Rechnernutzung in der Physik

Institut für Experimentelle Teilchenphysik
Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. M. Giffels, Dr. R. Wolf
Dr. A. Mildenberger

WS2015/16 – Blatt 12
`http://comp.physik.kit.edu` Prog.: Di., 26.01.2016 / Ausarb.: Fr., 29.01.2016

Verteilungsdichten und Bestimmung von π

Vorlagen zu diesem Blatt finden Sie in den Dateien `ex12_2.cc, ex12_2.py, ex12_3.cc`. Sie können die Aufgaben entweder als `ROOT`-Makro oder als `Python`-Skript lösen.

Aufgabe 23: Erwartungswerte und Varianzen — Ausarbeitung

1. Berechnen Sie Erwartungswert $E[x]$ und Varianz $V[x]$ für eine exponentiell verteilte Zufallsvariable x.

2. Berechnen Sie $E[x]$ und $V[x]$ für eine Zufallsvariable x, die im Intervall $[a, b]$ gleichverteilt ist. Die Zufallsvariable y ist gegeben durch $y = \sin(x)$. Bestimmen Sie die PDF $g(y)$ für $[a, b] = [-\pi, \pi]$.

3. Die Weibull-Verteilung wird in der Industrie häufig verwendet, um die Lebensdauer von Produkten zu charakterisieren. Die PDF der Weibull-Verteilung ist gegeben durch

$$f(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \alpha\beta^{-\alpha}x^{\alpha-1}\exp\left[-(x/\beta)^{\alpha}\right] & x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Berechnen Sie den Erwartungswert $E[x]$ für $f(x; \alpha, \beta)$.
   Hinweis: Die Gammafunktion is definiert als $\Gamma(x) = \int_0^\infty \mathrm{d}t\, t^{x-1}e^{-t}$.

   Nehmen Sie an, dass die Lebensdauer (in Stunden) einer Notstrombatterie durch eine Weibull-Verteilung mit $\alpha = 0.5$ und $\beta = 100$ beschrieben werden kann. Stellen Sie die Verteilung grafisch dar. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Batterie mehr als 300 Stunden hält?

Aufgabe 24: Buffonsches Nadelproblem — Programmtestat

In dieser Aufgabe soll die Zahl π mit zwei verschiedenen Methoden näherungsweise bestimmt werden.

Theoretischer Teil zur Ausarbeitung

Georges-Louis Leclerc Graf de Buffon (1707–1788) beschäftigte sich intensiv mit folgendem Problem: Man bereite eine Fläche vor, auf der parallel (infinitesimal dünne) Linien mit dem festen Abstand a gezeichnet seien. Nun werde eine Nadel (eine infinitesimal dünne Strecke) der Länge $l \leq a$ auf diese Fläche geworfen, wobei – mit genügend Abstand zum Rand der Fläche – die Position der Nadel und ihre Ausrichtung gleichverteilt seien.

Tun Sie es dem Grafen gleich und zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, mit der die Nadel eine der Linien berührt, gerade $P = \frac{2l}{a\pi}$ ist.

Praktischer Teil zum Programmtestat

Schreiben Sie ein Programm, das π mit Hilfe dieses Zusammenhangs berechnet. Erlauben Sie

dabei eine variable Länge der Nadel. Testen Sie empirisch, bei welcher Länge der Nadel die Konvergenz zu π mit besonders wenigen „Experimenten“ (d.h. Nadelwürfen) möglich ist.
Schreiben Sie ein weiteres Programm, das π mit Hilfe einer Methode bestimmt, die auf „Experimenten“ der folgenden Art beruht:

- Man erzeuge ein Paar gleichverteilter Zufallszahlen im Quadrat mit den Randpunkten $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$.
- Man teste für jedes Paar, ob es innerhalb des Einheitskreises liegt.

Die Zahl π kann nun berechnet werden, da der Erwartungswert für die Zahl der Treffer im Kreis gerade $\pi/4$ (Fläche des Kreises durch Fläche des Quadrats) ist. Testen Sie auch für diese Methode die Geschwindigkeit (gemessen in Experimenten) der Konvergenz.

Aufgabe 25: Maximum-Likelihood-Schätzung für Normalverteilungen freiwillig

Bei Normalverteilungen lassen sich die Maximum-Likelihood-Schätzwerte $\hat{\mu}$ und $\hat{\sigma}^2$ für die Parameter μ und σ^2 sowohl analytisch als auch numerisch bestimmen.

25.1: Analytische Lösung

Leiten Sie analytische Formeln her, um für eine gegebene Stichprobe von n Datenpunkten $x_1, \ldots, x_n$, die einer Normalverteilung $G(x_i; \mu, \sigma)$ folgen, die Maximum-Likelihood-Schätzwerte $\hat{\mu}$ und $\hat{\sigma}^2$ zu berechnen. Benutzen Sie dazu das Maximum-Likelihood-Prinzip. Berechnen Sie die Varianz des Schätzwerts $\hat{\mu}$.

25.2: Numerische Lösung

Schreiben Sie ein Programm, welches durch numerische Minimierung der negativen logarithmischen Likelihood-Funktion den Parameter μ schätzt. Testen Sie das Programm, indem Sie aus Gauß-verteilten Zufallszahlen mit μ- und σ^2-Werten Ihrer Wahl Stichproben der Größe $n = 20$ erzeugen.
Bestimmen Sie die Varianz des Schätzwerts $\hat{\mu}$ mit der grafischen Methode $(-\ln L(\hat{\mu}) + 1/2)$ und mittels parametrischem Bootstrapping ausgehend von den Schätzwerten $\hat{\mu}$ und $\hat{\sigma}^2$.
Hinweis: Sie können für die Lösung der Aufgabe auf das Programmtemplate `ex12_3.cc` zurückgreifen. Verwenden Sie zur numerischen Minimierung die Methode `TF1::GetMinimumX()`.

Hinweis: Mit dem Rechnernamen `fphctssh.physik.uni-karlsruhe.de` können Sie von überall aus mittels ssh/scp Programm per Netzwerk auf einen Poolrechner zugreifen.
