Karlsruhe Institute of Technology

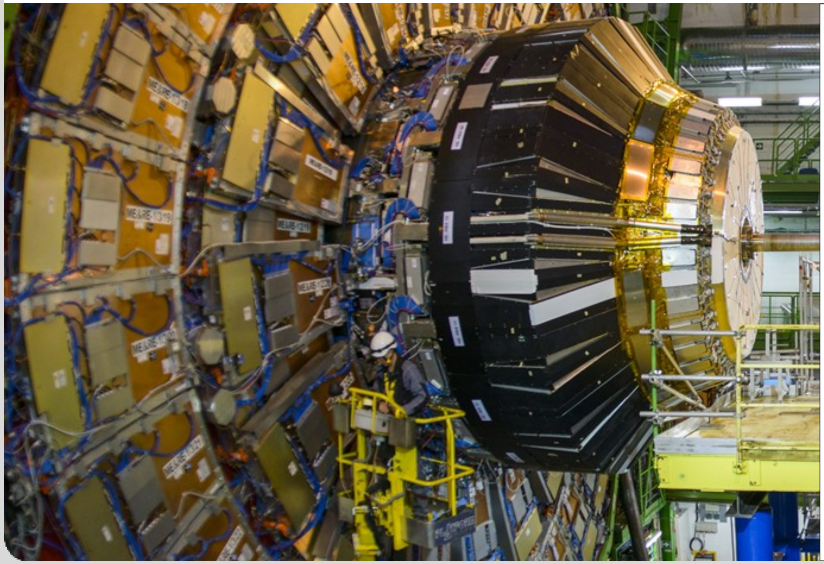
Rechnernutzung in der Physik

Teil 3 – Statistische Methoden in der Datenanalyse

Roger Wolf

15. Dezember 2015

INSTITUTE OF EXPERIMENTAL PARTICLE PHYSICS (IEKP) – PHYSICS FACULTY



- Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie, Werkzeuge zur statistischen Datenanalyse
- Gängige Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- Monte-Carlo Methoden
- Parameterschätzung
- Hypothesentests

Kapiel 3.1:

Grundlagen der Wahrscheinlichkeits-theorie

- Rolle der Statistik in der modernen Physik.
- Ergebnisraum, Ereignisraum, Wahrscheinlichkeitsverteilung.
- Bedingte Wahrscheinlichkeit, Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit, Unabhägigkeit zweier Ereignisse.
- Interpretation von (Zufalls-)Experimenten und stochastische Modelle.

Zusammenfassung

Kapiel 3.2:

Werkzeuge zur statistischen Datenanalyse

- ROOT: C++-Framework zur Datenanalyse:
  - Erste Schritte/Dokumentation.
  - (Software-)Modell zur Datenspeicherung (ROOT-Tree).
  - Darstellung von Daten: Graphen, Histogramme.
  - Funktionen und Anpassung von Funktionen.
  - ROOT-basierte weiterführende Analysepakete.
- Python Bibliotheken als Alternative zu ROOT.

Kapiel 3.3:

Charakterisierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Eine auf dem Ereignisraum $\mathfrak{P}(\Omega)$ definierte Funktion

$$\mathcal{P} : \mathfrak{P}(\Omega) \to \mathbb{R} \qquad ; \qquad A \to \mathcal{P}(A),$$

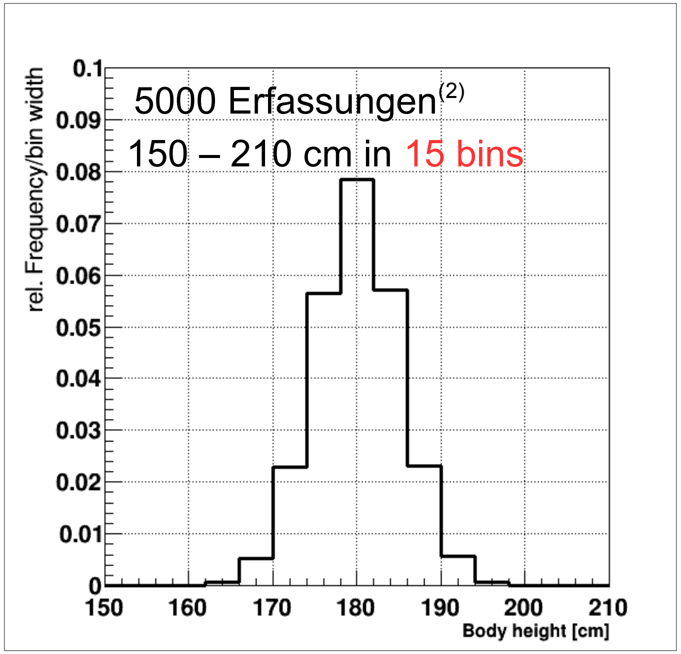
heißt **Wahrscheinlichkeitsverteilung über dem Ergebnisraum** Ω [(1)], wenn sie die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- Für jedes Ereignis $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$ gilt $\mathcal{P}(A) \geq 0$ (Nichtnegativität).
- Für die Wahrscheinlichkeit zweier disjunkter Ereignisse A und B ($A \cap B = \emptyset$) gilt: $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B)$ (Linearität).
- Die Wahrscheinlichkeit $\mathcal{P}(\mathfrak{P}(\Omega)) = 1$ (Normierungsbedingung).

(1)
Beachte: Interpretation der Wahrscheinlichkeitsverteilung!

Zufallsvariable & Wahrscheinlichkeitsdichte

- Für unsere weiteren Betrachtungen stellen Sie sich die Erfassung der Körpergröße x von 5000 männlichen Einwohnern über 18 Jahre in Karlsruhe vor.
- x ist eine (kontinuierlich verteilte) **Zufallsvariable**, deren Wert jeweils der Ergebnis eines Zufallsexperiments ist.
- Mit Hilfe der Methoden, die Sie in der letzten Vorlesung kennengelernt haben können sie die Meßreihe in Form von Histogrammen erfassen:



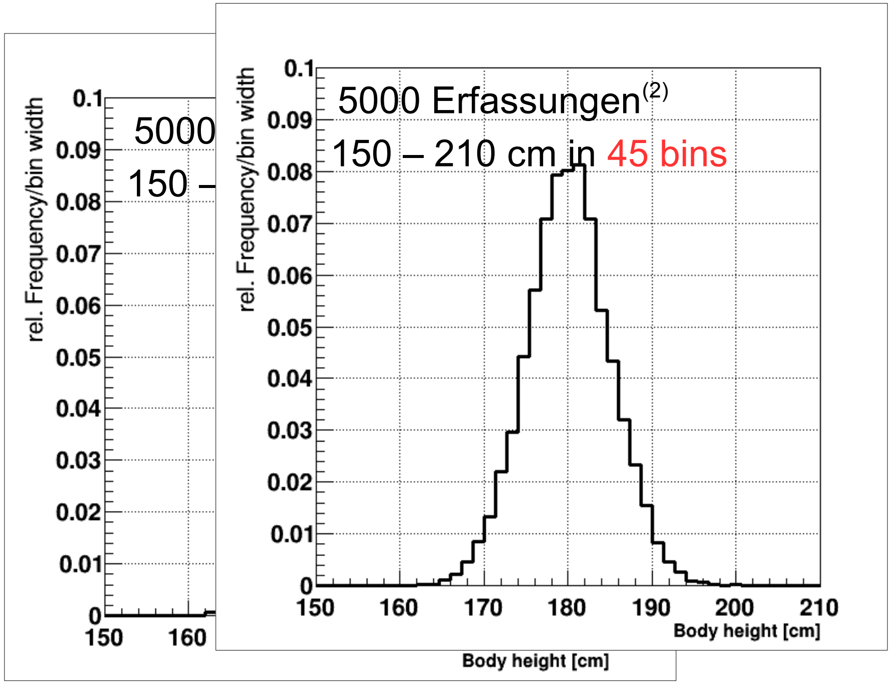
(2) Normiert auf 1 und geteilt durch die bin-Breite

Zufallsvariable & Wahrscheinlichkeitsdichte

- Für unsere weiteren Betrachtungen stellen Sie sich die Erfassung der Körpergröße x von 5000 männlichen Einwohnern über 18 Jahre in Karlsruhe vor.

- x ist eine (kontinuierlich verteilte) **Zufallsvariable**, deren Wert jeweils der Ergebnis eines Zufallsexperiments ist.

- Mit Hilfe der Methoden, die Sie in der letzten Vorlesung kennengelernt haben können sie die Meßreihe in Form von Histogrammen erfassen:



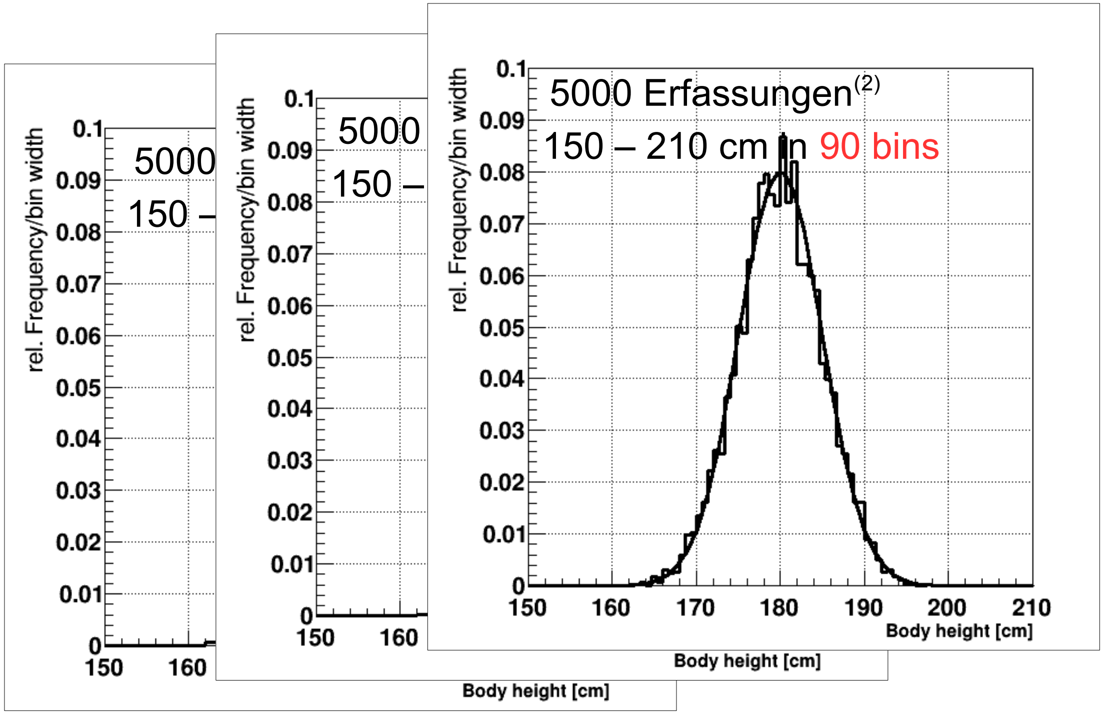
(2) Normiert auf 1 und geteilt durch die bin-Breite

Zufallsvariable & Wahrscheinlichkeitsdichte

- Für unsere weiteren Betrachtungen stellen Sie sich die Erfassung der Körpergröße x von 5000 männlichen Einwohnern über 18 Jahre in Karlsruhe vor.

- x ist eine (kontinuierlich verteilte) **Zufallsvariable**, deren Wert jeweils der Ergebnis eines Zufallsexperiments ist.

- Mit Hilfe der Methoden, die Sie in der letzten Vorlesung kennengelernt haben können sie die Meßreihe in Form von Histogrammen erfassen:



(2)
Normiert auf 1 und geteilt durch die bin-Breite

Zufallsvariable & Wahrscheinlichkeitsdichte

- Für unsere weiteren Betrachtungen stellen Sie sich die Erfassung der Körpergröße x von 5000 männlichen Einwohnern über 18 Jahre in Karlsruhe vor.

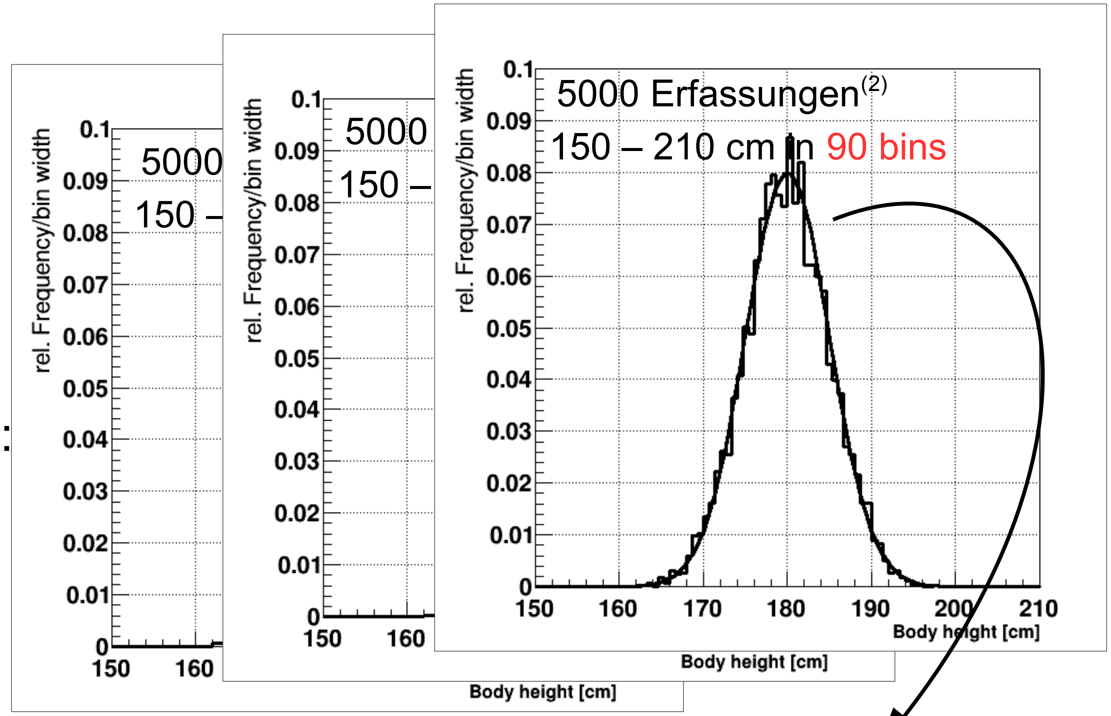
- x ist eine (kontinuierlich verteilte) **Zufallsvariable**, deren Wert jeweils der Ergebnis eines Zufallsexperiments ist.

- Mit Hilfe der Methoden, die Sie in der letzten Vorlesung kennengelernt haben können sie die Meßreihe in Form von Histogrammen erfassen:

- **Wahrscheinlichkeitsdichte**:

  $\text{Erfassung } (N)\text{: } N \to \infty$

  $\text{Bin Breite } (\Delta)\text{: } \Delta \to 0$



Wahrscheinlichkeitsdichte

(2) Normiert auf 1 und geteilt durch die bin-Breite

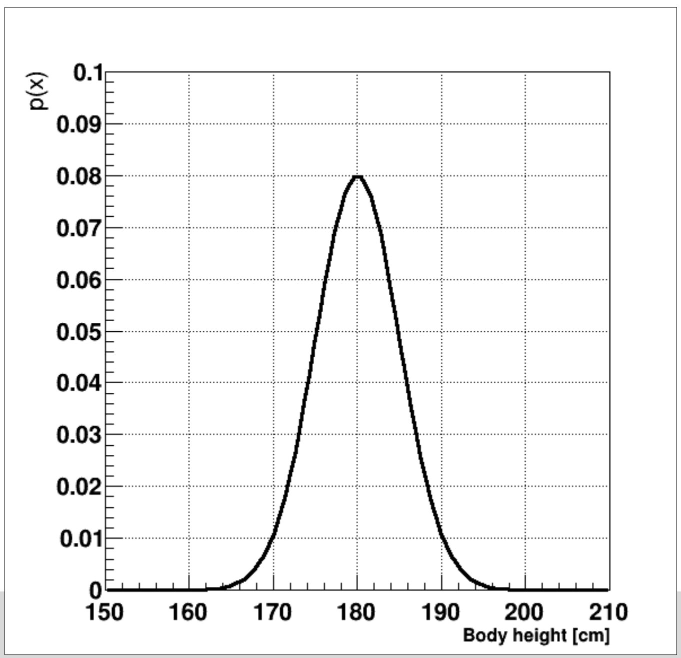
Wahrscheinlichkeitsdichte

Ist x eine kontinuierliche verteilte Zufallsvariable und die Wahrscheinlichkeits-verteilung $\mathcal{P}(x)$ über der Ergebnisraum Ω stetig in x differenzierbar dann bezeichnen wir:

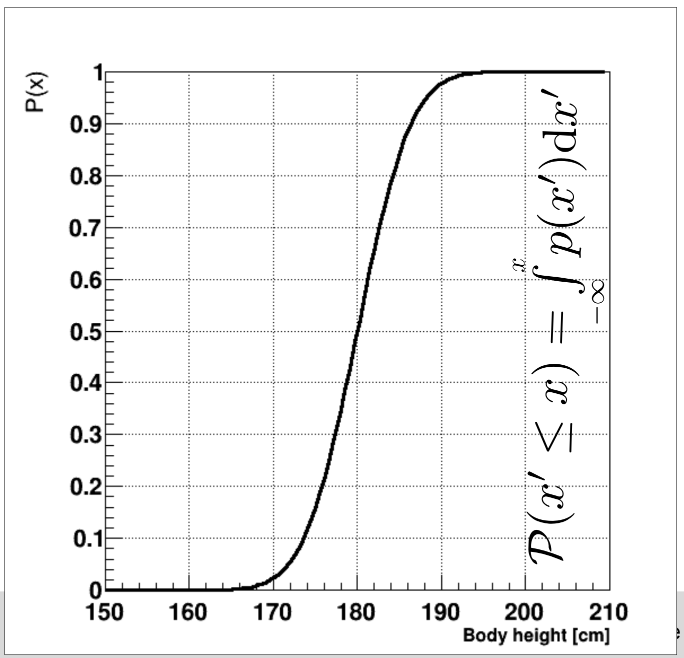
$$p(x) = \mathcal{P}'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathcal{P}$$

Als **Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion** von x.

Wahrscheinlichkeitsdichte



kumulative Wahrscheinlichkeitsdichte

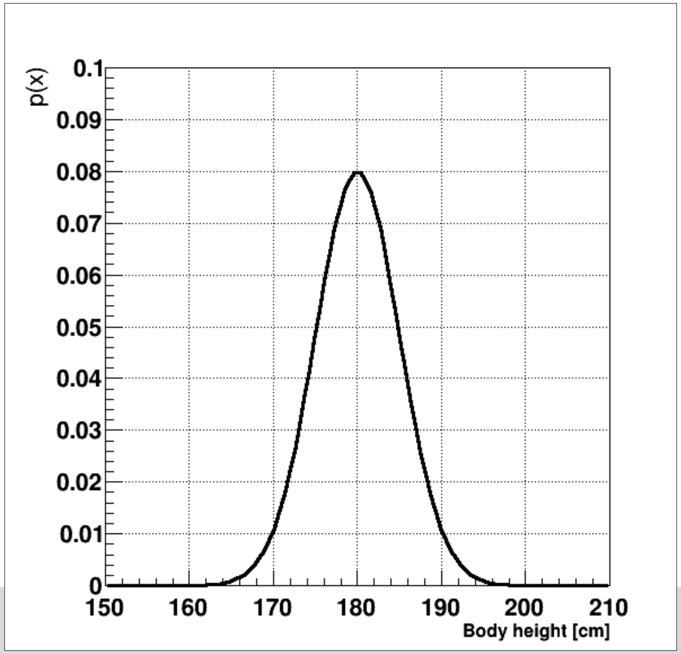


NB: $p(x) \neq \mathcal{P}(x)$

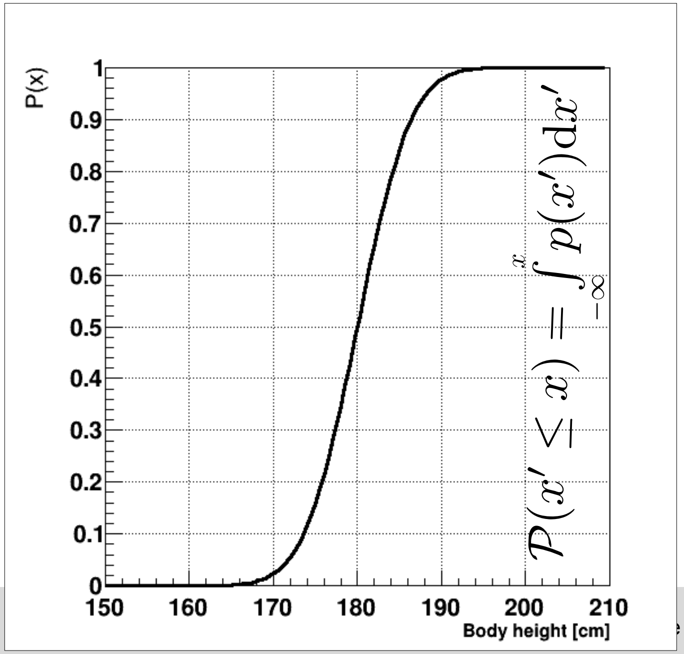
- **Beachten Sie:** die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $Körpergröße = 180 \pm 1\mathrm{cm}$ erhalten Sie nicht als $p(x)|_{x=180}$ sondern aus den Integral:

$$\int_{179}^{181} p(x')\mathrm{d}x' = \mathcal{P}(x' \leq 181) - \mathcal{P}(x' \leq 179)$$

Wahrscheinlichkeitsdichte



kumulative Wahrscheinlichkeitsdichte



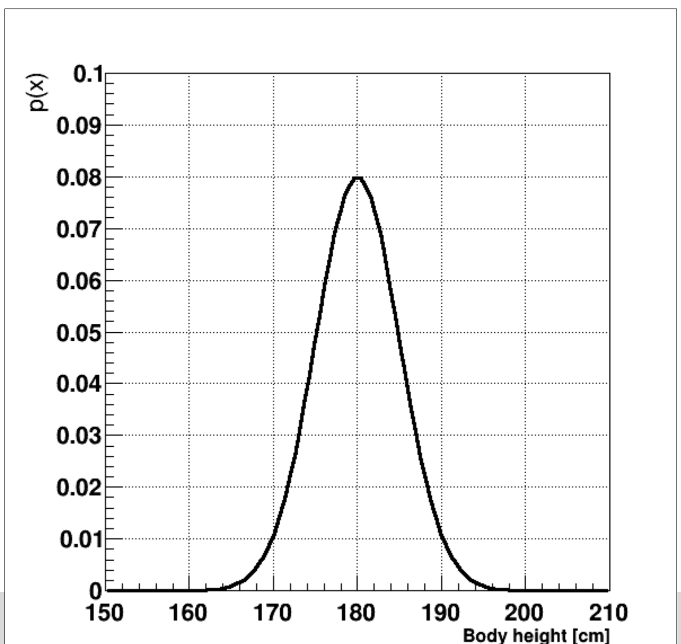
NB: $p(x) \neq \mathcal{P}(x)$

- **Beachten Sie:** die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $Körpergröße = 180 \pm 1\mathrm{cm}$ erhalten Sie nicht als $p(x)|_{x=180}$ sondern aus den Integral:

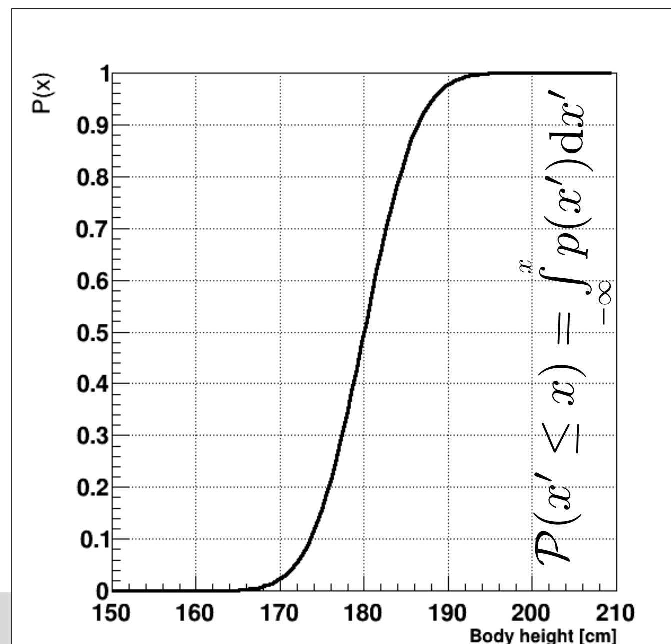
$$\int_{179}^{181} p(x')\mathrm{d}x' = \mathcal{P}(x' \leq 181) - \mathcal{P}(x' \leq 179)$$

NNB:
Wahrscheinlichkeitsdichten können kontinuierlich oder diskret verteilt sein. Im diskreten Fall ersetze jedes Integral durch eine Summe über den endlichen Ergebnisraum.

Wahrscheinlichkeitsdichte

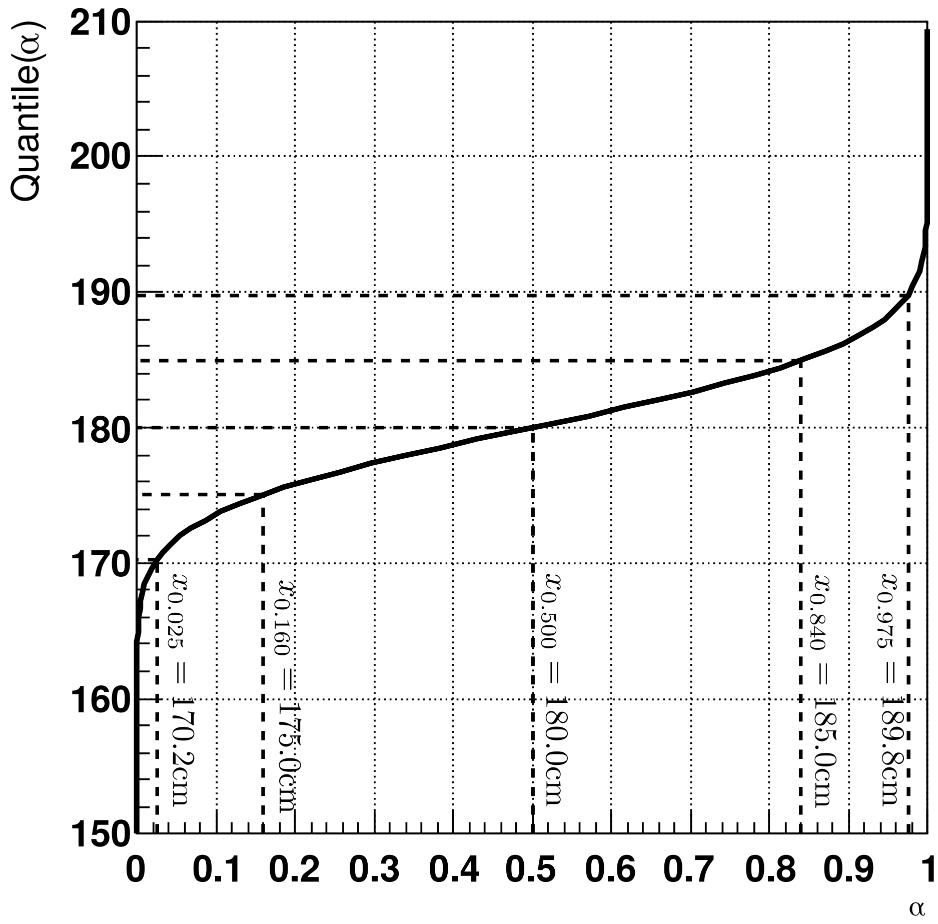


kumulative Wahrscheinlichkeitsdichte



Quantilen

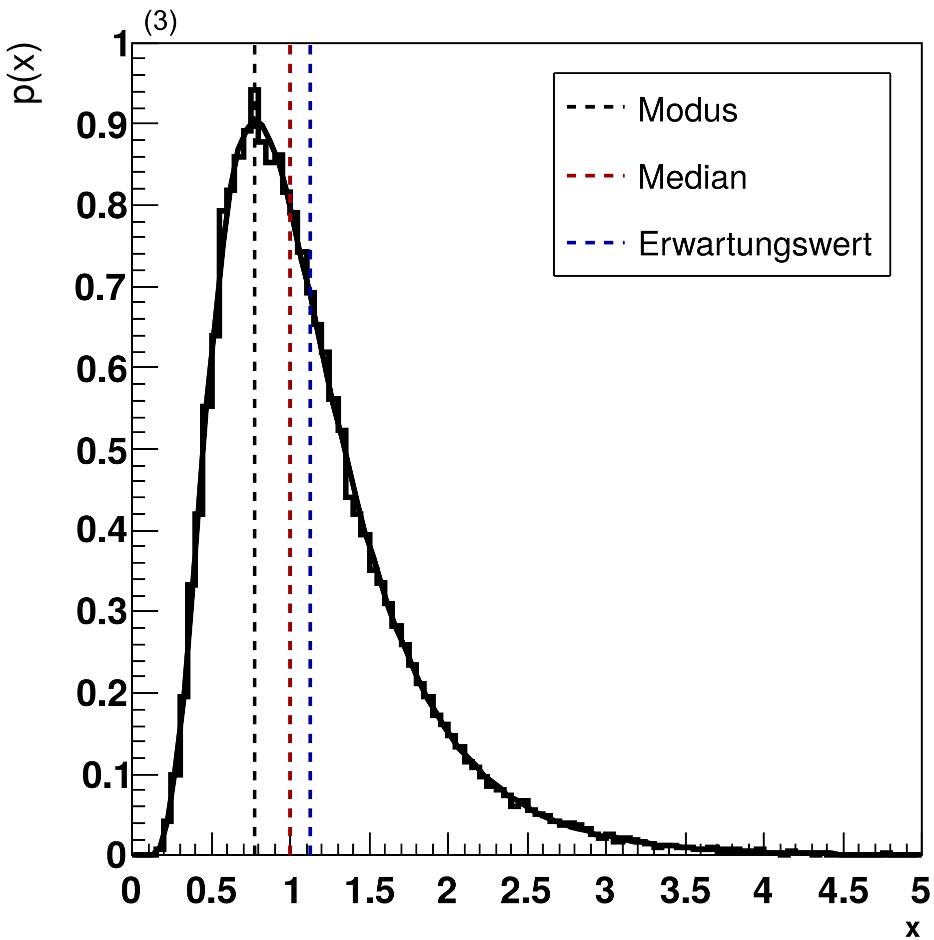
- Zur Charakterisierung der kumulativen Wahrscheinlichkeitsdichte:



- Quantil der Ordnung α (α-Punkt):
  $x_\alpha = \mathcal{P}^{-1}(x)\big|_{x=\alpha}$ (Umkehrfunktion von $\mathcal{P}$)
- Beispiele:
  - Median ($x_{1/2}$).
  - Rankings von Klausurergebnissen.
  - Hypothesen-Tests (z.B. auch in Qualitätskontrollen).

Lagemaß

- Charakterisierung der Wahrscheinlichkeitsdichte:



- Modus:
  Maximum der Verteilung (= wahrscheinlichster Wert) $\rightarrow$ einfach.

- Median ($x_{1/2}$):
  Gleich viele Werte, x_i, größer als auch kleiner als $x_{1/2}$ $\rightarrow$ robust.

- Erwartungswert ($E[x]$):
  Abgeschätzt durch das arithmetische Mittel.

- Das Beispiel auf der rechten Seite zeigt: diese drei Maße müssen nicht gleich sein.

(3)
Beispiel: Log-Normalverteilung (siehe Folie XY).

Erwartungswert

- Bekannteste Größe zur Charakterisierung der Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$\boxed{E[x] = \int_\Omega x \cdot p(x)\mathrm{d}x}$$ (kontinuierlich)

$$\boxed{E[x] = \sum_\Omega x_i \cdot p(x_i)}$$ (diskret)

- Bemerkungen:
  - $E[x]$ für eine vorgegebene Wahrscheinlichkeitsdichte (-verteilung) ist eine Zahl und keine Funktion von x (andere gänige Bezeichnungen auch: μ_x, $\langle x \rangle$).
  - Verallgemeinerung: Erwartungswert einer Funktion $a(x)$

    $$E[a(x)] = \int_\Omega a(x) \cdot p(x)\mathrm{d}x$$

  - Erwartungswert ist linear in x:

    $$E\left[\alpha\, a(x) + \beta\, b(x)\right] = \alpha E[a(x)] + \beta E[b(x)]$$

Algebraische Momente - Varianz

- Verallgemeinerung des Erwartungswertes: **n-tes (algebraisches) Moment** um x_0

$$\boxed{E[(x-x_0)^n]}$$

- Spezialfall: $x_0 = E[x]$
  - 0-tes Moment: $E[(x-E[x])^n]|_{n=0} = \int_\Omega p(x)\mathrm{d}x = 1$
  - 1-tes Moment: $E[(x-E[x])^n]|_{n=1} = \int_\Omega (x-E[x])p(x)\mathrm{d}x = 0$
  - 2-tes Moment: $E[(x-E[x])^n]|_{n=2} = \int_\Omega (x-E[x])^2 p(x)\mathrm{d}x$

$$= \underbrace{\int_\Omega x^2 p(x)\mathrm{d}x}_{E[x^2]} - \underbrace{2E[x]\int_\Omega x p(x)\mathrm{d}x}_{2E[x]^2} + \underbrace{E[x]^2 \int_\Omega p(x)\mathrm{d}x}_{E[x]^2}$$

$$E[(x-E[x])^n]|_{n=2} = E[x^2] - E[x]^2 = \mathrm{var}[x]$$ **(Varianz)**

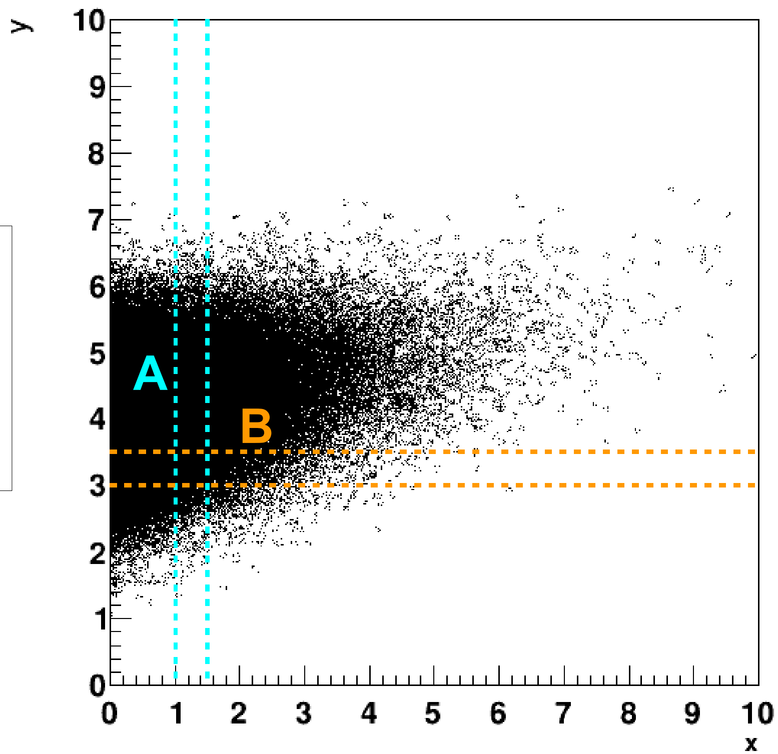
- $\sigma = \sqrt{\mathrm{var}[x]}$ heißt **Standardabweichung**.

Mehrdimensionale Verteilungen

- Der Ausgang einer Messung kann durch mehrere Zufallsgrößen charakterisiert sein (z.B. Körpergröße und Alter). In diesem Fall ist auch die Wahrscheinlichkeitsdichte mehrdimensional.

  - $A: \ x \in [x_0, x_0 + \mathrm{d}x]$

    $B: \ y \in [y_0, y_0 + \mathrm{d}y]$



(4)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1 \qquad \text{(Normierung)}$$

$$\mathcal{P}(x' \leq x, y' \leq y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p(x',y')\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \qquad \text{(kumulativ)}$$

$$\mathcal{P}(A \cap B) = p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \mathcal{P}(x' \leq (x_0 + dx), y' \leq (y_0 + dy))$$

$$-\mathcal{P}(x' \leq x_0, y' \leq (y_0 + \mathrm{d}y))$$

$$-\mathcal{P}(x' \leq (x_0 + \mathrm{d}x), y' \leq y_0)$$

$$+\mathcal{P}(x' \leq x_0, y' \leq y_0)$$

(4)
Für diskrete Verteilung ersetze Integrale durch Summen.

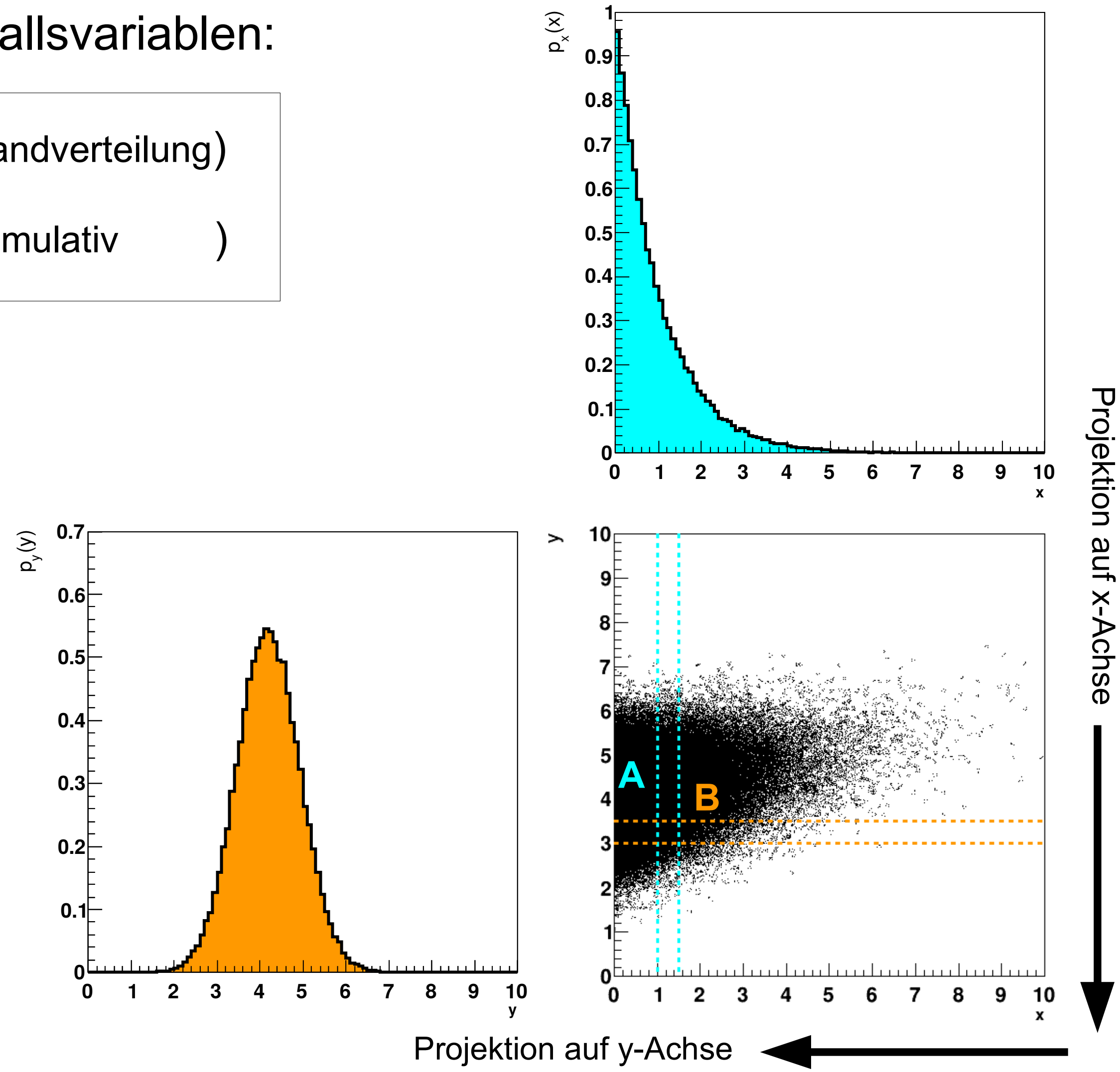
Randverteilungen

- **Ausintegrieren** einer der Zufallsvariablen:

$$p_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\mathrm{d}y \qquad \text{(Randverteilung)}$$

$$\mathcal{P}_x(x' \leq x) = \int_{-\infty}^{x} p_x(x')\mathrm{d}x' \qquad \text{(kumulativ} \qquad \text{)}$$

  - Im Englischen: *maringal distribution*.
  - Ausintegrieren von (manch-mal unbekannten) Zufalls-größen: **Marginalisierung**.
  - Dimension der Wahr-scheinlichkeitsdichte in typischen Problemen (z.B. der Teilchenphysik): $\mathcal{O}(10)$.



Bedingte Wahrscheinlichkeit (2d)

- Integration in einem Interval $[y_0, y_0 + dy]$:

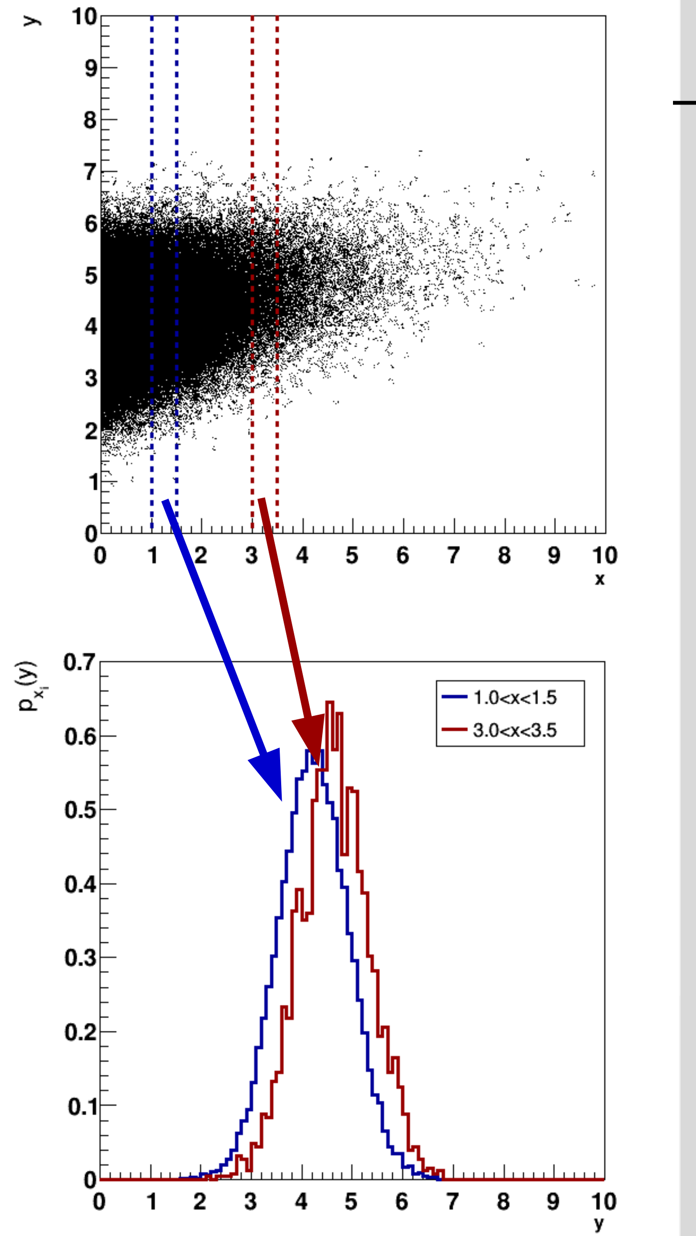
$$p(y|x) = \frac{p(x,y)}{p_x(x)} = \frac{p(x,y)}{\int_{\Omega_y} p(x',y)\mathrm{d}x'} \quad \text{(Bedingte W'dichte)}$$

$$\mathcal{P}(B|A) = \frac{p(x,y)dx\mathrm{d}y}{p_x(x)dx}$$

- Das Bsp rechts zeigt, daß sich für A und A' verschiedene Wahrscheinlichkeitsdichten ergeben können.

- Als Verallgemeinerung zum 1-dim Fall gilt für die Randverteilung:
$$p_y(y) = p(y|x)|_{x\in\mathfrak{P}(\Omega_x)}$$

- Sind die zwei Zufallsvariablen x und y **unabhängig**, dann gilt für die Wahrscheinlichkeitsdichte:
$$p(x,y) = p_x(x) \cdot p_y(y)$$



Kovarianz

Karlsruhe Institute of Technology

- Zur Beschreibung der Beziehung zweier Variablen zueinander führen wir die **Kovarianz** analog zur Varianz ein:

$$\mathrm{var}[x] = E[(x-E[x])\cdot(x-E[x])] = E[x^2]-E[x]^2 \qquad \text{(Varianz)}$$

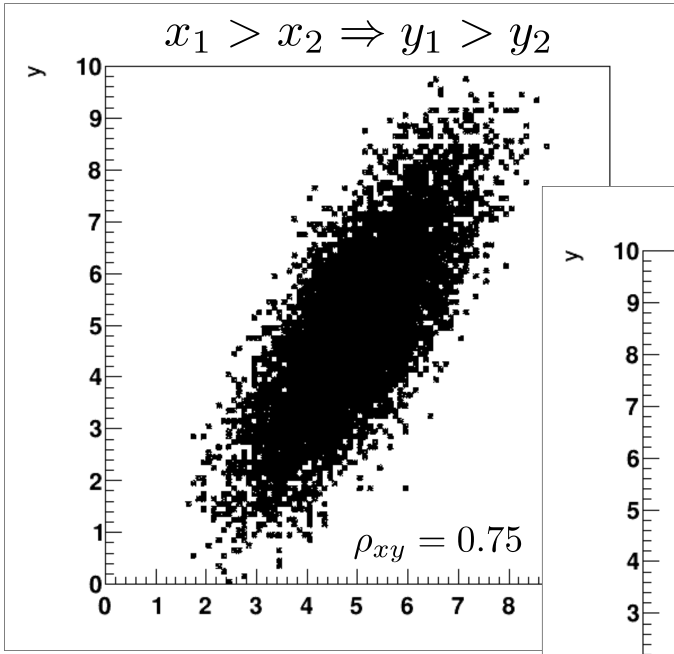
$$\mathrm{cov}[x,y] = E[(x-E[x])\cdot(y-E[y])] = E[xy]-E[x]E[y] \qquad \text{(Kovarianz)}$$

- Bemerkungen:
  - $V_{xy} = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$ heißt **Kovarianzmatrix**.
  - V_{xy} is symmetrisch (d.h. es gibt immer eine Hauptachsentransformation).
  - $\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$ heißt **Korrelationskoeffizient**.
  - ρ_{xy} nimmt Werte in $[-1,+1]$ an. Für unabhängige Zufallsvariablen gilt: $E[xy]=E[x]E[y]$ (5) also $\rho_{xy}=0$.

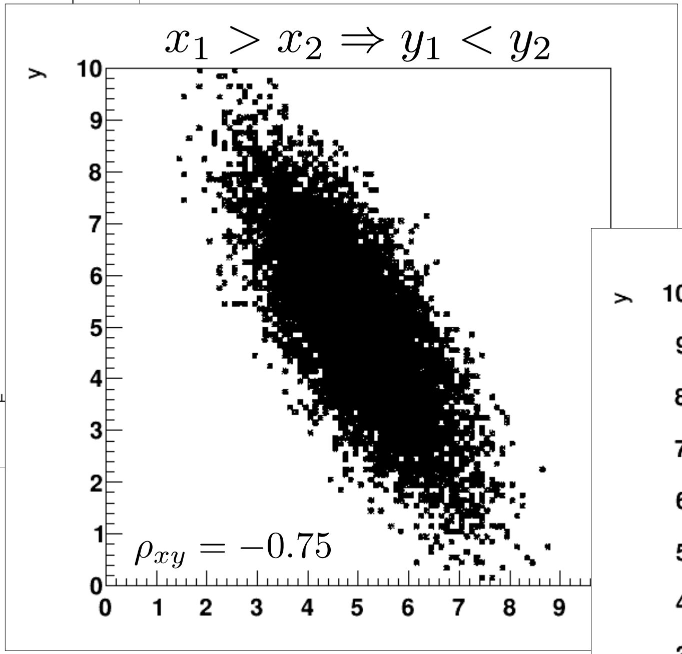
(5) Siehe letzte Anmerkung der voherigen Folie.

Korrelation (anschaulich)

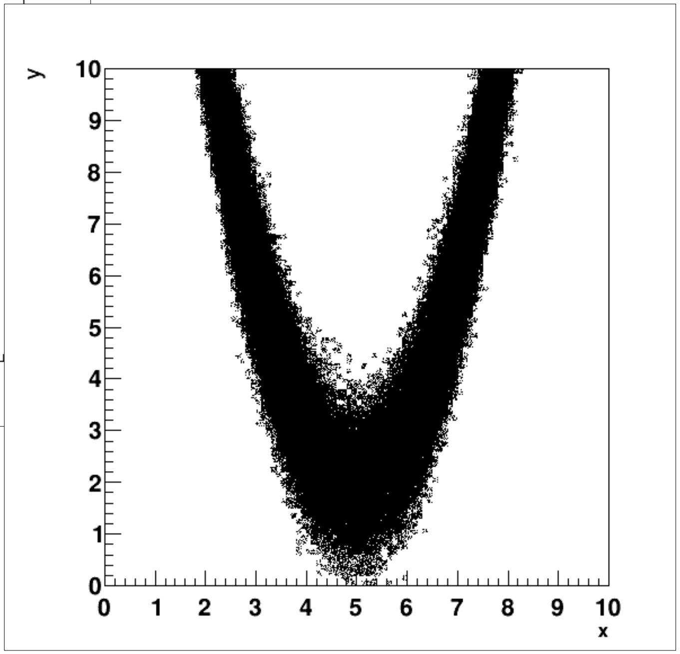
Positive Korrelation:



Negative Korrelation:

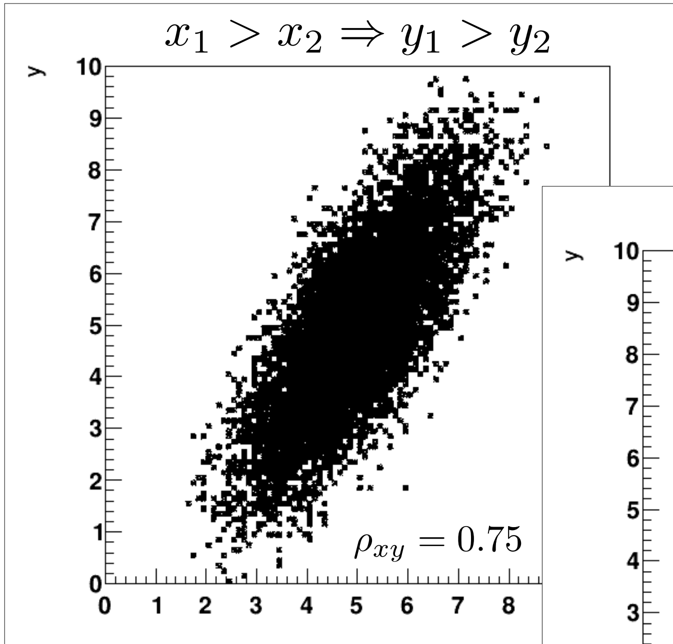


Welche Korrelation?

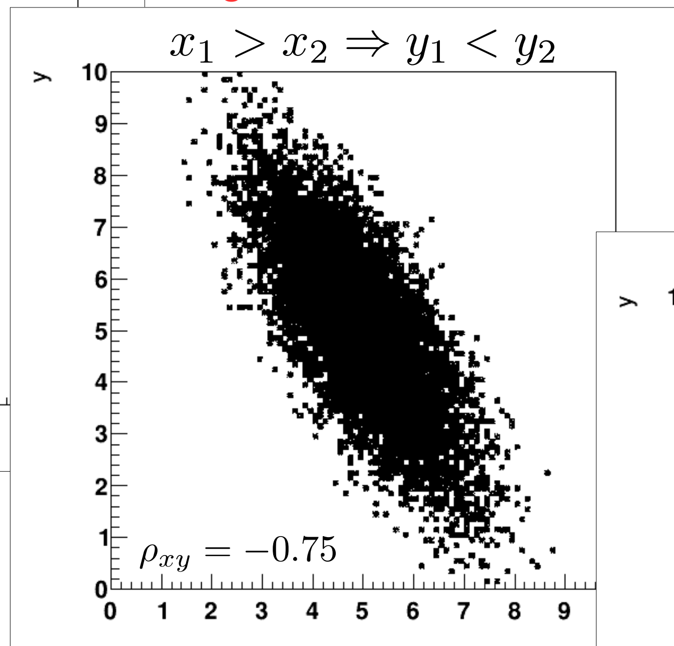


Korrelation (anschaulich)

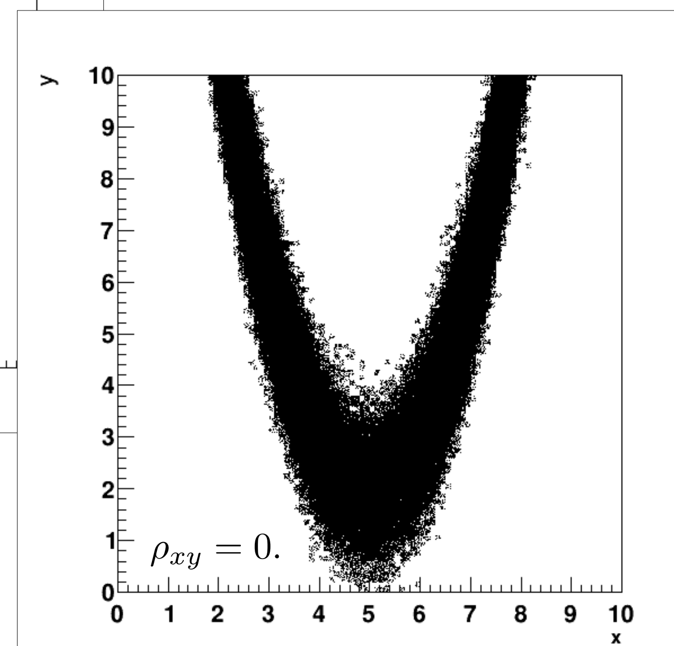
Positive Korrelation:



Negative Korrelation:



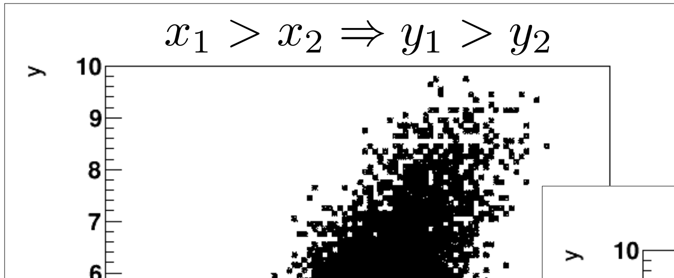
Keine Korrelation![6]



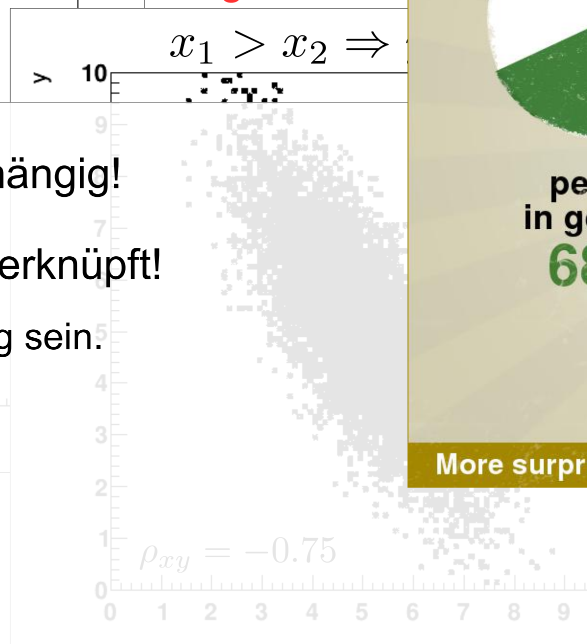
(6)
Analog zum Erwartungwert (siehe Tafelbild...).

Korrelation (anschaulich)

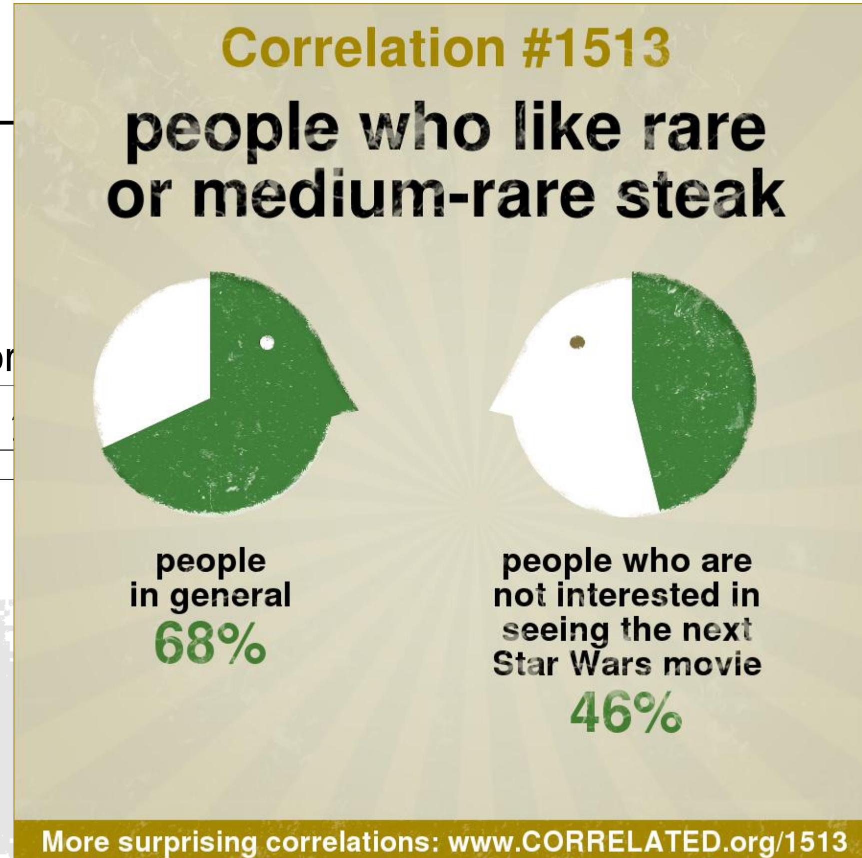
Positive Korrelation:

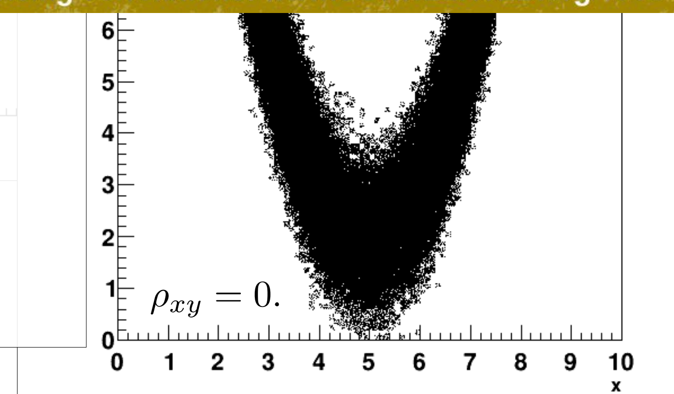


Negative Kor



- Unkorreliert $\not\Leftrightarrow$ unabhängig!
- Korreliert $\not\Leftrightarrow$ kausal verknüpft!
  - Korrelation kann zufällig sein.
  - $x \Rightarrow y$ möglich.
  - $y \Rightarrow x$ möglich.
  - $z \Rightarrow (x, y)$ möglich.





Funktionen von Zufallsvariablen

- Nehmen Sie an die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x)$ für die Zufallsvariable x sei bekannt. Wie sieht die Wahrscheinlichkeitsdichte $q(a)$ für eine Funktion $a(x)$ aus?

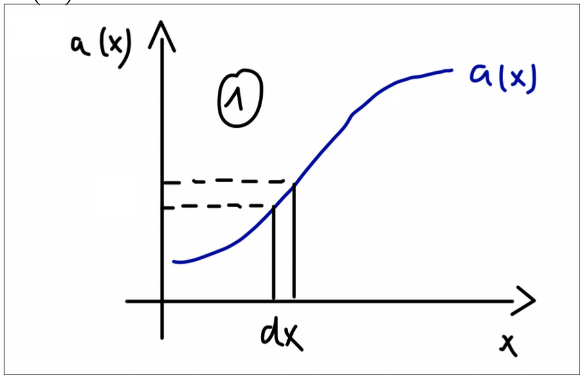
- Beispiel:
  Sie haben den Durchmesser, x, eines Kreises gemessen. Für $p(x)$ haben Sie ein Modell. Wie sieht $q(a)$ für die Kreisfläche a aus?

- Erhaltung der Wahrscheinlichkeit:

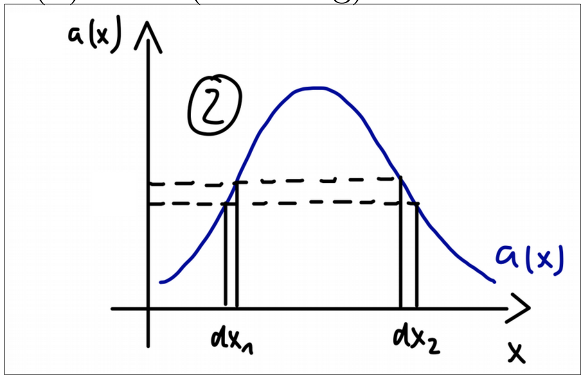
$$q(a)\mathrm{d}a = p(x)\mathrm{d}x \qquad q(a) = p(x)\left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}a}\right|$$

Absolutbetrag stellt sicher, daß $q(a)$ positiv semi-definit ist.

$a(x)$ umkehrbar



$a(x)$ nicht (eindeutig) umkehrbar



Funktionen von Zufallsvariablen

- Nehmen Sie an die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x)$ für die Zufallsvariable x sei bekannt. Wie sieht die Wahrscheinlichkeitsdichte $q(a)$ für eine Funktion $a(x)$ aus?

- Beispiel:
  Sie haben den Durchmesser, x, eines Kreises gemessen. Für $p(x)$ haben Sie ein Modell. Wie sieht $q(a)$ für die Kreisfläche a aus?

- Erhaltung der Wahrscheinlichkeit:

$$q(a)\mathrm{d}a = p(x)\mathrm{d}x \qquad q(a) = p(x)\left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}a}\right|$$

Absolutbetrag stellt sicher, daß $q(a)$ positiv semi-definit ist.

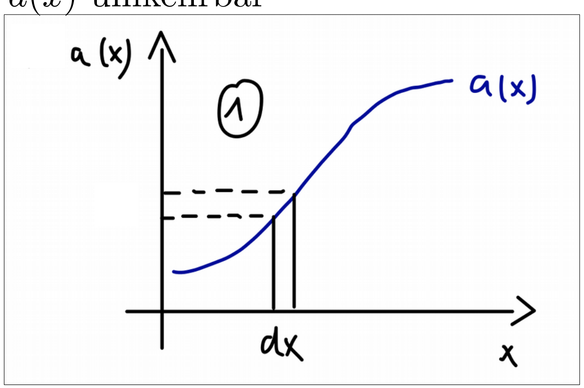
Für mehrdimensionale Wahrscheinlichkeits-dichten wird

$$\left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}a}\right|$$

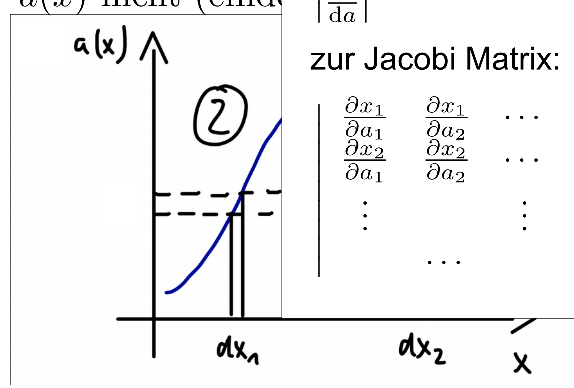
zur Jacobi Matrix:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial a_1} & \frac{\partial x_1}{\partial a_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial a_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial a_1} & \frac{\partial x_2}{\partial a_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial a_n} \\ \vdots & & \vdots & \\ & \cdots & & \frac{\partial x_n}{\partial a_n} \end{vmatrix}$$

$a(x)$ umkehrbar



$a(x)$ nicht (einde



Funktionen von Zufallsvariablen

- Nehmen Sie an die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x)$ für die Zufallsvariable x sei bekannt. Wie sieht die Wahrscheinlichkeitsdichte $q(a)$ für eine Funktion $a(x)$ aus?

- Beispiel:
  Sie haben den Durchmesser, x, eines Kreises gemessen. Für $p(x)$ haben Sie ein Modell. Wie sieht $q(a)$ für die Kreisfläche a aus?

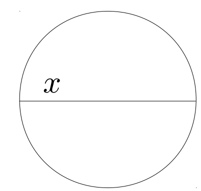
- Erhaltung der Wahrscheinlic

$$q(a)\mathrm{d}a = p(x)\mathrm{d}x \qquad q(a) =$$

$$x(a) = 2\sqrt{\frac{a}{\pi}}$$

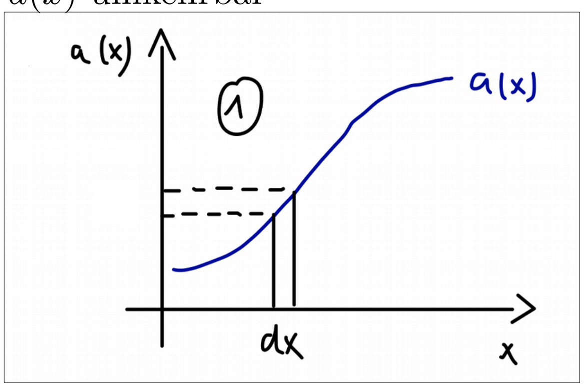
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}a}(a) = 2\sqrt{\frac{1}{a\pi}}$$

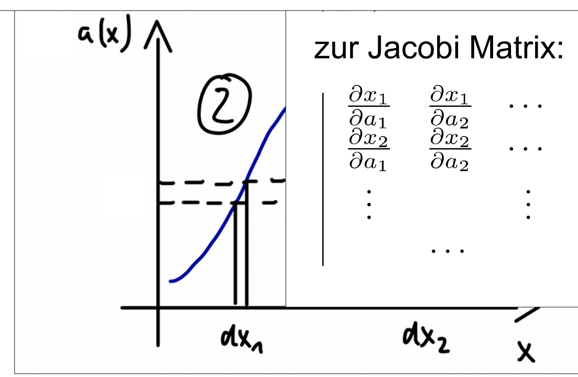
$$q(a) = p(x(a)) \cdot \left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}a}\right| = p(x(a)) \cdot 2\sqrt{\frac{1}{a\pi}}$$



$$a(x) = \pi(x/2)^2$$

$a(x)$ umkehrbar





zur Jacobi Matrix:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial a_1} & \frac{\partial x_1}{\partial a_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial a_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial a_1} & \frac{\partial x_2}{\partial a_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial a_n} \\ \vdots & & \vdots & \\ & \cdots & & \frac{\partial x_n}{\partial a_n} \end{vmatrix}$$

Gaußsche Fehlerfortpflanzung

- Nehmen Sie an Sie hätten einen Vektor, $\vec{x}$, von Zufallsvariablen, deren Wahrscheinlichkeitsdichten Ihnen nicht bekannt sind. Sie kennen jedoch den Vektor der Erwartungwerte, $\vec{\mu}$, und die Kovarianzmatrix, V_{ij}. Wie erhalten Sie eine Abschätzung für $a(\vec{x})$?

- Nach Taylor-Entwicklung:

$$a(\vec{x}) \approx a(\vec{\mu}) + \sum \left[\frac{\partial a}{\partial x_i}\right]_{\vec{x}=\vec{\mu}} (x_i - \mu_i)$$

$$E[a(\vec{x})] \quad \approx a(\vec{\mu})$$ **(Erwartungswert)**

$$\mathrm{var}[a(\vec{x})] \approx \sum \left[\frac{\partial a}{\partial x_i} \frac{\partial a}{\partial x_j}\right]_{\vec{x}=\vec{\mu}} V_{ij}$$ **(Varianz)**

Und für einen Vektor von Funktionen $\vec{a}(\vec{x})$ erhalten Sie die Korrelationsmatrix entsprechend:

$$\mathrm{cov}[a_k(\vec{x}), a_l(\vec{x})] \approx \sum \left[\frac{\partial a_k}{\partial x_i} \frac{\partial a_l}{\partial x_j}\right]_{\vec{x}=\vec{\mu}} V_{ij}$$ **(Kovarianz)**

Gaußsche Fehlerfortpflanzung

- **Wichtige Spezialfälle:**
  - $a = x_1 + x_2$: $\sigma_a^2 = \sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 + 2V_{12}$ (einfacher Fehler von Summen)
  - $a = x_1 \cdot x_2$: $\frac{\sigma_a^2}{a^2} = \frac{\sigma_{x_1}^2}{x_1^2} + \frac{\sigma_{x_2}^2}{x_2^2} + 2\frac{V_{12}}{x_1 x_2}$ (einfacher Fehler von Produkten)
  - Für diese Beispiele haben wir die Annahme gemacht, dass $a(\vec{x})$ bereits in führender Ordnung durch eine Taylor-Entwicklung beschrieben werden kann. Wenn $a(\vec{x})$ linear ist ist diese Näherung exakt. Sie wird jedoch immer schlechter, je nicht-linearer das Verhalten von $a(\vec{x})|_{\vec{x}=\vec{\mu}}$ wird (Bsp.: $a(\vec{x}) = x_1/x_2$).
  - Im Zweifel Monte Carlo Methoden besser geignet zur Abschätzung von Unsicherheiten und (v.a.) Korrelationen (oft Methode der Wahl in der Praxis).
  - $\epsilon = \frac{x_1}{x_1+x_2}$, $N = x_1 + x_2$: $\frac{\sigma_\epsilon^2}{\epsilon^2} = \frac{\epsilon(1-\epsilon)}{N}$ (binomische Fehlerfortpflanzung)

Wenn Sie die Fehlerrechnung selbst machen wollen, vergewissern sie sich, daß x_1 und x_2 unkorreliert sind (was ist ihre jeweilige Bedeutung?). Wenden Sie dann die Fehlerrechnung stur an. Berechnen Sie auch den Korrelationskoeffizienten zwischen ϵ und N.

Zusammenfassung

Kapiel 3.3:

Charakterisierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen

- Zufallsvariablen und Wahrscheinlichkeitsdichten.
- Charakterisierung durch Quantilen, Lagemaß.
- Erwartungswert, algebraische Momente, Varianz.
- Mehrdimensionale Wahrscheinlickeitsdichten, Kovarianz, Korrelationen.
- Funktionen von Zufallsvariablen, Gaußsche Fehlerfortpflanzung.

Kapiel 3.4:

Beispiele gängiger Wahrscheinlichdichteverteilungen

Uniforme Verteilung

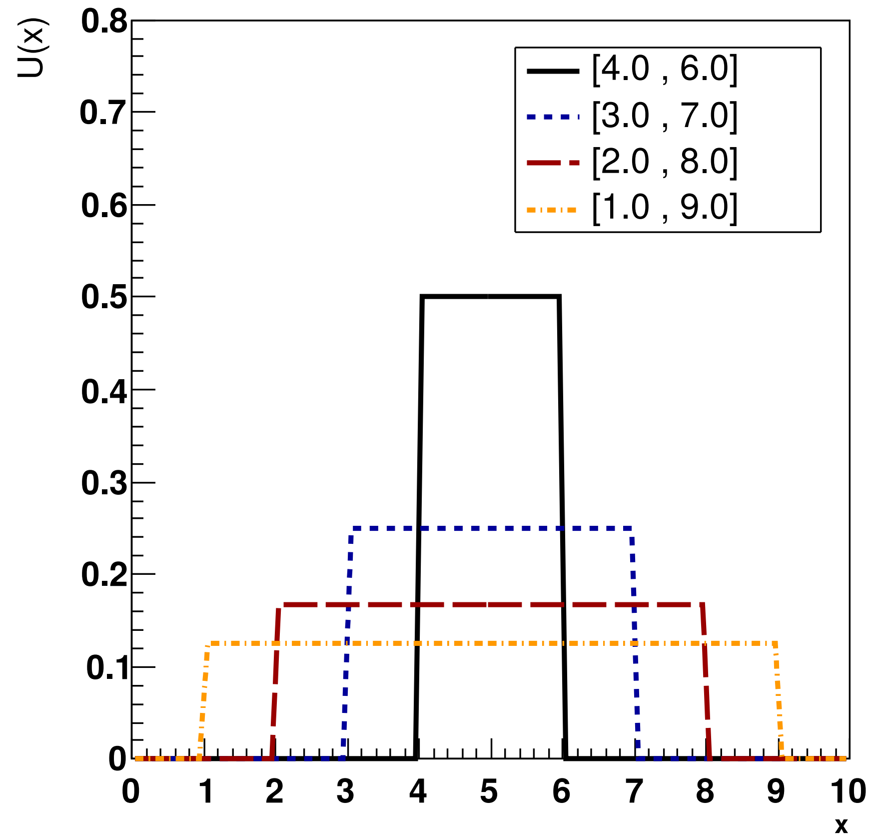
Karlsruhe Institute of Technology

- Gleichverteilte Zufallszahlen (jeder Wert unabhängig & gleichwertig):

$$U(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$E[x] = 1/2(a+b) \quad \text{(Erwartungswert)}$$

$$\mathrm{var}[x] = 1/12(b-a)^2 \text{ (Varianz)}$$



- **NB:**
  jede beliebig verteilte Zufallsvariable x läßt sich auf eine uniform verteilte Zufallsvariable $a(x)$ transformieren.

$$a(x) = \mathcal{P}(x' \leq x)$$

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{-\infty}^{x} p(x')\mathrm{d}x' = p(x)$$

$$q(a) = p(x)\left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}a}\right| = p(x)\left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}a}\right|^{-1} = 1 \quad \text{(für } 0 \leq a \leq 1\text{)}$$

- Jeder Beginn einer Mote Carlo Integration.
- Allgemeinster *prior* einer Bayesianischen *likelihood* Abschätzung.

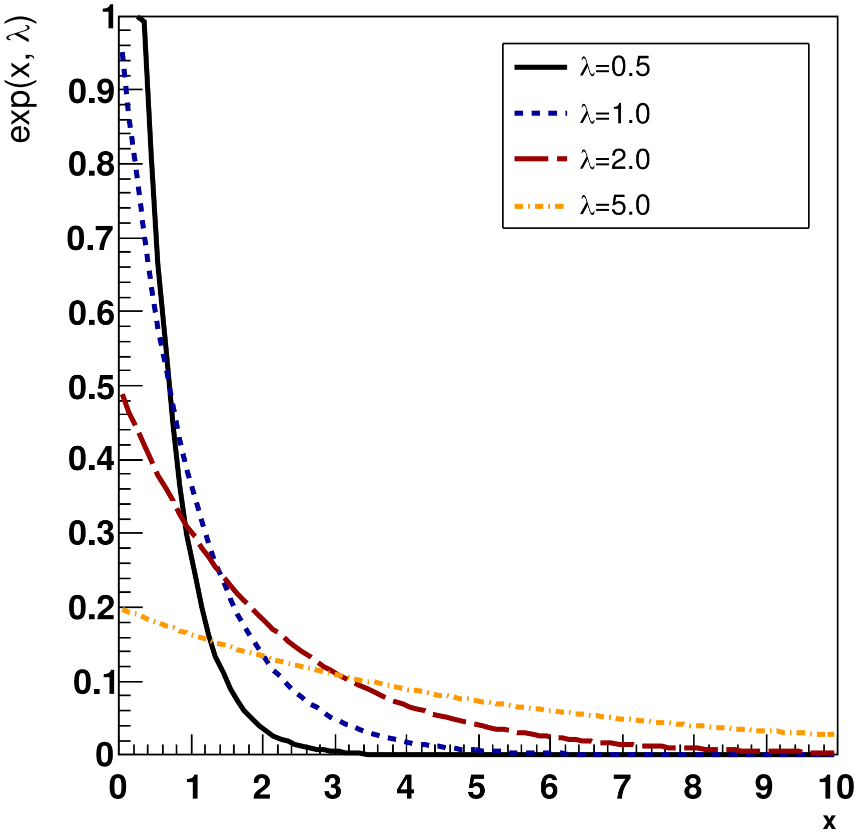
Exponentialverteilung

- Differenz von Zufallszahlen gleichverteilt (jede Differenz(!) unabhängig & gleichwertig):

$$\exp(x,\lambda) = \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda}$$

$E[x] = \lambda$ (Erwartungswert)

$\mathrm{var}[x] = \lambda^2$ (Varianz)



- **NB:**
  Klassisches Beispiel: radioaktiver Zerfall.
  In diesem Bild entspricht λ der Lebensdauer des Präparats.

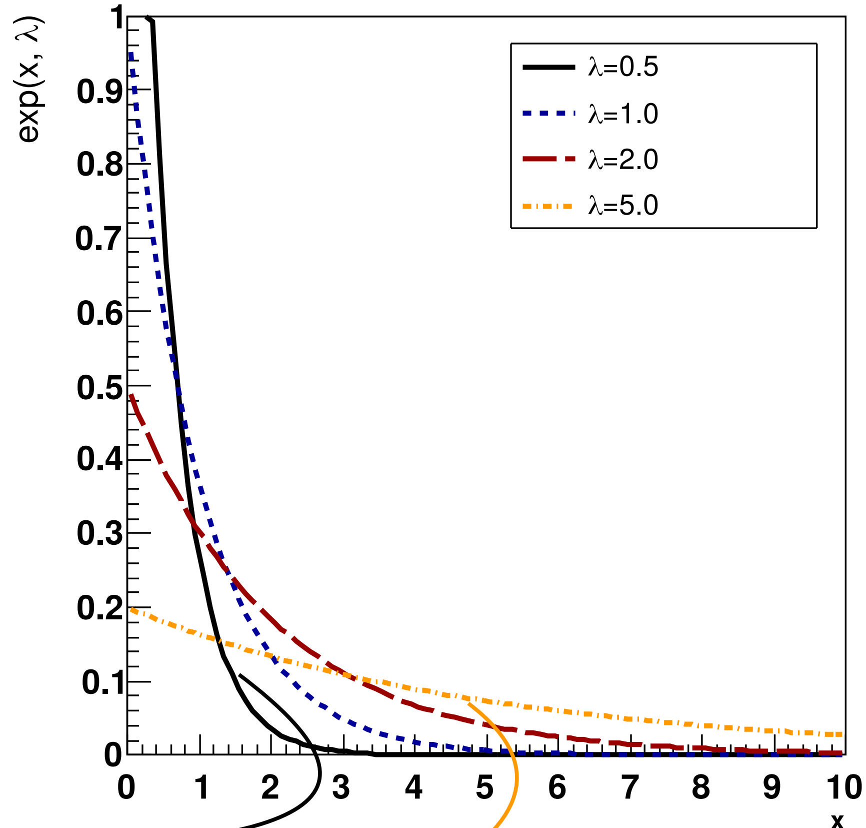
Exponentialverteilung

- Differenz von Zufallszahlen gleichverteilt (jede Differenz(!) unabhängig & gleichwertig):

$$\exp(x, \lambda) = \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda}$$

$$E[x] = \lambda \quad \text{(Erwartungswert)}$$

$$\mathrm{var}[x] = \lambda^2 \quad \text{(Varianz)}$$



- **NB:**
  Klassisches Beispiel: radioaktiver Zerfall.
  In diesem Bild entspricht λ der Lebensdauer des Präparats.

Alle Differenzen Δx gleich und „klein“.

Alle Differenzen Δx gleich und „groß“.

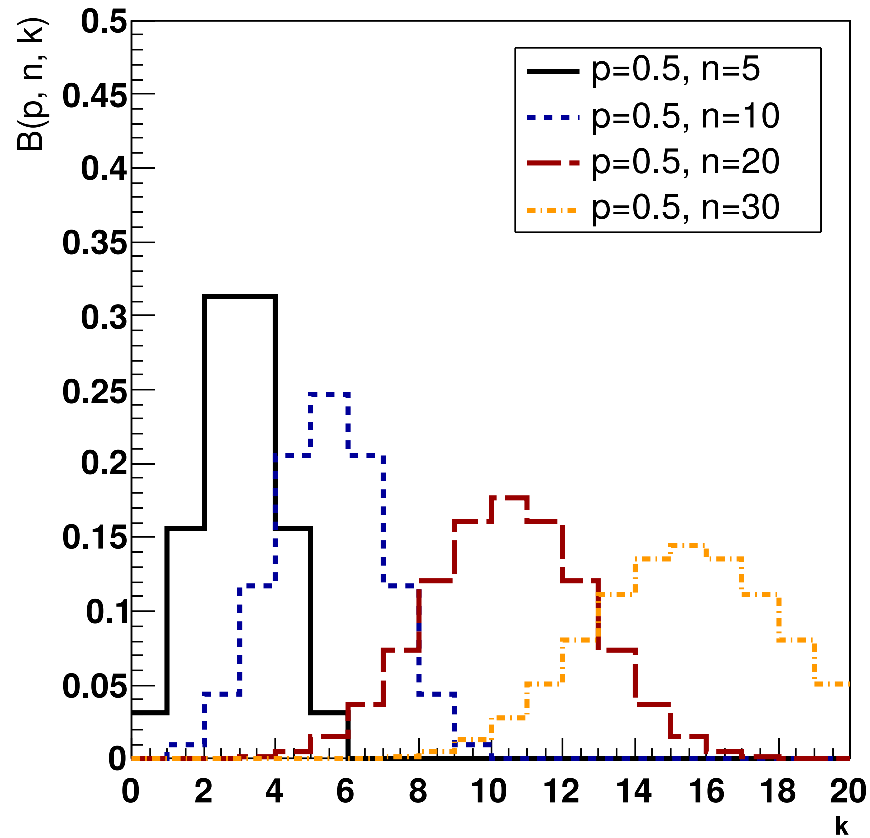
Binomialverteilung

- Günstige/mögliche Ereignisse (jeder Wert unabhängig aber nicht mehr gleichwertig):

$$B(p,n,k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$E[x] = np \qquad \text{(Erwartungswert)}$$

$$\mathrm{var}[x] = np(1-p) \qquad \text{(Varianz)}$$



- **NB:**
  Verteilung von k nicht mehr gleich sondern folgt Wahrscheinlichkeit p.

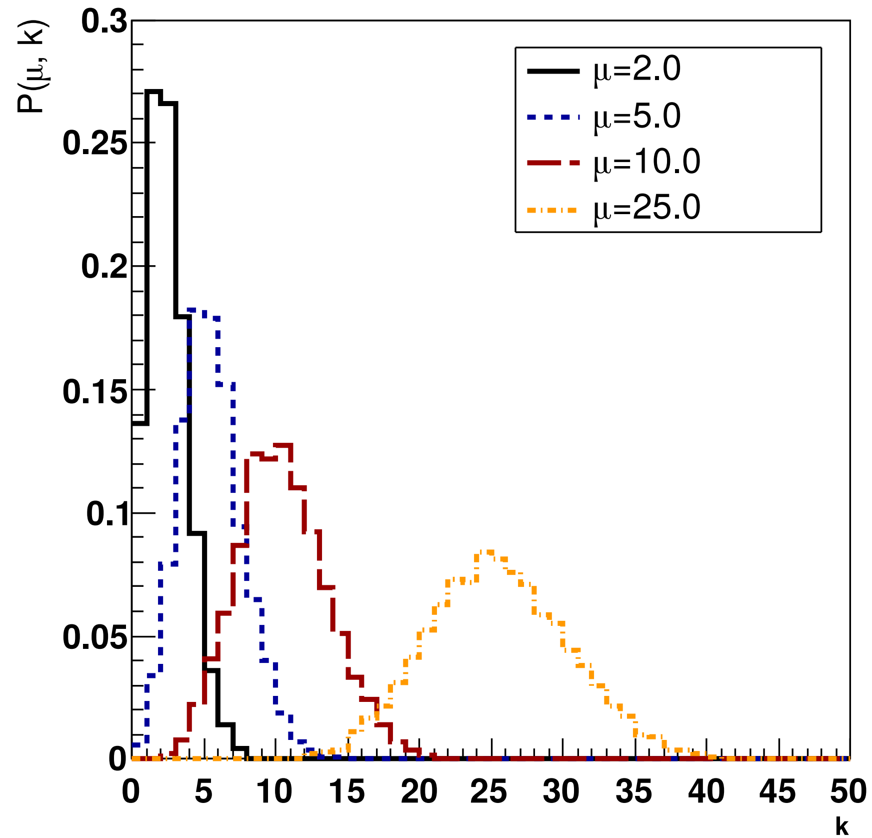
Poissonverteilung

- Günstige/mögliche Ereignisse (jeder Wert unabhängig aber nicht mehr gleichwertig):

$$P(\mu, k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$

$$E[x] = np = \mu \qquad \text{(Erwartungswert)}$$

$$\mathrm{var}[x] = np = \mu \qquad \text{(Varianz)}$$



- **NB:**
  entspricht Binomialverteilung im Grenzwert $p \to 0,\ n \to \infty$ (Beweis, siehe nächste Folie).

Binomial- $\leftrightarrow$ Poissonverteilung

$$B(p,n,k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{\mu^k}{n^k} \cdot \frac{\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^k}$$

$$= \frac{1\cdot(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{k-1}{n})}{\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^k} \cdot \frac{\mu^k}{k!} \cdot \left(1-\frac{\mu}{n}\right)^n$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\left(1-\frac{\mu}{n}\right)} \cdot \frac{(1-\frac{2}{n})}{\left(1-\frac{\mu}{n}\right)} \cdot \frac{(1-\frac{2}{n})}{\left(1-\frac{\mu}{n}\right)} \cdot \ldots \cdot \frac{(1-\frac{k-1}{n})}{\left(1-\frac{\mu}{n}\right)}}_{\to 1} \cdot \frac{\mu^k}{k!} \cdot \underbrace{\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^n}_{\to e^{-\mu}}$$

$$= \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$

$$\mu = const, n \to \infty$$

Zentraler Grenzwertsatz

Karlsruhe Institute of Technology

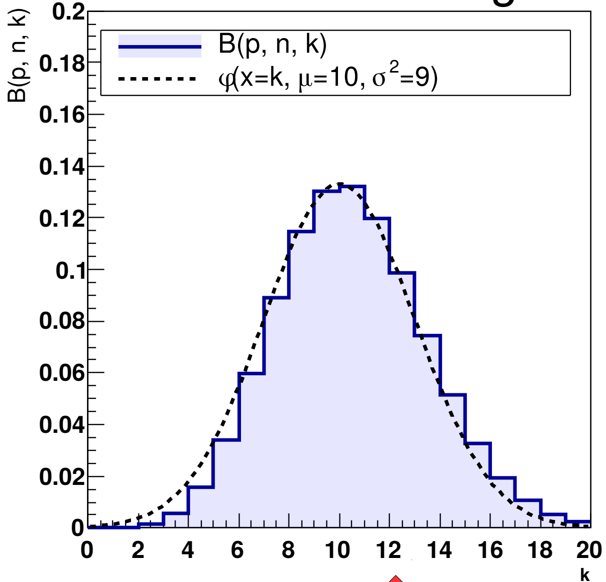
Betrachte einen Ereignisraum mit unbabhängigen Zufallsvariablen x_i (=Experimentausgängen) der Länge n. Die x_i mögen dabei einer beliebigen(!) identischen Wahrscheinlicheitsverteilung mit endlichem Erwartungswert μ und endlicher Varianz σ folgen. Dann folgt die Zufallsvariable

$$z_n = \frac{\sum x_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{n \to \infty} \varphi(x, \mu = 0, \sigma = 1)$$

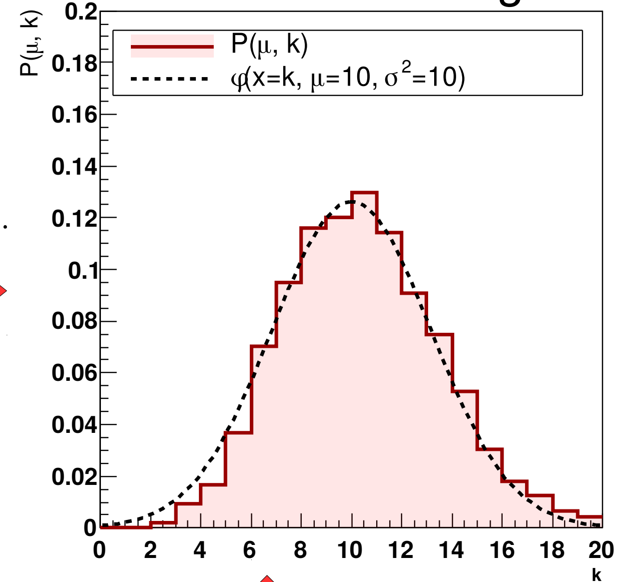
für den Grenzübergang $n \to \infty$ einer **Normalverteilung** mit Erwartungwert $\mu = 0$ und Varianz $\sigma^2 = 1$.

Zentraler Grenzwertsatz (in action)

Binomialverteilung:



Poissonverteilung:



$n \to \infty$
$p \to 0$
$np = \mu = const.$

$n \to \infty$
$p \to 0$
$\mu = np \gg 0$
$\sigma^2 = np(1-p)$

$n \to \infty$
$p \to 0$
$\mu = np \gg 0$
$\sigma^2 = np$

Normalverteilung
(**universell!**)

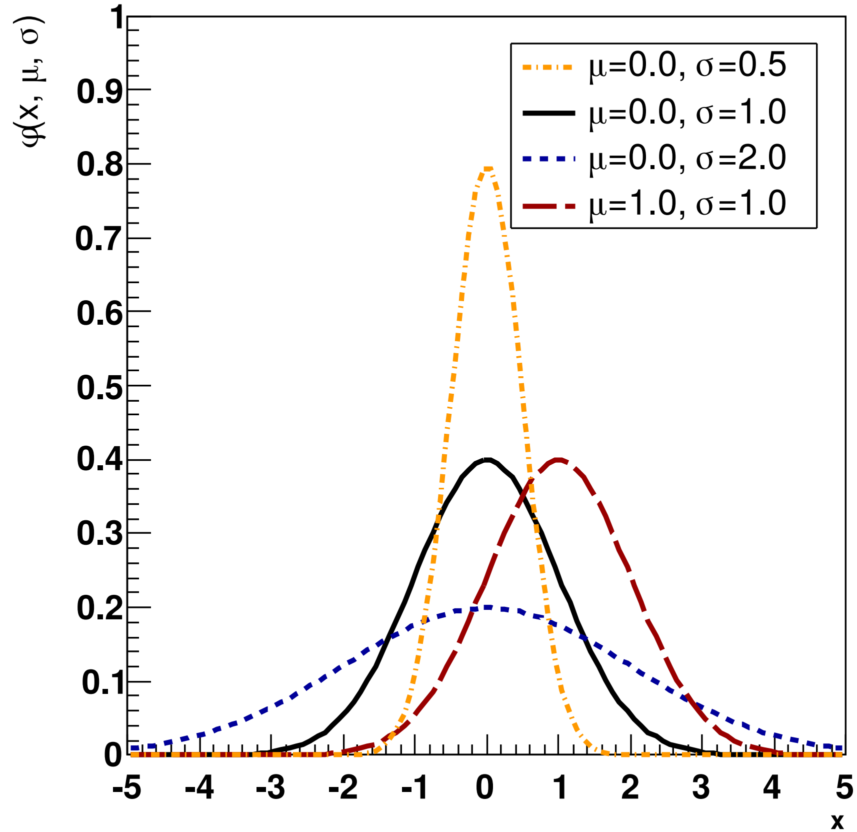
Normalverteilung

- Summe vieler, unabhängiger, identisch verteilter Messungen:

$$\varphi(x,\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

$$E[x] = \mu$$ (Erwartungswert)

$$\mathrm{var}[x] = \sigma^2$$ (Varianz)



Institute of Experimental Particle Physics (IEKP)

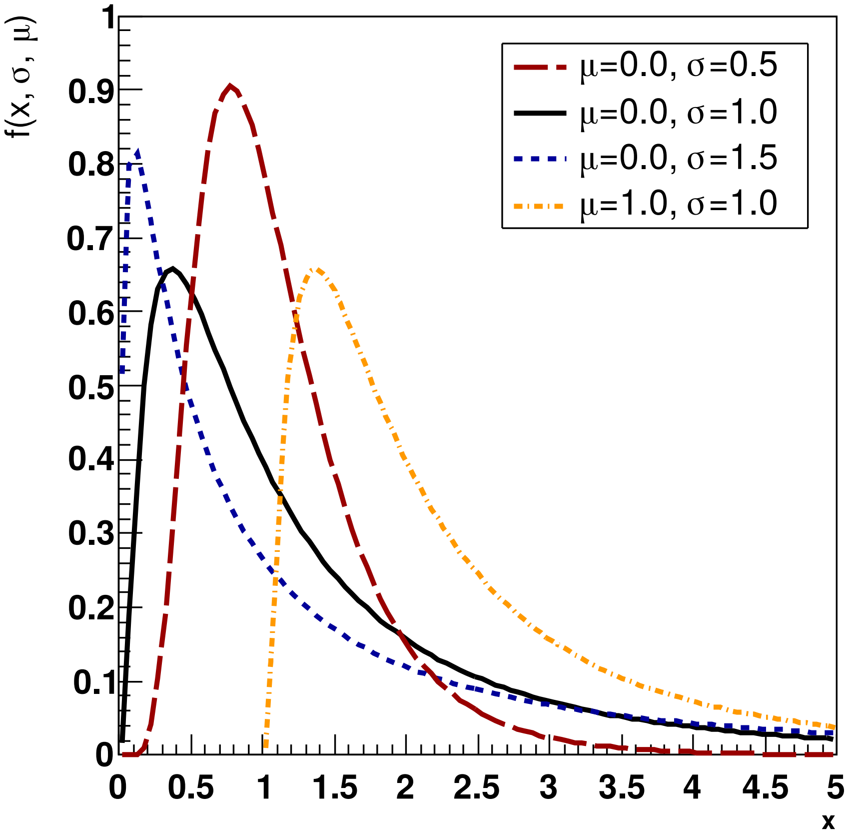
Log-Normalverteilung

- Produkt vieler, unabhängiger, identisch verteilter Messungen:

$$f(x,\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\frac{1}{x}e^{-(\ln(x)-\mu)^2/2\sigma^2}$$

$$E[x] = e^{\mu+1/2\sigma^2} \qquad \text{(Erwartungswert)}$$

$$\mathrm{var}[x] = e^{2\mu+\sigma^2}\cdot(e^{\sigma^2}-1) \quad \text{(Varianz)}$$



- **NB:**
  Variablensubstitution:

  $$x' = \ln(x) \qquad \mathrm{d}x' = \mathrm{d}\ln(x) = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

  führt Log-Normalverteilung in Normalverteilung über:

  $$f(x,\mu,\sigma)\mathrm{d}x = \varphi(x',\mu,\sigma)\mathrm{d}x'|_{x'=\ln(x)}$$

χ^2-Verteilung

Karlsruhe Institute of Technology

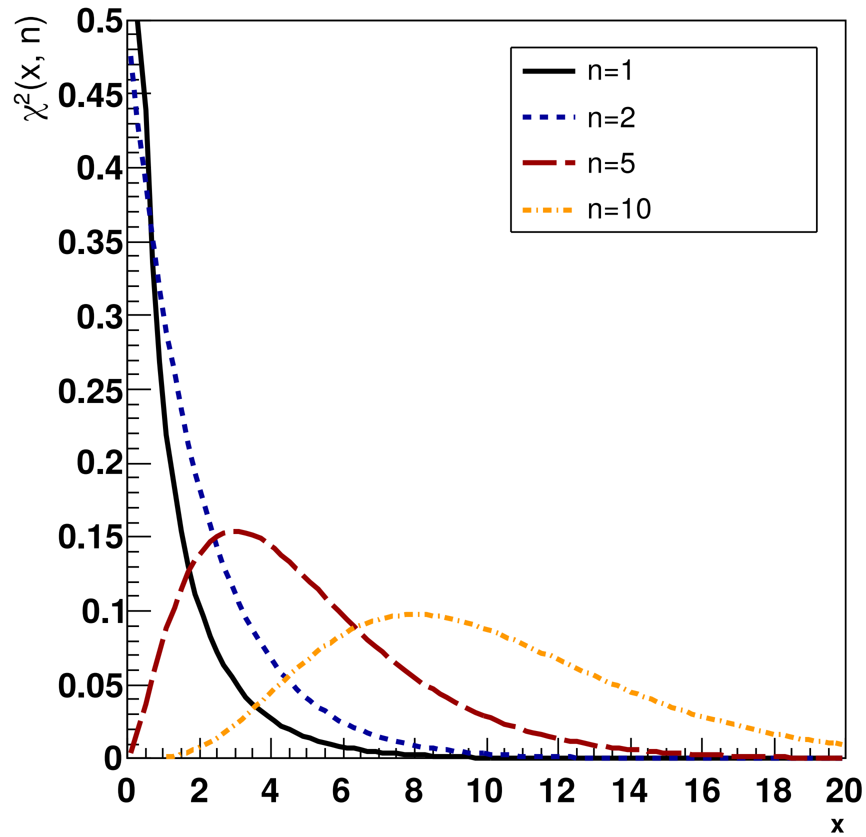
- Der Logarithmus der Normalverteilung ist (bis auf eine Konstante) χ^2 verteilt:

$$\chi^2(x,n) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2}$$

$$\Gamma(x) = \int e^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t$$ (Gammafunktion)

$$E[x] = n$$ (Erwartungswert)

$$\mathrm{var}[x] = 2n$$ (Varianz)



- **NB:**
Die Summe der Quadrate von n normal-verteilten Zufallsgrößen x_i

$$z = \sum^{N} \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2}$$

ist χ^2-verteilt. Die Zahl n heißt Freiheitsgrad. Sie entspricht der Anzahl unabhängiger Normalverteilungen.

Karlsruhe Institute of Technology

Kapiel 3.4:

Beispiele gängiger Wahrscheinlichdichteverteilungen

- Uniforme Verteilung, Exponentialverteilung ($\rightarrow$ jeder Experimentausgang gleichwertig).
- Binomialverteilung, Poissonverteilung ($\rightarrow$ unterscheide günstige/mögliche Experimentausgänge).
- Normalverteilung, Log-Normalverteilung, χ^2-Verteilung ($\rightarrow$ viele unabhängige Messungen mit einem bestimmten Ausgang, μ in einem bestimmten Intervall σ^2).