Klassische Experimentalphysik I (Mechanik) (WS 16/17)

http://ekpwww.physik.uni-karlsruhe.de/~rwolf/teaching/ws16-17-mechanik.html

Übungsblatt 9

Name des Übungsgruppenleiters und Gruppenbuchstabe:

Namen der bearbeitenden Gruppe:

Ausgabe: Di, 20.12.2016 (09:45) Abgabe: Mo, 09.01.2017 (13:30) Briefkasten Geb. 30.23

Aufgabe 31: Gravitationsfeld (8 Punkte)

Nehmen Sie für die folgende Aufgabe an, die Erde sei eine homogene Kugel mit dem Radius R_E und konstanter Dichte ρ_E. Betrachten Sie die Erde in einem Koordinatensystem mit Ursprung im Mittelpunkt der Erde.

a)
Geben Sie das Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ sowie das Potential $V(\vec{r})$ der Erde sowohl für den Fall $r > R_E$ als auch für den Fall $r \leq R_E$ an. Setzen Sie dafür $V(\vec{r}) = 0$ für $r \to \infty$. Skizzieren Sie den funktionalen Zusammenhang für $F(r)$ und $V(r)$. Zeigen Sie für beide Fälle durch Ableitung, dass

$$\vec{F}(\vec{r}) = -m\vec{\nabla}V(\vec{r})$$

wobei m einer Testmasse entspricht.

b)
Wir definieren die Konstante:

$$g = \frac{G_N m_E}{R_E^2}$$

wobei $G_N = 6.674 \cdot 10^{-11}$ m^{3}kg^{-1}s^{-2} die Graviationskonstante ist. Machen Sie eine Entwicklung des Graviationspotentials $V(R_E + h)$ für $0 < h \ll R_E$, d.h. nahe R_E und leiten Sie die bekannte funktionale Form der potentiellen Energie $E_{pot} = m\, g\, h$ daraus ab. Die Konstante g ist die Erdbeschleunigung. Tipp: verwenden Sie zur Entwicklung die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_0\, x^k = \frac{a_0}{1-x} \qquad \text{für } ||x|| < 1$$

für $x < 0$.

c)
Wir geben im folgenden eine Tabelle von Massen, Radien, Fluchtgeschwindigkeiten v_F einer Testmasse und äquivalenten Werten zur Erdbeschleunigung g verschiedener Himmelskörper an. Vervollständigen Sie diese Tabelle. Gehen Sie dabei bei jedem Himmelkörper davon aus, dass er kugelförmig ist.

d)
Wir schreiben das Jahr 2066, und die erste bemannte Marsrakete ist kurz vor dem Ziel. Auf Grund einer falschen Berechnung landet die Crew allerdings auf dem Marsmond Deimos anstatt auf dem Mars selbst. Mit den Worten “Dies ist ein großer Schritt für die Menschheit...” springt der erste Astronaut (waagerecht) aus dem Raumschiff, aber zu seiner Verwunderung, landet er NICHT auf dem Boden. Wie lange schwebt er im Orbit, bevor er die Rakete wieder erreicht und mit welcher (horizontalen) Geschwindigkeit ist er von der Raumsonde abgesprungen? Zu welchem verhängnisvollen Ereignis wäre es gekommen, wenn er mit doppelter Geschwindigkeit abgesprungen wäre?

Himmelskörper	Masse	Radius	Gravitation (g)	Fluchtgeschwindigkeit v_F
Erde	*	6371 km	9.81 m/s^2	*
Mond	*	1737 km	1.62 m/s^2	*
Mars	$6.4 \cdot 10^{23}$ kg	3390 km	*	*
Deimos	$1.8 \cdot 10^{15}$ kg	6.2 km	*	6.2 m/s

Aufgabe 32: Erzschurke mit Erdtunnel **(4 Punkte)**

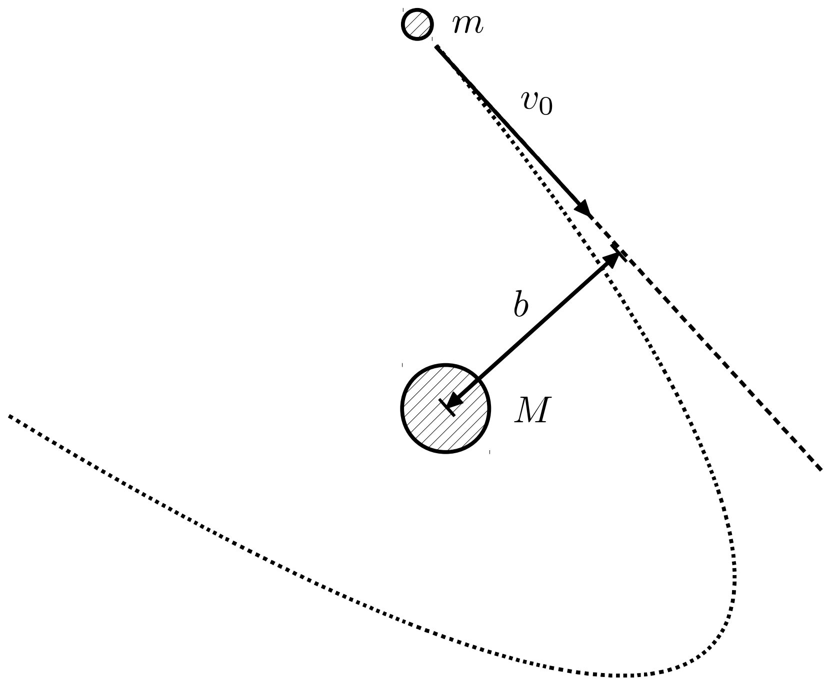
Erzschurke Ernst-Stavro Blofeld ist wieder ausgebrochen und plant seine Rache. Er hat heimlich vom Süd-Pazifik aus einen Tunnel durch den Mittelpunkt der Erde bis unter den Buckingham Palast gebohrt, um der Britischen Monarchie ein Ende zu bereiten. Er möchte eine Bombe mit Zeitzünder in den Tunnel werfen, in dem er ein Vakuum eingerichtet hat. Die Bombe soll genau unter dem Palast zur Explosion kommen. Nehmen Sie an, die Erde sei eine homogene Kugel und vernachlässigen Sie den Effekt des hohlen Tunnels.

a)
Welche Zeit muss er auf dem Zünder einstellen?

b)
In der heutigen Zeit ist es selbst für Blofeld schwierig an Sprengstoff zu kommen. Er hat deshalb einen Alternativplan ausgeheckt: Er deponiert eine Masse $m = 100$ kg am Erdmittelpunkt und lässt von seiner Basis in der Südsee eine weitere Masse $M = 1000$ kg in den Tunnel fallen. Am Erdmittelpunkt wird dann die kleinere Masse durch einen elastischen Stoß in Bewegung versetzt. Welche kinetische Energie hat die kleinere Masse wenn sie die Erdoberfläche erreicht?

Aufgabe 33: Meteorit **(2 Punkte)**

Ein Meteorit der Masse m fliegt auf einen Planeten der Masse M zu. In großer Entfernung zum Planeten hat er die Geschwindigkeit v_0 und den Stoßparameter b. Wie groß ist der kürzeste Abstand s zum Planeten als Funktion der Anfangsgeschwindigkeit, der Masse und des Stoßparameters? Berechnen Sie s für $m = 500$ kg, $v_0 = 20$ km/s, $b = 1000$ km und $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg. Welche maximale Geschwindigkeit erreicht der Meteorit?



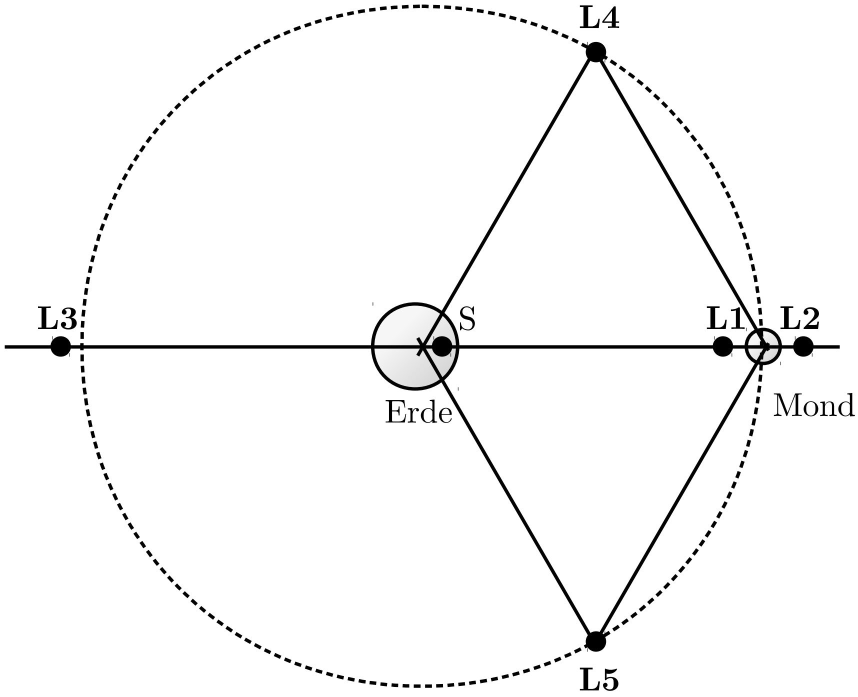
Aufgabe 34: Lagrange-Punkte **(6 Punkte)**

Die Erde, mit der Masse M, und der Mond, mit der Masse m, rotieren im Abstand d um ihren gemeinsamen Schwerpunkt S. In diesem System gibt es fünf Punkte, in denen eine (im Vergleich zu Erde und Mond) leichte Testmasse relativ zu Erde und Mond nicht beschleunigt wird. Man bezeichnet diese Punkte als Lagrange-Punkte (siehe Skizze).

a)
Zeigen Sie, dass die drei Punkte auf der Geraden, die die Mittelpunkte von Erde und Mond durchläuft, gegeben sind durch:

L1: $\frac{M}{(d-r)^2} = \frac{m}{r^2} + \left(\frac{M}{M+m}d - r\right)\frac{M+m}{d^3}$, wobei r der Abstand der Testmasse zum Mond ist.
L2: $\frac{M}{(d+r)^2} + \frac{m}{r^2} = \left(\frac{M}{M+m}d + r\right)\frac{M+m}{d^3}$, wobei r der Abstand der Testmasse zum Mond ist.
L3: $\frac{m}{(d+r)^2} + \frac{M}{r^2} = \left(\frac{m}{M+m}d + r\right)\frac{M+m}{d^3}$, wobei r der Abstand der Testmasse zur Erde ist.

b)
Zeigen Sie, dass die beiden Punkte, die mit Erde und Mond ein gleichseitiges Dreieck bilden, ebenfalls relativ zum System Erde-Mond beschleunigungsfreie Punkte sind. Man bezeichnet diese Punkte mit **L4** und **L5**.


L4
L3
S
L1
L2
Erde
Mond
L5