Klassische Experimentalphysik I (Mechanik) (WS 16/17)

http://ekpwww.physik.uni-karlsruhe.de/~rwolf/teaching/ws16-17-mechanik.html

Übungsblatt 11

Name des Übungsgruppenleiters und Gruppenbuchstabe:

Namen der bearbeitenden Gruppe:

Ausgabe: Di, 17.01.2017 (09:45) Abgabe: Mo, 23.01.2017 (13:30) Briefkasten Geb. 30.23

Aufgabe 38: Vierervektoren und Abstand im Minkowski-Raum (4 Punkte)

Wenn Sie Raum- und Zeitkoordinaten geschickt anordnen erhalten Sie ein vierkomponentiges Objekt,

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

für das sich die Lorentz-Transformation von einem Bezugssystem S in ein Bezugssystem S', das sich mit der Geschwindigkeit $\beta = v/c$ entlang der x-Achse relativ zu S bewegt, wie folgt schreiben läßt:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\,(ct + \beta x) \\ \gamma\,(x + \beta ct) \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Man bezeichnet das Objekt $\begin{pmatrix} ct, & x, & y, & z \end{pmatrix}$ als Lorentzvektor (des Ortes). Für jeden Lorentzvektor ist die Größe

$$s^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 \tag{2}$$

invariant unter beliebigen Lorentz-Transformationen entlang der x-, y- oder z-Achse und unter beliebigen Drehungen um jede dieser Achsen in drei Dimensionen. Man bezeichnet $s = \sqrt{s^2}$ als den Abstand des Lorentzvektors (zum Ursprung).

a)
Zeigen Sie die Invarianz von s^2 unter einer Lorentz-Transformation mit der Geschwindigkeit $\beta = v/c$ entlang der x-Achse durch Einsetzen der transformierten Koordinaten in Gleichung (2).

b)
Eine Drehung um den Winkel α um die z-Achse läßt sich wie folgt schreiben:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ -x\sin\alpha + y\cos\alpha \\ z \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie die Invarianz von s^2 unter einer solchen Drehung um den Winkel α um die z-Achse durch Einsetzen der transformierten Koordinaten in Gleichung (2).

Aufgabe 39: Addition von Geschwindigkeiten **(6 Punkte)**

Man kann die Lorentz-Transformation in z-Richtung analog zu Gleichung (1) auch differentiell formulieren:

$$c\,\mathrm{d}t' = \gamma\,(c\,\mathrm{d}t + \beta \mathrm{d}z) \qquad \mathrm{d}x' = \mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}y' = \mathrm{d}y \qquad \mathrm{d}z' = \gamma\,(\mathrm{d}z + \beta c\,\mathrm{d}t) \tag{3}$$

a)
Beweisen Sie mit Hilfe dieser differentiellen Form aus Gleichung (3) das folgende Transformationsverhalten der Geschwindigkeit für einen Körper, der sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x, & v_y, & v_z \end{pmatrix}$ in einem Bezugssystem bewegt, das sich selbst mit der Geschwindigkeit $\vec{u} \parallel v_z$ relativ zum Körper bewegt:

$$v_x' = \frac{v_x\sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{v_z u}{c^2}} \qquad v_y' = \frac{v_y\sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{v_z u}{c^2}} \qquad v_z' = \frac{v_z + u}{1+\frac{v_z u}{c^2}}$$

b)
Zeigen Sie, mit Hilfe der geometrischen [1] und der binomischen [2] Reihenentwicklungen, dass für $\vec{u} \parallel \vec{v}_z$ und für $|\vec{u}| < v_z \ll c$ die folgende Vektorgleichung gilt:

$$\vec{v}' = \vec{v} + \vec{u} - \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{c^2}\,\vec{v}\,,$$

d.h. Geschwindigkeiten addieren sich NICHT linear, wie wir es aus der Gallilei-Transformation kennen und erwarten, sondern sublinear.

c)
Welches Ergebnis für v_z erhalten Sie für das exakte Transformationsverhalten aus Teilaufgabe a) für die Fälle $v_z' = 0.5\,c$, $0.75\,c$, $0.9\,c$, c.

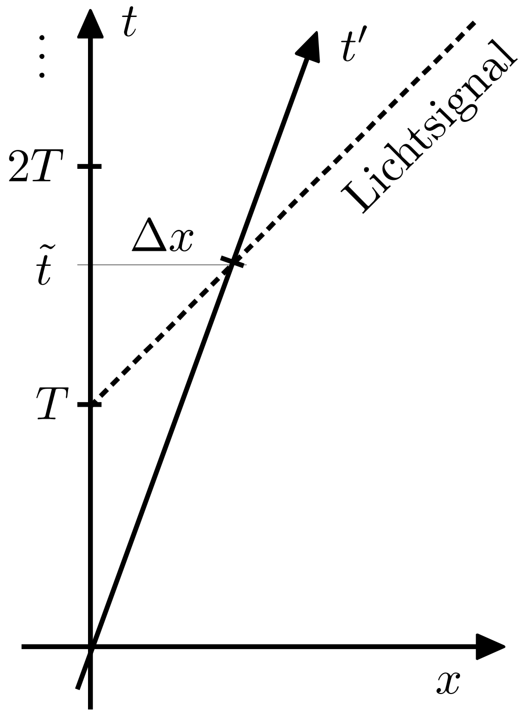
Aufgabe 40: Relativistischer Dopplereffekt **(6 Punkte)**

Stellen sie sich vor, ein Beobachter in einem ruhenden Bezugssystem S sende ein Lichtsignal aus, das die Frequenz

$$\nu = \frac{1}{T}$$

und die Periode T hat. Ein Beobachter in einem relativ zu S bewegten Bezugssystem S' entfernt sich mit der konstanten Geschwindigkei v vom Sender. Der Einfachheit halber messen wir die Periode des Lichtsignals vom gemeinsamen Ursprung der beiden Systeme aus. Sie finden den Sachverhalt in der angegebenen Skizze dargestellt.

[1] $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$ für $x < 1$
[2] $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2}$ für $x < 1$



a)
Berechnen Sie die Periode T' und die Frequenz ν', mit der der Beobachter im bewegten System S' das Lichtsignal empfängt.

b)
Führen Sie die gleichen Betrachtungen für den Fall durch, dass sich das System S' mit der Geschwindigkeit v auf den im System S ruhenden Sender zu bewegt.

c)
Nehmen Sie an das ausgesandte Licht habe die Wellenlänge $\lambda_S = 600$ nm (diese Wellenlänge entspricht grünem Licht im sichtbaren Bereich). Die Relation zwischen Wellenlänge λ und Frequenz ν ist $\lambda\,\nu = c$. Berechnen Sie die Wellenlänge λ_E des empfangenen Lichts für die Fälle von a) und b) und die Werte $v = 0.5\,c$, $0.75\,c$ und $0.9\,c$.

Aufgabe 41: Dehnung durch Eigengewicht **(4 Punkte)**

Berechnen Sie die Längenänderung, die ein 40 m langes frei hängendes Gummiseil der Dichte $\rho = 0.92 \cdot 10^3$ kg/m^3, mit dem Elastizitätsmodul $E = 10^5$ kPa infolge seines Eigengewichtes erfährt. Welche Zugspannung herrscht am oberen (unteren) Seilende?