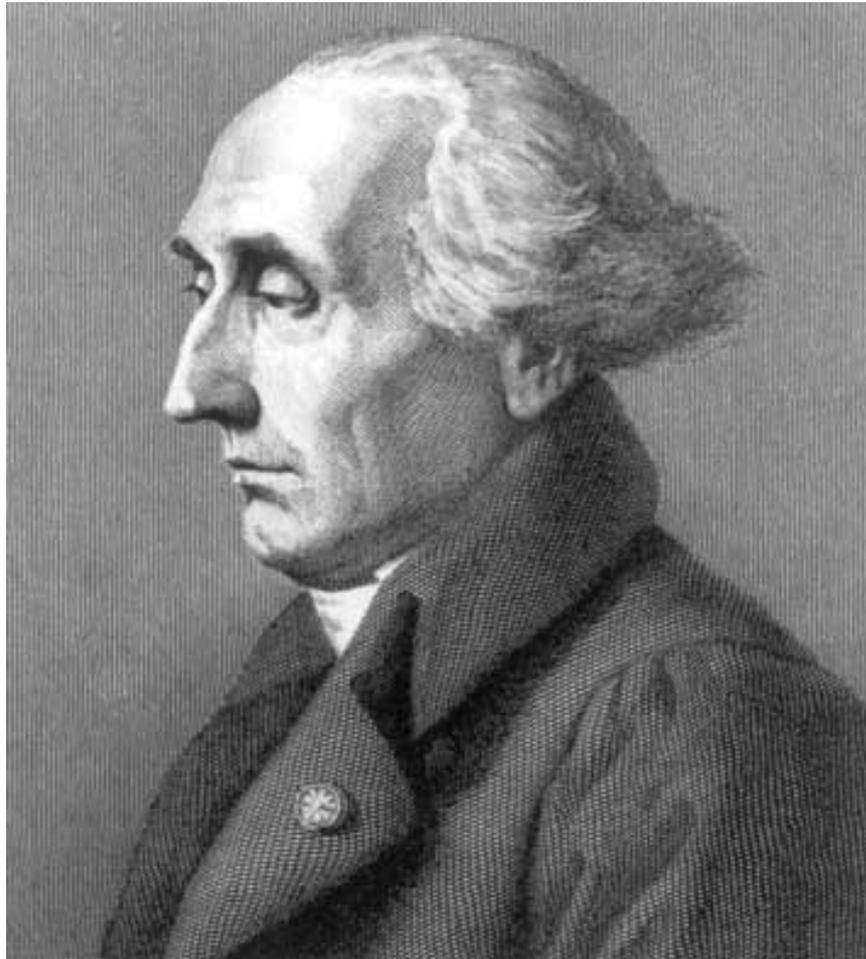
$$v_\uparrow(\vec{p}) = N \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \\ E + m \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_\downarrow(\vec{p}) = N \begin{pmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \\ 0 \\ E + m \end{pmatrix}$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{2m(E+m)}}$$

in motion ($\vec{p} \neq 0$)

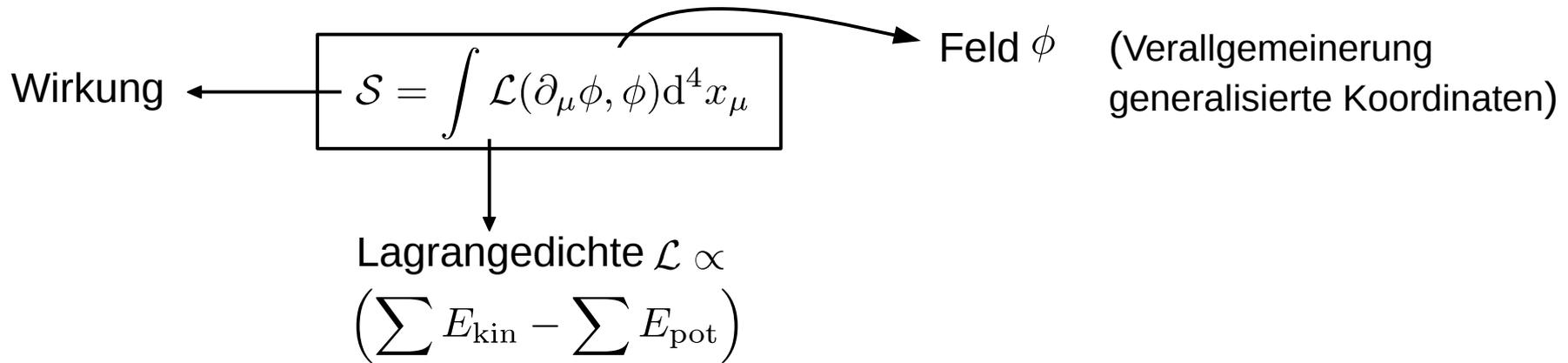
Lagrange Formalismus & Eichtransformationen



Joseph-Louis Lagrange
(*25. January 1736, † 10. April 1813)

Lagrange Formalismus (klassische Feldtheorie)

- Alle Informationen eines physikalischen Systems in **Wirkungsintegral** kodiert:



- Bewegungs-GL aus Euler-Lagrange Formalismus:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

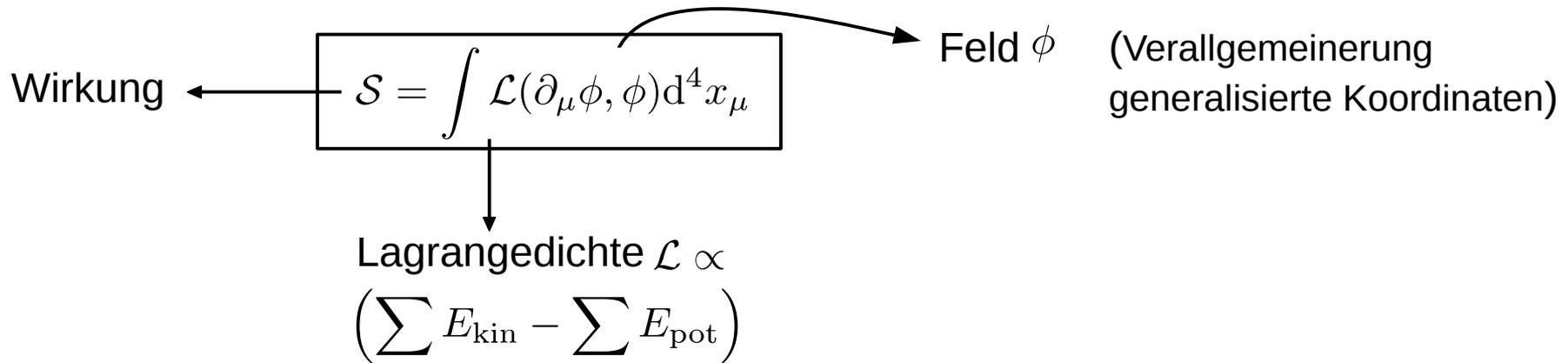
(Aus Variation der Wirkung)

Welche Dimension hat die
Lagrangedichte \mathcal{L} in
natürlichen Einheiten?



Lagrange Formalismus (klassische Feldtheorie)

- Alle Informationen eines physikalischen Systems in **Wirkungsintegral** kodiert:



- Bewegungs-GL aus Euler-Lagrange Formalismus:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

(Aus Variation der Wirkung)

Welche Dimension hat die
Lagrangedichte \mathcal{L} in
natürlichen Einheiten?
[\mathcal{L}] = GeV⁴



Lagrangedichte für freie Bosonen und Fermionen

Für **Bosonen**:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi \phi^*$$

Für **Fermionen**:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi$$

- Beweis durch Anwendung der Euler-Lagrange Gleichung (→ hier für Bosonen):

$$\partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi^*)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} = 0$$




- **Anmerkung:** bei der Variation sind die Felder ϕ^* , ϕ , $\bar{\psi}$, ψ als unabhängig voneinander zu betrachten.

Lagrangedichte für freie Bosonen und Fermionen

Für **Bosonen**:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi \phi^*$$

Für **Fermionen**:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi$$

- Beweis durch Anwendung der Euler-Lagrange Gleichung (→ hier für Bosonen):

$$\partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi^*)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} = 0$$



$$\begin{array}{ccc} \swarrow & & \searrow \\ \partial^\mu \partial_\mu \phi & & -m^2 \phi \\ & \longrightarrow & (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi = 0 \end{array}$$

- **Anmerkung:** bei der Variation sind die Felder ϕ^* , ϕ , $\bar{\psi}$, ψ als unabhängig voneinander zu betrachten.

Globale & Lokale Phasentransformationen

- Lagrangedichte kovariant unter **globalen** (→ hier für Fermionen):

Phasentransformationen

$$\psi(\vec{x}, t) \rightarrow \psi'(\vec{x}, t) = e^{i\vartheta} \psi(\vec{x}, t)$$

$$\bar{\psi}(\vec{x}, t) \rightarrow \bar{\psi}'(\vec{x}, t) = \bar{\psi}(\vec{x}, t) e^{-i\vartheta}$$

$$\vartheta \neq \vartheta(\vec{x}, t)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \bar{\psi}' (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi' = \bar{\psi} e^{-i\vartheta} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) e^{i\vartheta} \psi \\ &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = \mathcal{L} \end{aligned}$$

- Phase ϑ an jedem Punkt \vec{x} und zu jeder Zeit t fest vorgegeben.
- Was passiert wenn an jedem Punkt in (\vec{x}, t) eine andere Phase erlaubt ist?

Globale & Lokale Phasentransformationen

- Lagrangedichte kovariant unter **globalen & lokalen Phasentransformationen?**
(→ hier für Fermionen):

$$\psi(\vec{x}, t) \rightarrow \psi'(\vec{x}, t) = e^{i\vartheta} \psi(\vec{x}, t)$$

$$\bar{\psi}(\vec{x}, t) \rightarrow \bar{\psi}'(\vec{x}, t) = \bar{\psi}(\vec{x}, t) e^{-i\vartheta}$$

$$\vartheta = \vartheta(\vec{x}, t)$$

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi}' (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi' = \bar{\psi} e^{-i\vartheta} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) e^{i\vartheta} \psi$$

$$= \bar{\psi} (i\gamma^\mu (\partial_\mu + i\partial_\mu \vartheta) - m) \psi \neq \mathcal{L}$$

Ableitung verbindet
benachbarte Punkte
in (\vec{x}, t)

$$\partial_\mu \longrightarrow \frac{\psi(x+\Delta x) - \psi(x)}{\Delta x}$$

bricht Kovarianz

- Phase ϑ and jedem Punkt \vec{x} und zu jeder Zeit t fest vorgegeben.
- Was passiert wenn an jedem Punkt in (\vec{x}, t) eine andere Phase erlaubt ist?

Globale & Lokale Phasentransformationen

- Lagrangedichte kovariant unter **globalen & lokalen Phasentransformationen!**
(→ hier für Fermionen):

$$\begin{aligned}\psi(\vec{x}, t) &\rightarrow \psi'(\vec{x}, t) = e^{i\vartheta} \psi(\vec{x}, t) \\ \bar{\psi}(\vec{x}, t) &\rightarrow \bar{\psi}'(\vec{x}, t) = \bar{\psi}(\vec{x}, t) e^{-i\vartheta} \\ D_\mu &\rightarrow D'_\mu = D_\mu - i\partial_\mu \vartheta\end{aligned}$$

$$\vartheta = \vartheta(\vec{x}, t)$$

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu$$

(Kovariante Ableitung)

beliebiges Eichfeld

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' &= \bar{\psi}' (i\gamma^\mu D'_\mu - m) \psi' = \bar{\psi} e^{-i\vartheta} (i\gamma^\mu (D_\mu - i\partial_\mu \vartheta) - m) e^{i\vartheta} \psi \\ &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu (D_\mu - i\partial_\mu \vartheta + i\partial_\mu \vartheta) - m) \psi = \mathcal{L}\end{aligned}$$

- Transformationsverhalten des Eichfeldes



Globale & Lokale Phasentransformationen

- Lagrangedichte kovariant unter **globalen & lokalen Phasentransformationen**
(→ hier für Fermionen):

$$\begin{array}{l}
 \psi(\vec{x}, t) \rightarrow \psi'(\vec{x}, t) = e^{i\vartheta} \psi(\vec{x}, t) \\
 \bar{\psi}(\vec{x}, t) \rightarrow \bar{\psi}'(\vec{x}, t) = \bar{\psi}(\vec{x}, t) e^{-i\vartheta} \\
 D_\mu \rightarrow D'_\mu = D_\mu - i\partial_\mu \vartheta
 \end{array}
 \xrightarrow{\vartheta = \vartheta(\vec{x}, t)}
 \begin{array}{l}
 \partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \\
 \text{(Kovariante Ableitung)}
 \end{array}$$

beliebiges Eichfeld 

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}' &= \bar{\psi}' (i\gamma^\mu D'_\mu - m) \psi' = \bar{\psi} e^{-i\vartheta} (i\gamma^\mu (D_\mu - i\partial_\mu \vartheta) - m) e^{i\vartheta} \psi \\
 &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu (D_\mu - i\partial_\mu \vartheta + i\partial_\mu \vartheta) - m) \psi = \mathcal{L}
 \end{aligned}$$

- Transformationsverhalten des Eichfeldes

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \vartheta \longrightarrow \text{bekannt aus Elektrodynamik!}$$



Eichfelder

- Es ist möglich für das Feld $\psi(\vec{x}, t)$ eine beliebige Phase $\vartheta(\vec{x}, t)$ zu erlauben
- Erfordert Einführung eines vermittelnden Feldes A_μ , das diese Information von (\vec{x}, t) nach (\vec{x}', t') transportiert

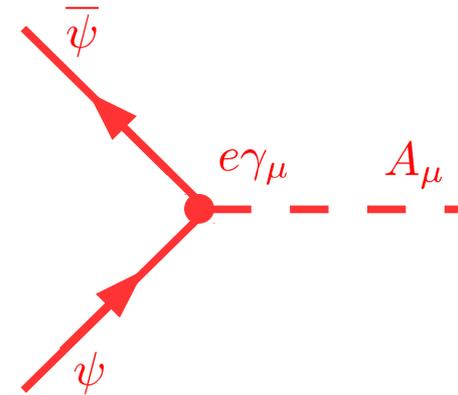
$$\begin{array}{ccccccc}
 \psi(\vec{x}, t) & & & & & & \psi(\vec{x}', t') \\
 \bullet & \text{---} & e & \text{---} & A_\mu & \text{---} & e & \text{---} & \bullet \\
 \vartheta(\vec{x}, t) & & & & & & \vartheta(\vec{x}', t') & &
 \end{array}$$

- Eichfeld A_μ koppelt an Größe e des Feldes $\psi(\vec{x}, t)$, die mit elektrischer Ladung identifiziert werden kann

Das wechselwirkende Fermion

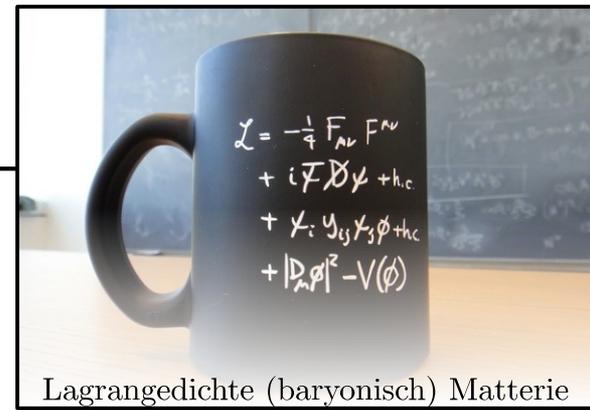
- Einführung der kovarianten Ableitung führt zu **Lagrangedichte für wechselwirkendes Fermion** mit Ladung e :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\text{IA}} &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu (D_\mu - m) \psi \\
 &= \underbrace{\bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi}_{\text{freies Fermionfeld}} - \underbrace{e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu \psi}_{\text{WW-Term}}
 \end{aligned}$$



- Anmerkung:** hier nicht diskutiert – dynamischer Term zur Beschreibung eines “frei” propagierenden Eich(=Photon)feldes

Das Standardmodell der Teilchenphysik



	Fermions			Bosons	
Quarks	u up	c charm	t top	γ photon	Force carriers
	d down	s strange	b bottom	Z Z boson	
Leptons	ν_e electron neutrino	ν_μ muon neutrino	ν_τ tau neutrino	W W boson	
	e electron	μ muon	τ tau	g gluon	
	spin-1/2			Higgs boson	

Source: AAAS

Beschreibung der ursprünglichen Struktur der uns umgebenden Natur.

$$U(1)_Y \times SU(2)_L \times SU(3)_c$$

1d Drehungen

2d Drehungen

3d Drehungen

$\psi e^{i\vartheta'}$

γ
photon

Elektromagnetismus

$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L e^{it_a \vartheta_a}$

W^\pm
W boson

Z
Z boson

Schwache Kraft

$\begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix}_c e^{iT_a \vartheta_a}$

g
gluon

Starke Kraft

- Bezieht Erklärungs-/Vorhersagekraft aus Anwendung von Symmetrien!
- Kräfte ↔ masselose Vermittlerteilchen.

Für ein backup zu kontinuierlichen Symmetrietransformationen siehe [Vorlesung 15](#) aus dem SS'17

– siehe [Blatt-08](#) –

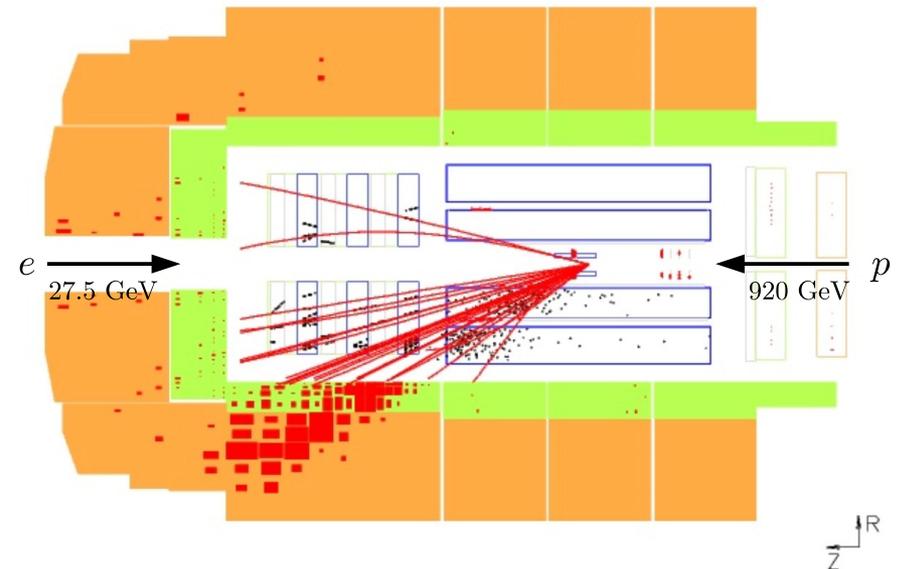
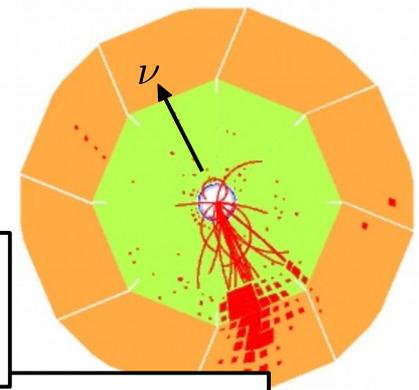
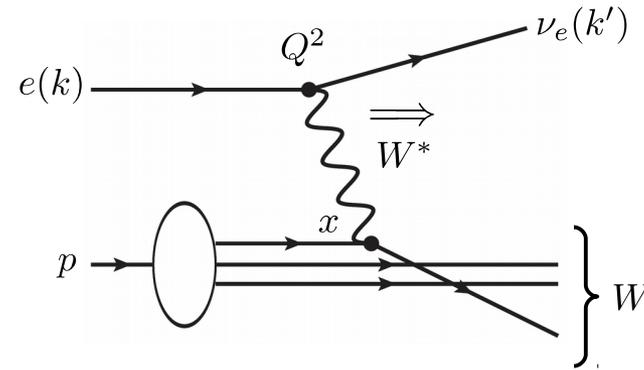
Erinnerung: Schlüsseleigenschaften der schwachen Wechselwirkung



Ladungsändernd

- Austausch eines W^+ - oder W^- -Bosons
- Ladungsverändernder Austausch
- Bezeichnung als geladener Strom (engl. charged current)
- Klare Signatur z.B. in tiefinelastischer Streuung

Geladener Strom
(CC, charged current)

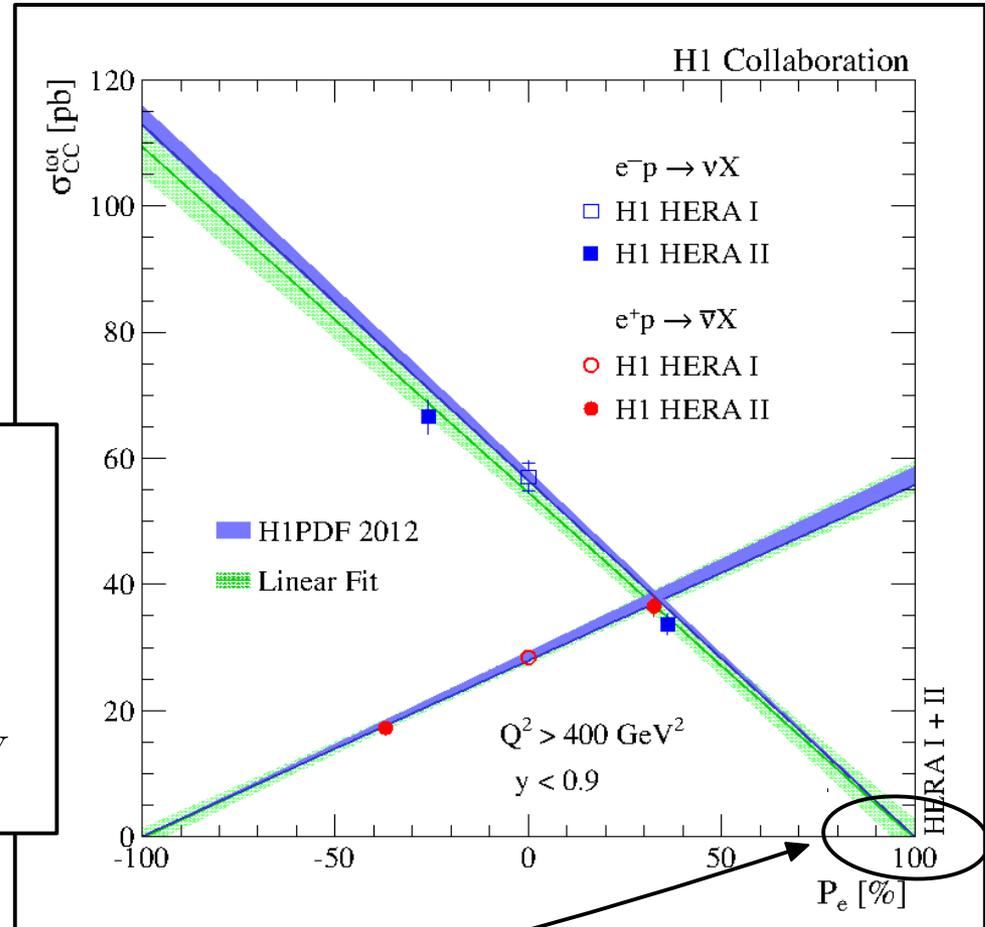
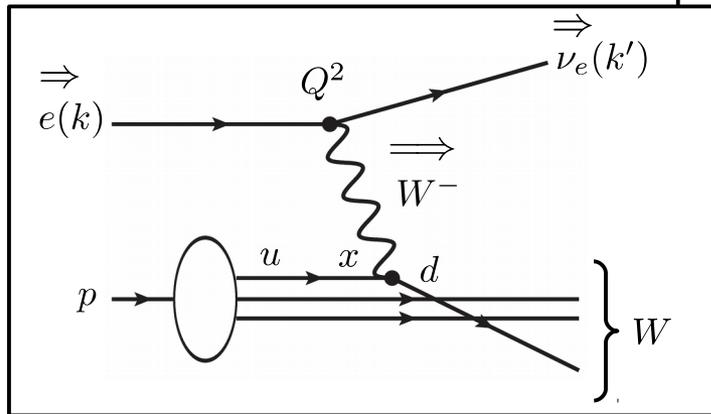


Maximal paritätsverletzend

- W -Boson koppelt nur an **linkshändige Fermionen und rechtshändige Antifermionen**

→ Geladener Strom ist maximal paritätsverletzend

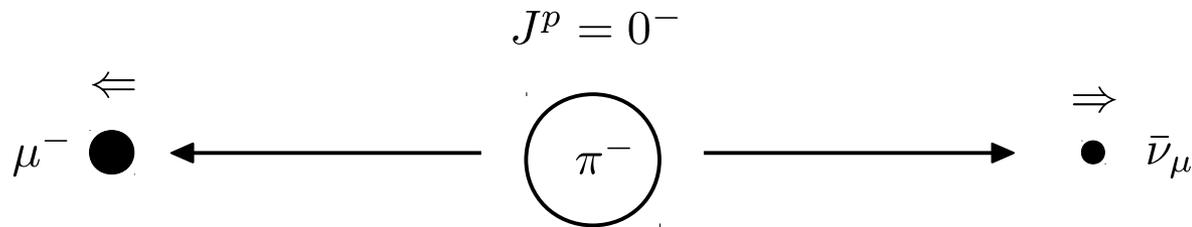
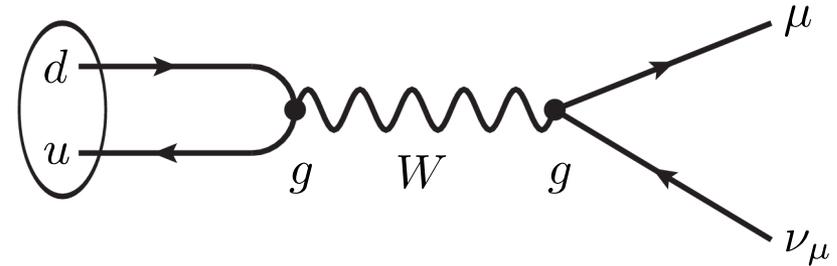
Bsp.: rechtshändiges Elektron



Erinnerung: Paritätsverletzung im Zerfall des Pions

- **Tatsächlich beobachtetes Verhältnis:**

$$\frac{\Gamma(\pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e)}{\Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu)} = 1.2344(30) \cdot 10^{-4}$$



Rechtshändiges Myon
($\rightarrow W^-$ koppelt nicht an
rechthändiges μ^-)

Rechtshändiges
Antineutrino ✓

Theorie der elektroschwachen WW

- Maximale Paritätsverletzung → nur linkshändige Teilchen und rechtshändige Antiteilchen nehmen an schwacher Wechselwirkung (WW) teil
- **Eigentliche Zustände** der schwachen WW: Links- und rechtshändige Komponenten des Spinors

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi$$

(Lagrangedichte: freies Fermion)

Theorie der elektroschwachen WW

- Maximale Paritätsverletzung → nur linkshändige Teilchen und rechtshändige Antiteilchen nehmen an schwacher Wechselwirkung (WW) teil
- **Eigentliche Zustände** der schwachen WW: Links- und rechtshändige Komponenten des Spinors

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi$$



$$\mathcal{L} = \overline{(\psi_L + \psi_R)} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) (\psi_L + \psi_R)$$

(Lagrangedichte: freies Fermion)

- **Zerlegung des Spinors** in links- und rechtshändige Anteile:

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R \quad \begin{cases} \bar{\psi}_L = \bar{\psi} \left(\frac{1+\gamma^5}{2} \right) \\ \bar{\psi}_R = \bar{\psi} \left(\frac{1-\gamma^5}{2} \right) \end{cases}$$

$$\psi = \psi_L + \psi_R \quad \begin{cases} \psi_L = \left(\frac{1-\gamma^5}{2} \right) \psi \\ \psi_R = \left(\frac{1+\gamma^5}{2} \right) \psi \end{cases}$$

Eigenschaften der γ^5 -Matrix

In Dirac-Darstellung:

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ 1_2 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Grundeigenschaften:**

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \quad (\gamma^5)^2 = 1_4 \quad (\gamma^5)^\dagger = \gamma^5$$

- **Abgeleitete Eigenschaften des Projektionsoperators:**

$$\left(\frac{1 \pm \gamma^5}{2} \right) \cdot \left(\frac{1 \pm \gamma^5}{2} \right) = \left(\frac{1 \pm \gamma^5}{2} \right)$$

$$\left(\frac{1 \pm \gamma^5}{2} \right) \cdot \left(\frac{1 \mp \gamma^5}{2} \right) = 0$$

Überzeugen Sie sich von der Richtigkeit beider Relationen



Eigenschaften der γ^5 -Matrix

In Dirac-Darstellung:

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ 1_2 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Grundeigenschaften:**

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \quad (\gamma^5)^2 = 1_4 \quad (\gamma^5)^\dagger = \gamma^5$$

- **Abgeleitete Eigenschaften des Projektionsoperators:**

$$\left(\frac{1 \pm \gamma^5}{2} \right) \cdot \left(\frac{1 \pm \gamma^5}{2} \right) = \left(\frac{1 \pm \gamma^5}{2} \right)$$

$$\left(\frac{1 \pm \gamma^5}{2} \right) \cdot \left(\frac{1 \mp \gamma^5}{2} \right) = 0$$

Überzeugen Sie sich von der Richtigkeit beider Relationen



- Es genügt also **linkshändige Anteile** wie folgt auszuprojizieren:

$$i\bar{e}\gamma^\mu \partial_\mu \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right) \nu =$$

Beweis

=

$$= i\bar{e}_L \gamma^\mu \partial_\mu \nu_L$$

Eigenschaften der γ^5 -Matrix

In Dirac-Darstellung:

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ 1_2 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Grundeigenschaften:**

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \quad (\gamma^5)^2 = 1_4 \quad (\gamma^5)^\dagger = \gamma^5$$

- **Abgeleitete Eigenschaften des Projektionsoperators:**

$$\left(\frac{1 \pm \gamma^5}{2}\right) \cdot \left(\frac{1 \pm \gamma^5}{2}\right) = \left(\frac{1 \pm \gamma^5}{2}\right)$$

$$\left(\frac{1 \pm \gamma^5}{2}\right) \cdot \left(\frac{1 \mp \gamma^5}{2}\right) = 0$$

Überzeugen Sie sich von der Richtigkeit beider Relationen

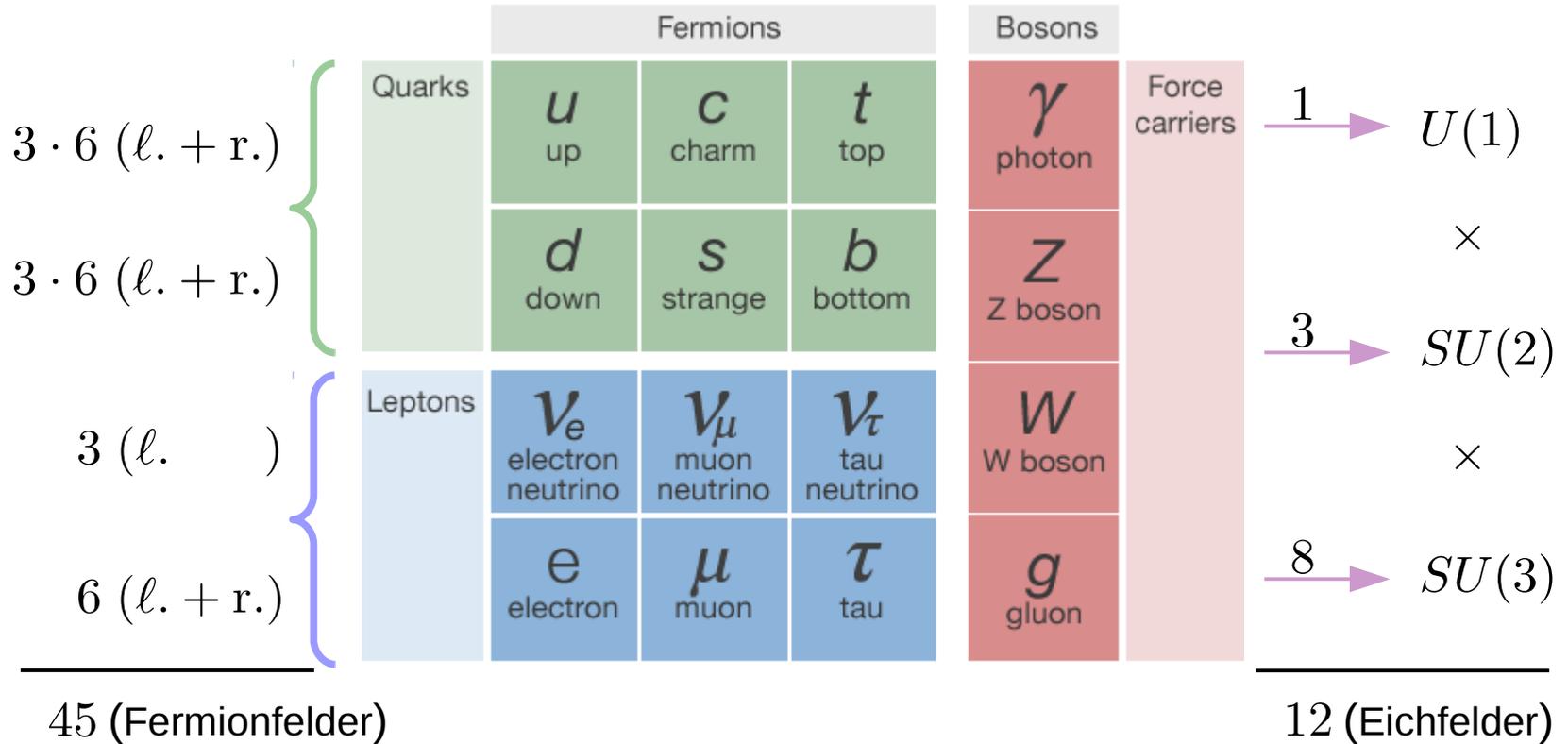


- Es genügt also **linkshändige Anteile** wie folgt auszuprojizieren:

$$\begin{aligned} i\bar{e}\gamma^\mu\partial_\mu\left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)\nu &= i\bar{e}\gamma^\mu\partial_\mu\left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)^2\nu = i\bar{e}\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)\gamma^\mu\partial_\mu\left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)\nu \\ &= i\overline{\left(\left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)e\right)}\gamma^\mu\partial_\mu\left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)\nu \\ &= i\bar{e}_L\gamma^\mu\partial_\mu\nu_L \end{aligned}$$

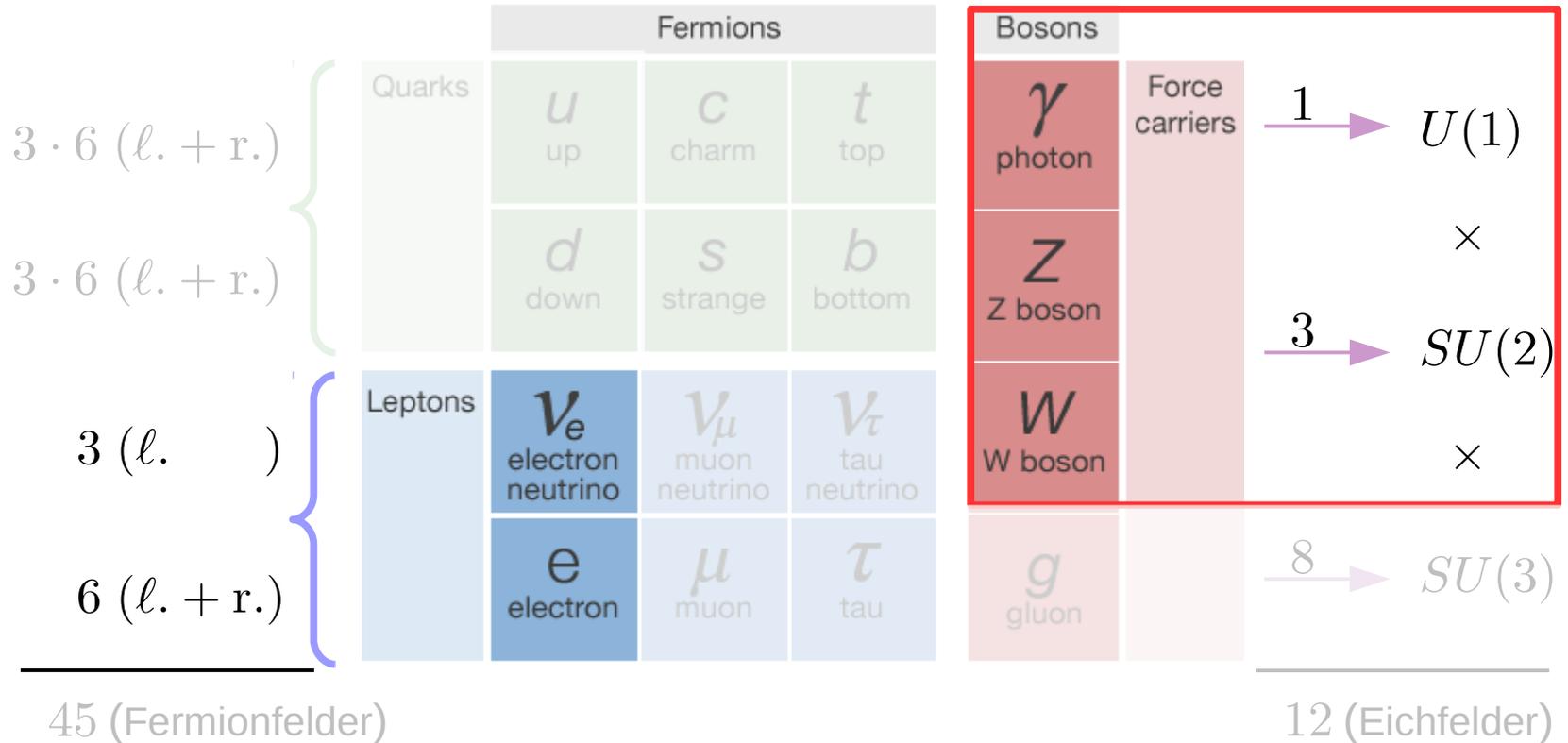
Das SM der Teilchenphysik

- 18 freie Parameter



Das SM der Teilchenphysik (EWK Sektor)

- 18 freie Parameter



Gliederung der Vorlesung



Vorlesung:	Vorlesungstag:	Übungsblatt:
VL-01 Einheiten, Relativistische Kinematik	Di 17.04.2018	-
VL-02 Teilchenstreuung	Do 19.04.2018	-
VL-03 Wirkungsquerschnitt	Di 24.04.2018	Blatt-01
VL-04 Teilchenbeschleunigung	Do 26.04.2018	-
Vorlesung fällt aus	Di 01.05.2018	Blatt-02
VL-05 Teilchennachweis durch Ionisation	Do 03.05.2018	-
VL-06 Elektromag. WW und Schauer	Di 08.05.2018	Blatt-03
Vorlesung fällt aus	Do 10.05.2018	-
VL-07 Detektoren der Teilchenphysik	Di 15.05.2018	Blatt-04
VL-08 Symmetrien und Erhaltungsätze	Do 17.05.2018	-
VL-09 Fundamentale Teilchen und Kräfte im SM	Di 22.05.2018	Blatt-05
VL-10 Diskrete Symmetrien des SM	Do 24.05.2018	-
VL-11 Teilchenzoo: vom Hadron zum Quark	Di 29.05.2018	Blatt-06
Vorlesung fällt aus	Do 31.05.2018	-
VL-12 Farbladung und QCD	Di 05.06.2018	Blatt-07
VL-13 Phänomenologie der schwachen WW	Do 07.06.2018	-
VL-14 Theorie der elektroschwachen WW	Di 12.06.2018	Blatt-08
VL-15 Higgs Mechanismus	Do 14.06.2018	-
VL-16 SM: Quarksektor	Di 19.06.2018	Blatt-09
VL-17 Top: Entdeckung und Eigenschaften	Do 21.06.2018	-
VL-18 Higgs: Entdeckung und Eigenschaften	Di 26.06.2018	-
VL-19 Neutrino-Physik	Do 28.06.2018	-

Properties of $\vec{\alpha}$ and β

- Operators $\vec{\alpha}$ and β can be **expressed by matrices**:

Must be **hermitian**: \hat{H}_0 should have real *eigenvalues*.

Properties of $\vec{\alpha}$ and β

- Operators $\vec{\alpha}$ and β can be **expressed by matrices**:

Must be **hermitian**: \hat{H}_0 should have real *eigenvalues*.

Must be **traceless**:

$$\begin{array}{c}
 \text{II} \\
 \uparrow \\
 \boxed{Tr(\alpha_i) = Tr(\alpha_i \beta \beta) = Tr(\beta \alpha_i \beta) = -Tr(\beta \beta \alpha_i) = -Tr(\alpha_i) = 0} \\
 \begin{array}{cc}
 \downarrow & \downarrow \\
 \text{cyclic} & \text{anti-commutator} \\
 \text{permutation} & \text{relation}
 \end{array}
 \end{array}$$

Properties of $\vec{\alpha}$ and β

- Operators $\vec{\alpha}$ and β can be **expressed by matrices**:

Must have **at least dim=4**:

- $\alpha_i^2 = \mathbb{I} \rightarrow$ has only eigenvectors ± 1 .
- $\beta^2 = \mathbb{I} \rightarrow$ has only eigenvectors ± 1 .
- Dimension must be even to obtain 0 trace.
- $\mathbb{I} +$ Pauli matrices (\mathbb{I}, σ_i) form a basis of the space of 2×2 matrices. But \mathbb{I} is not traceless (\rightarrow no chance to obtain four independent(!) traceless matrices).
- Simplest representation must at least have dim=4 (can be higher dimensional though).

Abelian gauge fields

$$\psi(\vec{x}, t) \rightarrow \psi'(\vec{x}, t) = e^{i\vartheta} \psi(\vec{x}, t)$$

$$\bar{\psi}(\vec{x}, t) \rightarrow \bar{\psi}'(\vec{x}, t) = \bar{\psi}(\vec{x}, t) e^{-i\vartheta}$$

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$$

$$D_\mu \rightarrow D'_\mu = D_\mu - i\partial_\mu \vartheta$$

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \vartheta$$

$$F_{\mu\nu} \equiv [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

→ (Field transformation)

→ (Covariant derivative)

→ (Field strength tensor)

→ (Lagrangian density)

Abelian gauge fields

$$\psi(\vec{x}, t) \rightarrow \psi'(\vec{x}, t) = e^{i\vartheta} \psi(\vec{x}, t)$$

$$\bar{\psi}(\vec{x}, t) \rightarrow \bar{\psi}'(\vec{x}, t) = \bar{\psi}(\vec{x}, t) e^{-i\vartheta}$$

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$$

$$D_\mu \rightarrow D'_\mu = D_\mu - i\partial_\mu \vartheta$$

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \vartheta$$

$$F_{\mu\nu} \equiv [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

Non-Abelian gauge fields

$$\psi(\vec{x}, t) \rightarrow \psi'(\vec{x}, t) = e^{i\vartheta_a \mathbf{t}_a} \psi(\vec{x}, t)$$

$$\bar{\psi}(\vec{x}, t) \rightarrow \bar{\psi}'(\vec{x}, t) = \bar{\psi}(\vec{x}, t) e^{-i\vartheta_a \mathbf{t}_a}$$

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + igW_{\mu,a} \mathbf{t}_a$$

$$D_\mu \rightarrow D'_\mu = D_\mu + i[\vartheta_a \mathbf{t}_a, D_\mu]$$

$$W_\mu \rightarrow W'_\mu = W_\mu + i[\vartheta_a \mathbf{t}_a, W_{\mu,a} \mathbf{t}_a]$$

$$- \frac{1}{g} \partial_\mu (\vartheta_a \mathbf{t}_a)$$

$$W_{\mu\nu} \equiv [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu$$

$$+ ig[W_\mu, W_\nu]$$

$$W_{\mu\nu} \rightarrow W'_{\mu\nu} = W_{\mu\nu} + i[\vartheta_a \mathbf{t}_a, W_{\mu\nu}]$$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi - \frac{1}{4} W_{a\mu\nu} W^{a\mu\nu}$$

- Ansatz:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

(Field-Strength tensor)

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

(Free photon field)

- Motivation:

- Variation of the action integral

$$\mathcal{S} = \delta \int (-m ds - e A_\mu dx^\mu)$$

in classical field theory, leads to

$$m \frac{dv_\mu}{ds} = e (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) v^\nu$$

- Can also be obtained from:

$$F_{\mu\nu} = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = \frac{i}{e} [D_\mu, D_\nu]$$

- $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ is manifest **Lorentz invariant**.

- A_μ appears quadratically \rightarrow linear appearance in variation that leads to equations of motion (\rightarrow **superposition of fields**).

- Check whether $F_{\mu\nu}$ is gauge invariant.

Complete Lagrangian density (QED)

- Application of $U(1)$ gauge symmetry leads to **Lagrangian density of QED**:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{QED}} &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu (D_\mu - m) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \\ &= \underbrace{\bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi}_{\text{Free Fermion Field}} - \underbrace{e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi}_{\text{IA Term}} - \underbrace{\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}_{\text{Gauge}}\end{aligned}$$

(Interacting Fermion)

- Variation of $\bar{\psi}$:

$$i\gamma^\mu (\partial_\mu - m) \psi + e\gamma^\mu A_\mu \psi = 0$$

- Derive equations of motion for an interacting boson.

Complete Lagrangian density (QED)

- Application of $U(1)$ gauge symmetry leads to **Lagrangian density of QED**:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\text{QED}} &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu (D_\mu - m)) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\
 &= \underbrace{\bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi}_{\text{Free Fermion Field}} - \underbrace{e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi}_{\text{IA Term}} - \underbrace{\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}_{\text{Gauge}}
 \end{aligned}$$

(Interacting Fermion)

- Variation of A_μ :

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

$$\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = (\partial_\mu \partial^\mu A_\mu - \partial^\nu \underbrace{\partial_\mu A^\mu}) = 0$$

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (\text{Lorentz Gauge})$$

$$(\partial_\mu \partial^\mu - 0) A_\mu = 0$$

(Klein-Gordon equation for a massless particle)

Complete Lagrangian density (QED)

- Application of $U(1)$ gauge symmetry leads to **Lagrangian density of QED**:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\text{QED}} &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu (D_\mu - m) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \\
 &= \underbrace{\bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi}_{\text{Free Fermion Field}} \underbrace{- e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi}_{\text{IA Term}} \underbrace{- \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}_{\text{Gauge}}
 \end{aligned}$$

(Interacting Fermion)

- Variation of A_μ :

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

$$\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = (\partial_\mu \partial^\mu A_\mu - \partial^\nu \underbrace{\partial_\mu A^\mu}_{=0}) = 0$$

$$(\partial_\mu \partial^\mu - 0) A_\mu = 0$$

$\partial_\mu A^\mu = 0$ (Lorentz)
 (Klein-Gordon equation for a massless scalar field)

In einer Abelschen Eichtheorie kann jedes neue Teilchen mit seiner eigenen Kopplungskonstante e_i an A_μ koppeln

In einer nicht-Abelschen Eichtheorie kommt die Kopplungskonstante g auch im dynamischen Term des Eichfeldes vor (s. backup Folie 37). Das legt g für alle an der WW teilnehmenden Fermionfelder fest (\rightarrow Leptonuniversalität).

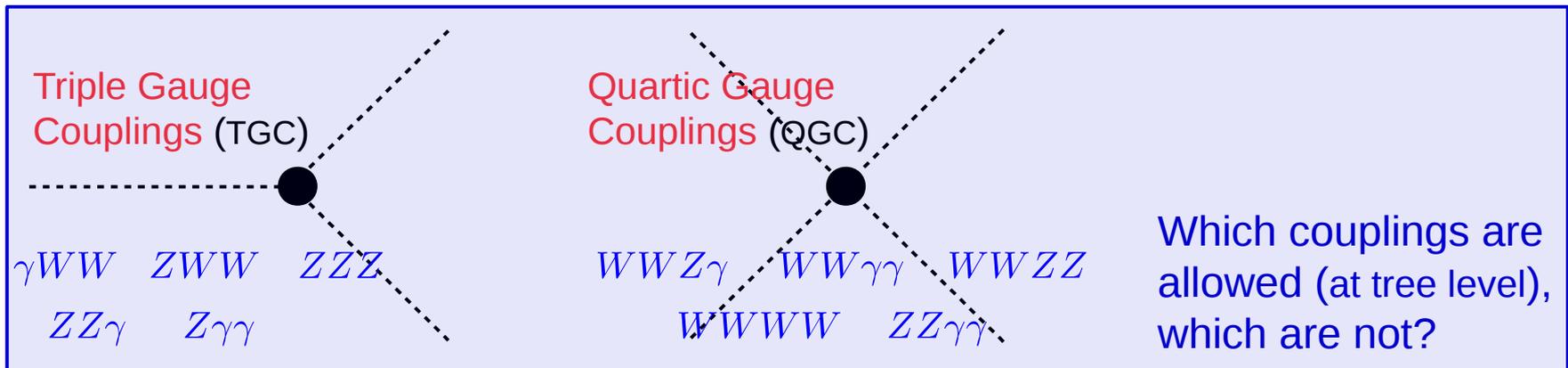
Non-Abelian gauge structure of $SU(2)$

$$\mathcal{L}^{\text{gauge}} = -\frac{1}{2} \text{Tr} (W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu}) - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \quad \left| \begin{array}{l} B_\mu \rightarrow A_\mu \\ W_\mu^3 \rightarrow Z_\mu \end{array} \right.$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$$

$$W_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + ig [W_\mu^a, W_\nu^a]$$

- This part of the Lagrangian density introduces:



Non-Abelian gauge structure of $SU(2)$

$$\mathcal{L}^{\text{gauge}} = -\frac{1}{2} \text{Tr} (W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu}) - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \quad \left| \begin{array}{l} B_\mu \rightarrow A_\mu \\ W_\mu^3 \rightarrow Z_\mu \end{array} \right.$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$$

$$W_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + ig [W_\mu^a, W_\nu^a]$$

- This part of the Lagrangian density introduces:

