



SS/~~WS~~ 20¹²...../.....

Praktikum: (**P1/P2**) (**Mo/Di/Mi/Do**) Gruppe-Nr: 2.....

Name: Koppenhöfer..... Vorname: Martin.....

Name: Eisenhardt..... Vorname: Sebastian.....

Versuch: ~~02~~ Kreisel..... (**mit/ohne**) Fehlerrechnung

Betreuer: Jan Hys..... Durchgeführt am: 23.4.2012

Abgabe am: 30.4.12.....

Rückgabe am: 30.4.12.....

Begründung:

sehr schön, aber bitte im Gleichung mit eingesetzten Werte aufschreiben.

2. Abgabe am: 7.5.12.....

Ergebnis: (**+** / **0** / **-**)

Fehlerrechnung: (**ja** / **nein**)

Datum: 7.5.12.....

Handzeichen:

Bemerkungen:



Versuch P2-71,74

Kreisel

Raum F1-11

Dieser Versuch soll Ihnen ein Verständnis für die Bewegungsformen rotierender starrer Körper vermitteln. Im ersten Teil des Versuchs haben Sie die Gelegenheit, sich eingehend mit dem Erhaltungssatz für den Drehimpuls auseinanderzusetzen. Im zweiten Teil beobachten Sie anhand eines kardanischn gelagerten Kreisels die unterschiedlichen Bewegungsformen des starren Körpers und deuten diese mit Hilfe der Theorie. Als wichtige technische Anwendung der Kreiselgesetze wird Ihnen der Kreiselkompaß im Modell vorgestellt.

Eine Zusammenfassung des notwendigen theoretischen Hintergrundes zu diesem Versuch sowie besondere Hinweise zur Durchführung der folgenden Aufgaben werden Ihnen in einer Vorbereitungshilfe zu diesem Versuch gegeben.

Beachten Sie die Gefährlichkeit des rotierenden Kreisels! Langes Haar muss gesichert werden (Kopftuch, Stirnband o.ä.)!

Hinweise:

Den Antriebsmotor für den Kreisel immer im Rechtslauf und im Drehzahlbereich $0-3500 \text{ min}^{-1}$ betreiben und vor jedem Kreiselanwurf die Drehzahl auf Null zurückstellen! Vergewissern Sie sich vor jedem Kreiselanwurf, daß die biegsame Welle am Motorflansch fest aufsitzt und daß sie möglichst wenig gebogen ist. Sorgen Sie durch geeignetes Andrücken für einen guten mechanischen Kontakt der Sägezahnkupplung. Wenn Sie die biegsame Welle nicht benötigen, lagern Sie diese bitte in gestreckter Haltung.

Beachten Sie:

Der Kreisel ist sehr teuer und empfindlich - behandeln Sie ihn mit Sorgfalt. Zum abbremfen des Kreisels niemals „grobe Hebel“ ansetzen, sondern nur mit den Lappen an der Welle zupacken. Der Kreiselkörper ist tabu.

Aufgaben:

- 1. Die Drehimpulserhaltung.** Überlegen Sie sich Versuche zur Demonstration der Drehimpulserhaltung anhand eines Drehschemels und eines Fahrradkreisels (Fahrradfelge mit Bleieinlage und Handgriffen an der Achse). Führen Sie diese Versuche durch.
- 2. Freie Achsen.** In den Mittelpunkten der Seitenflächen einer 'Zigarrenkiste' sind Ösen angebracht. Hängen Sie die Kiste an jeweils einer dieser Ösen mit einem Draht an die Achse eines Elektromotors. Beobachten Sie das Verhalten der Kiste, wenn sie in Rotation versetzt wird. Deuten Sie Ihre Beobachtungen.
- 3. Der kräftefreie Kreisel.** Messen Sie die Nutationsfrequenz des symmetrischen Kreisels in Abhängigkeit von der Drehfrequenz um die Figurenachsen. Wiederholen Sie diese Messung nach Anbringen der zylindrischen Zusatzgewichte an den äußeren Kardanrahmen. Tragen Sie die gemessenen Werte in einem Diagramm auf.
- 4. Die Dämpfung des Kreisels.** Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit des Kreisels um die Figurenachsen als Funktion der Zeit. Tragen Sie die gemessenen Werte in einem Diagramm auf.
- 5. Der Kreisel unter dem Einfluß äußerer Drehmomente.** Messen Sie beim nutationsfreien, symmetrischen Kreisel die Präzessionsfrequenz in Abhängigkeit von der Drehfrequenz um die Figurenachsen. Schrauben Sie dazu einen Metallstab als Gewicht einseitig auf die Figurenachsen. Tragen Sie die gemessenen Werte in einem Diagramm auf.

6. Die Hauptträgheitsmomente. Berechnen Sie aus den gemessenen Präzessions- und Nutationsfrequenzen die Hauptträgheitsmomente des symmetrischen Kreisels unter Berücksichtigung der zusätzlichen Trägheitsmomente der Kardanrahmen. Geben Sie eine Abschätzung für die Masse des Rotors an.

7. Der Kreisel im beschleunigten Bezugssystem. Für diesen Versuchsteil steht ein Kreisel zur Verfügung, dessen Standfläche sich kippen lässt. Der innere Kardanrahmen ist mittels der Arretierfedern an die Horizontalebene „gefesselt“. Weshalb die Kippung? Beobachten und deuten Sie die Bewegung der Figurenachse nach Handanwurf des Kreisels und anschließendem Einschalten der Drehtischrotation.

Angaben:

Massen:

m (zyl. Gewicht) = (1000 ± 1) g pro Stück

aufschraubbarer Stab (330 ± 1) g mit verschiebbarem Gewicht (375 ± 1) g

Strecken:

Kreiselschwerpunkt - aufgeschraubtes zylindrisches Gewicht: (14.9 ± 0.1) cm

Durchmesser des zylindrischen Gewichtes: (4.00 ± 0.01) cm

Kreiselschwerpunkt - äußerer Rand des inneren Kardanrahmens: (10.91 ± 0.03) cm

Durchmesser des Rotors: (13.50 ± 0.01) cm

Fehlerrechnung:

Zu Aufgabe 6 kann im Rahmen der obligatorischen Fehlerrechnungen im P2 und nach Absprache mit dem Betreuer eine ausführliche Fehlerrechnung durchgeführt werden.

Zubehör:

Drehstuhl und Fahrradkreisel,

Körper in Form einer Zigarrenkiste mit Ösen zum Aufhängen an den drei verschiedenen Seiten und Antriebsmotor dazu,

Kreisel in kardanischer Aufhängung mit diversen Zusatzteilen,

Antriebsmotor für den Kreisel mit biegsamer Welle und Motorsteuerung,

Drehtisch mit Antriebsmotor,

Holzkeil für den geneigten Aufbau des Kreisels auf dem Drehtisch,

2 schwanenhalsgelagerte Photosensoren (mit integrierter Lichtquelle),

2 Frequenzzähler (Hameg HM8021-4),

Stoppuhr

Literatur:

Budo: *Theoretische Mechanik*, Par. 51, 58

Müller-Pouillet: *Mechanik punktförmiger Massen*, 1929, Bd. 1, Teil 1, Kap. 6, Par. 5--7, 9

Falk-Ruppel: *Mechanik Relativität Gravitation*, Par. 27

Bergmann-Schäfer: *Lehrbuch der Experimentalphysik*, Bd. 1, Par. 39

Pohl: *Mechanik, Akustik und Wärmelehre*, Par. 51, 52, 55, 56

Magnus: *Kreisel, Theorie und Anwendungen*

Grammel: *Der Kreisel, seine Theorie und seine Anwendungen*, 1950, Bd. 1 & 2

Goldstein: *Klassische Mechanik*, Kap. 5

Physikalisches Praktikum P2
Vorbereitung zum Versuch
Kreisel
(P2-71)

Sebastian Eisenhardt, Martin Koppenhöfer
(Montag-02)

23. April 2012

Inhaltsverzeichnis

0	Vorbemerkungen	2
1	Drehimpulserhaltung	2
2	Freie Achsen	4
3	Kräftefreier symmetrischer Kreisel	4
4	Dämpfung des Kreisels	6
5	Kreisel unter dem Einfluß äußerer Drehmomente	6
6	Hauptträgheitsmomente	7
7	Kreisel im beschleunigten Bezugssystem	7

0 Vorbemerkungen

In diesem Praktikumsversuch werden Körper untersucht, die um Achsen durch ihren Schwerpunkt rotieren. Bewegt sich ein Körper aus Massenpunkten dm mit den Ortsvektoren \vec{r}_i um eine Rotationsachse in $\hat{\omega}$ -Richtung mit der Winkelgeschwindigkeit ω , so gilt für die Geschwindigkeit $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$. Damit gilt für den Drehimpuls des Gesamtkörpers:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \int \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm = \Theta \cdot \vec{\omega} \quad (1)$$

wobei Θ der (symmetrische) Trägheitstensor 2. Ordnung ist und folgende Form hat:

$$\Theta = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \quad I_{ab} = \int (\vec{r}^2 \delta_{ab} - x_a x_b) dm$$

Im Allgemeinen sind die Elemente ober- und unterhalb der Hauptdiagonale ungleich Null, d.h. bei einer Rotation fallen Drehimpuls und Rotationsachse nicht zwangsweise zusammen. Für die Rotationsenergie des Gesamtkörpers gilt:

$$E_{\text{rot}} = \int \frac{1}{2} \vec{v}^2 dm = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \Theta \vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{L} \cdot \vec{\omega} \quad (2)$$

Wegen $\vec{\omega}^T \Theta \vec{\omega} = \omega^2 \hat{\omega}^T \Theta \hat{\omega} = \omega^2 \Theta_s$ ist der skalare Wert Θ_s des Trägheitstensors entlang einer Rotationsachse \hat{e} gegeben durch: $\Theta_s = \hat{e}^T \Theta \hat{e}$. Die Flächen konstanten skalaren Trägheitsmomentes Θ_s sind Rotationsellipsoide und werden als *Trägheitsellipsoid* bezeichnet. Durch Hauptachsentransformation kann der Trägheitstensor diagonalisiert werden, dann fallen die Koordinatenachsen mit den Halbachsen des Trägheitsellipsoides, den *Hauptachsen*, zusammen. Die Diagonalelemente A , B und C des diagonalisierten Trägheitstensors werden als *Hauptträgheitsmomente* bezeichnet. Das Trägheitsmoment in einer gegebenen Richtung mit den Winkeln α , β und γ zu den Hauptachsen beträgt:

$$\Theta_s = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma \quad (3)$$

1 Drehimpulserhaltung

Zunächst soll die Drehimpulserhaltung mit einem Fahrradkreisel und einem Drehschemel, auf dem der Experimentator sitzt, untersucht werden. Das System Experimentator E, Drehschemel DS und Fahrradkreisel FK ist nur um die z -Achse frei drehbar, sodass jeweils nur die z -Komponente des Drehimpulses erhalten ist. Der Gesamtdrehimpuls setzt sich aus dem Drehimpuls \vec{L}_{FK} des Fahrradkreisels und dem Drehimpuls \vec{L}_{DS} des Gesamtsystems um die Drehschemelachse ohne Berücksichtigung der Kreiselrotation zusammen¹:

$$\vec{L}_{\text{ges}} = \vec{L}_{\text{FK}} + \vec{L}_{\text{DS}}$$

¹Dies kann man so einsehen: Wir zerlegen das Integral $\vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{v} dm$ in das Integral über den Experimentator (konstante Winkelgeschwindigkeit ω_{DS}) und das Integral über den Fahrradkreisel. Für den Fahrradkreisel gilt aufgrund der vektoriellen Addition von Geschwindigkeiten (\vec{a} sei der Vektor von der Drehachse des Schemels zur Drehachse des Kreisels):

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \int \vec{r} \times (\omega_{\text{DS}} \vec{r} + \omega_{\text{FK}} (\vec{r} - \vec{a})) dm \\ &= \int \vec{r} \times \omega_{\text{DS}} \vec{r} dm + \int \vec{r} \times \omega_{\text{FK}} (\vec{r} - \vec{a}) dm \\ \text{Mit der Koordinatentransformation } \vec{r} &= \vec{p} + \vec{a} \text{ folgt:} \\ &= \int \vec{r} \times \omega_{\text{DS}} \vec{r} dm + \int \vec{p} \times \omega_{\text{FK}} \vec{p} dm + \int \vec{a} \times \omega_{\text{FK}} \vec{p} dm \end{aligned}$$

Das erste Integral entspricht dem Drehimpuls des *ruhenden* Kreisels und ergibt zusammen mit dem Integral über den Experimentator \vec{L}_{DS} , das zweite Integral entspricht dem Drehimpuls \vec{L}_{FK} des rotierenden Kreisels und das dritte Integral verschwindet, da die Integration über φ Null ergibt:

$$\int \vec{a} \times \omega_{\text{FK}} \vec{p} dm = \rho \iiint \omega_{\text{FK}} |\vec{a}| |\vec{p}| \sin \varphi p d\varphi dz dp$$

Für die z -Komponente gilt speziell:

$$L_z = \Theta_{\text{FK}} \cdot \sin \alpha \cdot \omega_{\text{FK}} + \Theta_{\text{DS}} \cdot \omega_{\text{DS}} = \text{const}$$

Ableiten nach der Zeit führt auf folgende Differentialgleichung:

$$\frac{d}{dt} \omega_{\text{DS}} = -\frac{\Theta_{\text{FK}}}{\Theta_{\text{DS}}} \frac{d}{dt} (\sin \alpha \cdot \omega_{\text{FK}}) = -k \frac{d}{dt} (\sin \alpha \cdot \omega_{\text{FK}}) \quad (4)$$

Integration der Gleichung (4) ergibt:

$$\omega_{\text{DS}}(t) - \omega_{\text{DS}}(0) = -k (\sin \alpha(t) \cdot \omega_{\text{FK}}(t) - \sin \alpha(0) \cdot \omega_{\text{FK}}(0))$$

Je nach Anfangsbedingungen lassen sich nun verschiedene Versuche durchführen:

1. **Experimentator und Fahrradkreisel (Achse senkrecht) drehen sich zunächst nicht**, $\omega_{\text{FK}}(0) = \omega_{\text{DS}}(0) = 0$, $\alpha(t) = \pi/2$. Der Gesamtdrehimpuls in z -Richtung ist also $L_{\text{ges}} = 0$. Versetzt der Experimentator den Kreisel in Drehung, so bewegt er sich auf dem Drehstuhl um den Faktor k langsamer in entgegengesetzter Drehrichtung:

$$\omega_{\text{DS}}(t) = -k \cdot \omega_{\text{FK}}(t)$$

2. **Wie 1, Kreiselachse variabel**. Der Gesamtdrehimpuls ist weiterhin 0, die Rotation des Drehstuhls also entgegengesetzt zu der des Fahrradkreisels. Kippt der Experimentator die Kreiselachse während des Versuchs, so ändert er die z -Komponente des Drehimpulses des Fahrradkreisels und ändert damit die Winkelgeschwindigkeit des Stuhls. Für $\alpha = 0$ (Kreiselachse waagrecht) bleibt der Stuhl in Ruhe, die Rotationsrichtungen für $\alpha < 0$ und $\alpha > 0$ sind entgegengesetzt:

$$\omega_{\text{DS}}(t) = -k \cdot \sin \alpha(t) \cdot \omega_{\text{FK}}(t)$$

3. **Ruhender Experimentator erhält den drehenden Kreisel (Achse senkrecht) von außen**, $\omega_{\text{DS}}(0) = 0$, $\omega_{\text{FK}}(0) = \omega_{\text{FK}}^0$, $\alpha(t) = \pi/2$. Der Gesamtdrehimpuls des Systems S in z -Richtung beträgt nun $L_{\text{ges}} = \omega_{\text{FK}}^0$. Es gilt:

$$\omega_{\text{DS}}(t) = -k \cdot (\omega_{\text{FK}}(t) - \omega_{\text{FK}}^0)$$

Da $\omega_{\text{FK}}(0) = \omega_{\text{FK}}^0$ gilt, bleibt der Drehschemel in Ruhe.

4. **Wie 3, Kreiselachse variabel**. Der Gesamtdrehimpuls des Systems ist $L_{\text{ges}} = \alpha(0)\omega_{\text{FK}}^0$. Für $\alpha(0) = 0$ ergibt sich Punkt 2. Es gilt nun:

$$\omega_{\text{DS}}(t) = -k \cdot (\sin \alpha(t) \cdot \omega_{\text{FK}}(t) - \sin \alpha(0) \cdot \omega_{\text{FK}}^0)$$

Falls die Kreiselachse zu Beginn senkrecht ($\alpha(0) = \pi/2$) stand, so ist $\alpha(t) \leq \alpha(0)$. Dies bedeutet, dass die Klammer negativ wird und somit Kreisel und Drehstuhl in die gleiche Richtung rotieren: Da der Gesamtdrehimpuls konstant ist, muss der Drehstuhl den Drehimpuls des Kreisels, der durch Kippen der Achse verkleinert wird, ergänzen.

In der Vorbereitungshilfe² wird folgende Konvention zur Bestimmung der Vorzeichen des Drehimpulses empfohlen: Das Vorzeichen von L_{DS} wird mit der Rechten-Hand-Regel bestimmt, wenn man von oben auf den Drehstuhl blickt. Hält man den Fahrradkreisel mit der linken Hand und blickt auf die Seite des rechten (freien) Griffs, so wird das Vorzeichen der Drehrichtung mit der Rechten-Hand-Regel bestimmt.

²[1], S. 4

2 Freie Achsen

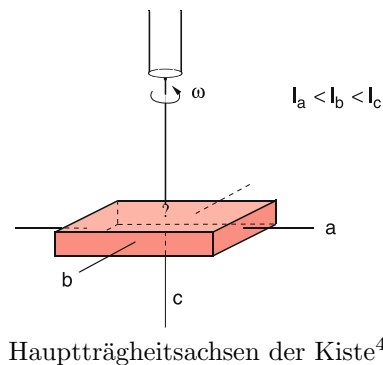
In diesem Versuchsteil soll eine Kiste entlang verschiedener Achsen in Rotation versetzt werden. Dazu besitzt sie Ösen in den Seitenmitten, über die sie mit einem Draht an die Achse eines Motors gehängt werden kann.

Als *freie Achsen* eines Körpers werden diejenigen Achsen bezeichnet, um die der Körper rotieren kann, ohne dass sie extra gelagert werden müssen. \vec{L} und $\vec{\omega}$ zeigen dann in dieselbe Richtung. Falls Drehimpuls und Drehachse nicht zusammenfallen, tritt Nutation auf, d.h. die Richtung der Drehachse ändert sich und um eine konstante Drehachse zu erzwingen, muss die Achse gelagert werden. Bei beliebigen Körpern entsprechen die freien Achsen zwei der Hauptträgheitsachsen:

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \Theta \cdot \vec{\omega} \\ &= \Theta_a \omega_a \hat{e}_1 + \Theta_b \omega_b \hat{e}_2 + \Theta_c \omega_c \hat{e}_3\end{aligned}\quad (5)$$

Es ist leicht ersichtlich, dass für $\Theta_a \neq \Theta_b \neq \Theta_c$ nur dann $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$ gilt, wenn zwei der drei Koeffizienten ω_i verschwinden³, die Rotation also entlang einer Hauptachse verläuft. Die Rotation um die Hauptachse mit mittlerem Trägheitsmoment ist instabil, d.h. bei einer geringfügigen Abweichung von dieser Achse beginnt der Körper zu torkeln. Die freien Achsen entsprechen daher den Hauptachsen mit dem größten bzw. kleinsten Hauptträgheitsmoment.

Das größte Hauptträgheitsmoment entspricht der kürzesten Achse durch den Schwerpunkt der Kiste, das kleinste der längsten Achse. Rotiert die Kiste um die mittlere Hauptträgheitsachse, so wird sie nach einer Störung taumeln und sich schließlich entlang der größten Hauptträgheitsachse ausrichten. Analog würde sie sich verhalten, wenn man sie an einem beliebigen Punkt aufhängt.



3 Kräftefreier symmetrischer Kreisel

Ein Kreisel ist ein starrer Körper, dessen Bewegung durch einen Fixpunkt festgelegt ist⁵. Wählt man als Fixpunkt den Schwerpunkt S und unterstützt den Kreisel dort, so wirken keine Drehmomente auf ihn und man spricht vom *kräftefreien Kreisel*. Aus $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = 0$ folgt, dass der Drehimpuls \vec{L} erhalten ist.

Bei einem symmetrischen Kreisel fallen zwei Hauptträgheitsmomente zusammen, $\Theta_a = \Theta_b$. Die dritte Hauptträgheitsachse wird als *Figurenachse* bezeichnet. Im Normalfall rotiert der Kreisel stabil um seine Figurenachse \vec{c} (freie Achse, siehe vorige Aufgabe). Gibt man ihm nun einen Stoß, so fallen Rotations- und Figurenachse nicht mehr zusammen und die Figurenachse beginnt sich zu drehen. Dieser Effekt heißt *Nutation* und wird im Folgenden untersucht.

Aus dem **Hauptachsensystem** des Kreisels (*kein* Inertialsystem!) betrachtet ergibt sich: Damit der Betrag des Drehimpulses konstant ist, liegt die Spitze des Drehimpulsvektors auf einer Kugeloberfläche mit Radius $|\vec{L}| = \text{const}$ um den Schwerpunkt des Kreisels:

$$1 = \frac{L_a^2}{L^2} + \frac{L_b^2}{L^2} + \frac{L_c^2}{L^2}$$

³Sonderfälle gelten bei sphärischen ($\Theta_a = \Theta_b = \Theta_c$, alle Achsen sind frei) oder symmetrischen Kreiseln ($\Theta_a = \Theta_b \neq \Theta_c$, alle Achsen senkrecht zur Symmetrieachse sind frei) Vgl. [2], Kap. 5.7.3.

⁴[2], S. 157.

⁵[1], S. 1.

Da der Kreisel nach dem Anstoßen von außen nicht mehr beeinflusst wird, gilt der Energieerhaltungssatz, d.h. $E_{\text{rot}} = \text{const}$. Im Hauptachsensystem des Kreisels ergibt sich durch Kombination von (2) und (5):

$$\begin{aligned} E_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \vec{L} \cdot \vec{\omega} \\ &= \frac{1}{2} (\Theta_a \omega_a^2 + \Theta_b \omega_b^2 + \Theta_c \omega_c^2) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{L_a^2}{\Theta_a} + \frac{L_b^2}{\Theta_b} + \frac{L_c^2}{\Theta_c} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

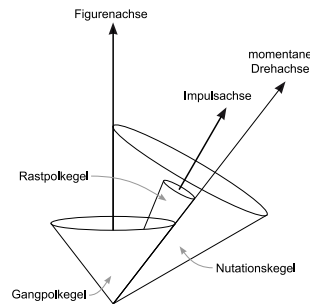
Dies ist die Gleichung eines Rotationsellipsoides. Um Energie- und Impulserhaltung zugleich erfüllen zu können, muss der Drehimpulsvektor auf der Schnittkurve dieses Energieellipsoides mit der Drehimpulsugel liegen. Im Fall des symmetrischen Kreisels ist diese Schnittkurve ein Kreis. Da die Rotation um die Figurenachs $\omega_c = \vec{\omega} \cdot \vec{c}$ konstant ist⁶, muss sich $\vec{\omega}$ ebenfalls auf einem Kegel mit der Rotationsachse \vec{c} bewegen.

Im **Laborsystem** (Inertialsystem) ist der Drehimpulsvektor eine Erhaltungsgröße und somit in Betrag und Richtung konstant. Aus (2) folgt:

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L} = \text{const}$$

Folglich ist die Projektion von $\vec{\omega}$ auf \vec{L} zeitlich konstant, d.h. der Endpunkt von $\vec{\omega}$ liegt in einer festen Ebene $E_{\text{rot}} = \text{const}$, der *invariablen Ebene*. Bildet man in Gleichung (6) $\nabla E_{\text{rot}} = \Theta \cdot \vec{\omega} = \vec{L}$, so sieht man, dass die Tangentialebene des Energieellipsoides stets senkrecht auf den Drehimpuls steht. Dies gilt natürlich auch im Laborsystem⁷, d.h. das Energieellipsoid rollt auf der invariablen Ebene ab. Diese Bewegung wird durch folgende Kegel beschrieben:

- Die *Spurkurve* des Ellipsoides in der invariablen Ebene ist der Schnitt des raumfesten *Rastpolkegels* (Kegelachse: Drehimpuls \vec{L}) mit der invariablen Ebene.
- Die *Polkurve*, die die Ebene auf dem Ellipsoid hinterlässt, ist der Schnitt des körperfesten *Gangpolkegels* (Kegelachse: Figurenachs \vec{c}) mit dem Energieellipsoid.
- Die Figurenachs durchläuft den *Nutationskegel* um die Drehimpulsachs.



Die Kegel der Kreiselbewegung eines abgeplatteten Kreisels⁸

Dabei gelten folgende Zusammenhänge:

- Die Spitzen aller Kegel liegen im Schwerpunkt S des Kreisels.
- Die momentane Drehachs ist die Berührungslinie zwischen Gang- und Rastpolkegel.
- Bei einem *abgeplatteten Kreisel* ist die Figurenachs die Hauptträgheitsachs mit dem *größten* Trägheitsmoment. Der Gangpolkegel umschließt dann wie abgebildet den Rastpolkegel, d.h. er rollt mit seiner Innenseite auf dem Rastpolkegel ab.

⁶Dies kann man z.B. aus den Euler'schen Gleichungen des kräftefreien symmetrischen Kreisels ersehen.

⁷allerdings wird hier die Rechnung schwieriger.

⁸<https://lp.uni-goettingen.de/get/originalimage/4209>, 2012-04-05.

- Bei einem *verlängerten Kreisel* besitzt die Figurenachse das *kleinste* Trägheitsmoment. Der Gangpolkegel rollt dann mit seiner Außenseite auf dem Rastpolkegel ab.

Die Nutationsfrequenz ω_n , mit der die Figurenachse um die Drehimpulsachse rotiert, erhält man durch Zerlegung von $\vec{\omega}$ in einen Anteil parallel zu \vec{L} und einen Anteil parallel zu \vec{c} . Für kleine Öffnungswinkel der Kegel gilt, wie in der Vorbereitungshilfe hergeleitet:

$$\omega_n = \frac{\Theta_c}{\Theta_a} \cdot \omega \quad (7)$$

In der Praxis hängt der Kreisel jedoch in einer Kardan-Aufhängung. Dadurch müssen bei Bewegungen senkrecht zur Kreiselachse der innere bzw. sogar beide Kardanrahmen mitbewegt werden. Die Gleichung (7) muss daher korrigiert werden:

$$\omega_n = \frac{\Theta_c}{\sqrt{A \cdot B}} \cdot \omega \quad (8)$$

mit (für symmetrische Kreisel gilt weiterhin $\Theta_a^{\text{Kreisel}} = \Theta_b^{\text{Kreisel}}$):

$$\begin{aligned} A &= \Theta_a^{\text{Kreisel}} + \Theta_a^{\text{Innenkardan}} + \Theta_a^{\text{Außenkardan}} \\ B &= \Theta_b^{\text{Kreisel}} + \Theta_b^{\text{Innenkardan}} \end{aligned}$$

Zur **Messung der Kreiselfrequenz** ist auf dem Kreisel ein Reflektor angebracht. Dieser wird mit einem Laser beleuchtet. Ein Fototransistor nimmt das so erzeugte periodische Lichtsignal auf und wandelt es in elektrische Pulse um, die mit einem Frequenzzähler ausgewertet werden.

Die **Messung der Nutationsfrequenz** verläuft analog mit einer zweiten Laser-Fototransistor-Kombination. Die Messapparaturen sollen am A-Eingang der Frequenzzähler angeschlossen werden und die Parameter „Auto-Triggerung“ sowie Dämpfung „1-25“ verwendet werden. Die Drehfrequenz des Kreisels soll anfangs bei $1000 \text{ min}^{-1} \approx 17 \text{ s}^{-1}$ liegen und anschließend alle $0,5 \text{ s}^{-1}$ eine Messung durchgeführt werden (ca 35 Stück also).

In einem zweiten Versuchsteil wird das Trägheitsmoment des äußeren Kardanrahmens durch zwei Zusatzgewichte auf der inneren Kardanachse vergrößert. Damit das Trägheitsmoment des inneren Rahmens nicht verändert wird, dürfen sich die Gewichte nicht mit dem inneren Rahmen mitdrehen können. Das zusätzliche Trägheitsmoment des äußeren Kardanrahmens kann mit dem Steiner'schen Satz berechnet werden. R sei der Radius der Zylinder, m ihre Masse und l der Abstand der Zylinderachsen von der Drehachse des äußeren Kardanrahmens:

$$\Theta_{\text{zus}} = 2 \cdot \Theta_{\text{Zyl}} + 2 \cdot m_{\text{Zyl}} \cdot l^2 = m_{\text{Zyl}} (R^2 + 2 \cdot l^2)$$

4 Dämpfung des Kreisels

In diesem Versuchsteil soll die Dämpfung des Kreisels untersucht werden. Der Kreisel wird zunächst auf $2000 \text{ min}^{-1} \approx 33 \text{ s}^{-1}$ beschleunigt. Mit der Messstoppvorrichtung wird dann alle 30 s die aktuelle Drehfrequenz abgelesen, bis der Kreisel zur Ruhe gekommen ist.

5 Kreisel unter dem Einfluß äußerer Drehmomente

Nun wird das Verhalten des Kreisels untersucht, wenn ein Drehmoment $\vec{M} = \dot{\vec{L}}$ senkrecht zum Drehimpulsvektor an ihm angreift⁹. Bringt man dazu ein Gewicht am Kreisel an, so erzeugt es das Drehmoment $\vec{M} = \vec{r} \times mg\hat{e}_z$. Unter der Annahme, dass die Eigenrotation ω des Kreisels sehr viel größer ist, als seine Präzessionsfrequenz ω_p , folgt daraus¹⁰:

$$\vec{M} = \vec{\omega}_p \times \vec{L} \quad |\vec{\omega}_p| = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dL}{dt} \cdot \frac{1}{L} = \frac{M}{L} = \frac{r \cdot m \cdot g}{\Theta_c \cdot \omega} \quad (9)$$

⁹Ein Drehmoment parallel zum Drehimpulsvektor beschleunigt oder verzögert die Rotation des Kreisels und führt ansonsten zu keiner weiteren Bewegung des Kreisels.

¹⁰[1], S. 11 f.

Es ist zu beachten, dass Gleichung (9) nur die *mittlere* Präzessionsfrequenz darstellt. Der Präzession des Kreisels ist eine Nutation überlagert, die dadurch hervorgerufen wird, dass der Kreisel zunächst unter dem äußeren Drehmoment absinkt und erst dann die Präzessionsbewegung beginnt. Sie ist jedoch bei hoher Eigenrotation ω des Kreisels kaum beobachtbar, da sie durch Lagerreibung rasch gedämpft wird. Man spricht daher von **Pseudoregulärer Präzession**.

Zur **Messung der Präzessionsfrequenz** wird ein Gewicht an einer Stange am inneren Kardanrahmen in der Verlängerung der Kreiselachse befestigt. Um das Absinken des Kreisels zu Beginn der Messung zu kompensieren, soll die Kreiselachse anfangs leicht nach oben weisen. Die Nutation lässt sich beim Start durch einen kleinen Stoß in Richtung der Präzessionsbewegung minimieren und später durch Dämpfen des inneren Kardanrahmens von Hand vermindern. Die Eigenrotationsfrequenz des Kreisels wird wie in der vorigen Aufgabe mit der Laser-Lichtschranke bestimmt. Sofern die Bewegung des äußeren Kardanrahmens nicht ebenfalls durch eine Lichtschranke gemessen werden kann, muss die Umlaufzeit von Hand gestoppt werden. Da die Präzessionsfrequenz ein Mittelwert ist, muss als mittlere Drehfrequenz des Kreisels der Mittelwert der Drehzahlen zu Beginn und Ende der Messung verwendet werden. Der Kreisel soll zunächst auf $1000 \text{ min}^{-1} \approx 17 \text{ s}^{-1}$ beschleunigt werden.

6 Hauptträgheitsmomente

Nun sollen die Hauptträgheitsmomente des Kreisels aus den gemessenen Nutations- und Präzessionsfrequenzen errechnet werden und die Masse des Rotors abgeschätzt werden. Benötigt werden dazu die Gleichungen (8) und (9):

$$\omega_n = \frac{\Theta_c}{\sqrt{A \cdot B}} \cdot \omega \quad (8a)$$

$$A = \Theta_a^{\text{Kreisel}} + \Theta_a^{\text{Innenkardan}} + \Theta_a^{\text{Außenkardan}}$$

$$B = \Theta_b^{\text{Kreisel}} + \Theta_b^{\text{Innenkardan}}$$

$$\omega_p = \frac{r \cdot m \cdot g}{\Theta_c} \cdot \frac{1}{\omega} \quad (9a)$$

Aus (9a) und der Regressionsgerade aus Aufgabe 5 kann Θ_c bestimmt werden. Setzt man dieses Ergebnis in (8a) ein, so können mit den Regressionsgeraden aus Aufgabe 3 die Werte A und B bestimmt werden. Darüber erhält man wiederum $\Theta_a = \Theta_b$ des Rotors. Gleichzeitig kann aus Θ_c und dem Radius des Rotors seine Masse bestimmt werden:

$$\Theta_c = \int r^2 dm = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^R r^2 \cdot r dr dz d\varphi = \frac{M}{\pi R^2 \cdot h} \cdot 2\pi \cdot h \cdot \frac{1}{4} R^4 = \frac{1}{2} MR^2$$

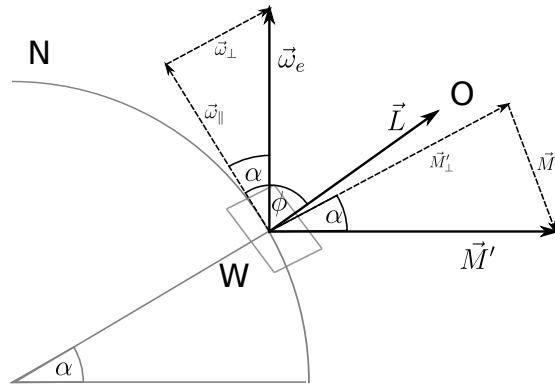
Der so ermittelte Wert für M gilt nur näherungsweise, da die Achse, an der der Rotorkörper hängt, und die Lager ebenfalls Trägheitsmomente besitzen, die hier vernachlässigt wurden.

7 Kreisel im beschleunigten Bezugssystem

Zuletzt soll der Kreiselkompass als Anwendung der oben untersuchten Kreiselgesetze näher betrachtet werden. Es handelt sich um einen Kreisel (Rotationsfrequenz ω um die Figurenachse), der sich in seiner Aufhängung nur horizontal drehen kann (man sagt, er ist *horizontal gebunden*). Dadurch wirkt der Horizontalanteil $\vec{\omega}_{\parallel}$ der Erdrotation $\vec{\omega}_e$ als Zwangsdrehung auf ihn. Der Kreisel erfährt dadurch das Drehmoment $\vec{M}_{\perp} = \vec{\omega}_{\parallel} \times \vec{L}$ und übt somit das Drehmoment

$$\vec{M}'_{\perp} = -\vec{M}_{\perp} = \vec{L} \times \vec{\omega}_{\parallel} = \Theta_c \omega \cdot \omega_{\parallel} \cdot \sin \phi$$

auf sein Lager aus, wobei ϕ der Winkel zwischen \vec{L} und $\vec{\omega}_{\parallel}$ ist.



Drehimpuls und Drehmoment beim Kreiselkompass in der geographischen Breite α

Da $\vec{\omega}_e$ in Nord-Süd-Richtung zeigt (Drehachse der Erde), zeigt $\vec{\omega}_{\parallel}$ als Projektion in die Horizontalebene auch nach Norden. \vec{M}'_{\perp} steht senkrecht auf die Erdoberfläche und dreht den Kreisel in der Horizontalebene solange, bis bei $\phi = 0$ das Drehmoment verschwindet. Die Kreiselachse schwingt sich daher mit der Zeit auf die Nordrichtung ein. Wegen $\omega_{\parallel} = \omega_e \cdot \cos \alpha$ versagt der Kreiselkompass am Nord- oder Südpol (geographische Breite $\alpha = \pm 90^\circ$), dort ist keine Nord-Süd-Richtung definiert.

Da die Winkelgeschwindigkeit der Erdachse ($|\vec{\omega}_e| = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$) sehr klein ist, muss der Kreisel einen sehr hohen Drehimpuls besitzen, um die Lagerreibung überwinden zu können und sich nach Norden zu drehen. Deshalb simulieren wir die Erdrotation durch einen Drehtisch (größeres ω_e), sodass der Kreisel nicht so schnell rotieren muss. Steht der Kreisel mit arretiertem Innenkardan (horizontale Bindung) direkt auf dem Drehtisch, so entspricht dies einem Kreiselkompass am Nordpol. Durch Unterlegen eines Holzkeils kann die geographische Breite $\alpha \approx 30^\circ$ simuliert werden. Auch bei diesem Experiment mit dem Drehtisch soll der Schwerpunkt des Systems auf der Drehachse des Tisches liegen, damit keine seitlichen Drehmomente auf das Lager des Drehtisches wirken.

Literatur

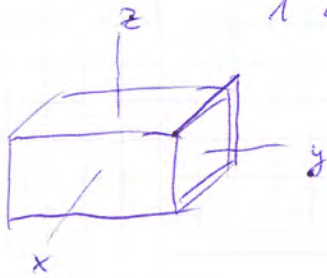
- [1] *Vorbereitungshilfe Fahrradkreisel*, Version Juni 2010.
- [2] Demtröder: *Experimentalphysik 1*.
- [3] Goldstein: *Klassische Mechanik*, 6. Auflage, Akademische Verlagsgesellschaft Wiesbaden, 1981.
- [4] Professor Weiß: *Vorlesung Experimentalphysik A*, KIT, Wintersemester 2010.
- [5] Professor Kühn: *Vorlesung Theoretische Physik B*, KIT, Sommersemester 2011.

Grafiken ohne expliziten Quellenverweis wurden von den Autoren selbst erstellt.

1. Bestätigen Vorbereitungseüberlegungen (Lagerungen suboptimal)

2. " " "

1 instabile Achse (mittlere Durchstößlänge) (x-Achse)



2 stabile Achsen (kurze, lange Durchstößlänge) (y, z-Achse)

3.

Drehzahl (Kreis) $\frac{1}{s}$	Nutationsfrequenz $\frac{1}{s}$	ohne Gewichte
19	9,1	
18	9,0	
17,5		
17,0	8,7	
16,5	8,2	↓
16,0	8,3	
15,4	7,7	
15,0	7,6	
14,5	7,3	
14,0	7,1	
13,5		
13,0	6,7	
12,5	6,4	
12,0	6,2	
11,5	5,8	
11,0	5,6	
10,5	5,3	
10,0	5,1	
9,5	4,8	

Grenzwerte

• $\omega_{rot} = \pm 0,1$

• Schwingweite nicht

bei $\omega_{rot} > 13$

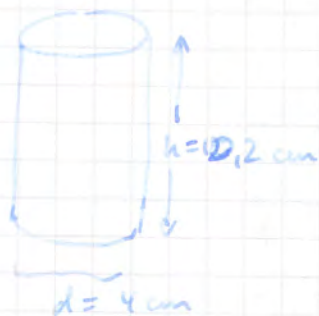
kleiner \rightarrow um Hand

gestimmt

23.4.12

9,0	4,5
8,5	4,3
8,0	4,0
7,5	3,8
7,0	3,6
6,5	3,25
6,0	3,1
5,4	2,7
5,0	2,6
4,5	2,3
3,9	2,1
3,5	1,8
3,0	1,4
2,5	1,2
2,0	
1,5	
1,0	
0,5	

Abmessungen des Gewölbes am äußeren Rahmen:



Abstand byl.-Achse - Deckplatte

$$x = 33,7 \cdot \frac{1}{2} \text{ cm}$$

3

Drehzahl (Kreuz) $\frac{1}{5}$

Mutationsfrequenz $\frac{1}{5}$

mit Gewichten

19	5,3
18,5	5,2
18	5,1
17,5	4,9
17	4,8
16,5	4,7
16	4,5
15,5	4,3
15	4,1
14,5	4,1
14	3,9
13,5	/
13	3,7
12,5	3,5
12	3,4
11,5	3,2
11	3,1
10,5	3,0
10	2,85
9,5	/
9	2,5
8,5	2,4
8	2,3
7,5	2,0
7	1,95
6,5	1,85
6,0	1,8

23.4.12
H

5,5	1,65
5	/
4,5	1,4
4	/
3,5	1,0
3	/
2,5	/
2	/
20	5,8
19,5	

Gegen Ende
Mutationsfrequenz
nicht mehr aufzuheben

4.

t	ω	ω (Hz)
0		32,55
20		31,65
40		29,53
60		28,54
80		28,54
100		28,54
150		27,57
180		26,64
210		25,74
240		24,87
270		24,03
300		23,25
320		22,43
660		21,66
280		20,91
420		20,18
450		19,47
480		18,78
510		18,09
540		17,43
570		16,78
600		16,14
630		15,51
660		14,88
690		14,32
720		13,75
750		13,21
780		12,67
810		12,16
840		11,65
870		11,16

ab jetzt
Winkel
deutlich
geringer

06/21
13/08

(Tafel 4)

D(h)	w (1/h)
800	10,67
850	10,20
900	9,73
950	9,27
1000	8,82
1050	8,38
1080	7,95
1100	7,52
1140	7,10 7,10
1170	6,68
1200	6,27
1230	5,85
1260	5,45
1290	5,05
1320	4,65
1350	4,25
1380	3,87
1410	3,48
1440	3,08
1470	2,70
1500	2,31
1530	1,93
1560	1,56
1590	1,17
1620	0,765
1650	0,358
1680	
1710	
1740	
1770	

24/25 →

5

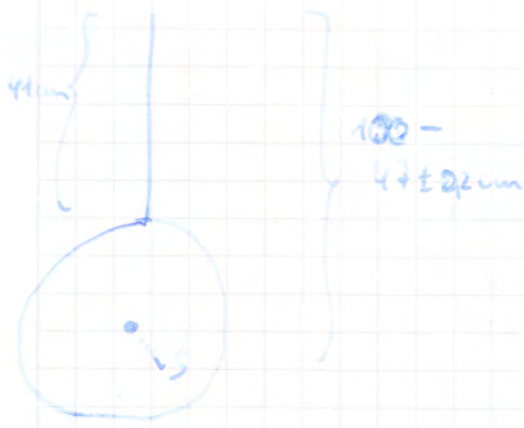
Werte	T(1/2)	→	Werte	→	Werte
58,0	14,36				
55,1	13,04				
52,2	53,43				
	106				
50,1	12,26	s	=	0	12,26
49,6	24,14	s	=	0	24,14
49,3	35,58	s			
48,3	47,21	s			
47,0	58,27	s	=	1	09,49
47,3	105,45	s			
46,5	120,27	s			
46,2	131,50	s			
45,2	142,55	s			
44,8	153,25	s	=	2	09,75
	203,75	s			
43,6	214,25	s			
43,2	224,00	s			

mit der Stange
Stange geht mit
gestaltete → für einen
schlechten
Resultat von.

23.4.12

[Signature]

3



best
Sensibilität
(inner)

m	s	T/1/2	ms
	11,02		70
	21,75		69,3
	32,46		67,4
	52,01		66,5
1	09,25		65,6
1	10,05		64,8
1	13,51		63,8
1	23,17		63,1
1	36,35		62,6
1	46,11		61,5
1	54,73		60,8
2	03,36		60,4
2	12,24		59,4
2	15,31		58,0
2	25,52		57,8
2	39,43		56,8
2	44,62		56,5
2	53,93		55,6
3	00,74		54,6
3	08,60		54,5
3	16,51		53,8
3	32,01		52,3
3	35,15		52,5
3	46,00		51,8
3	53,20		51,7
4	01,02		50,8
4	03,33		50,6
4	15,38		50,4
4	22,05		49,10
4	25,21		48,8
4	37,69		—
4	43,21		—
4	51,22		47,7
4	57,4		47,4
5	04,33		—
5	11,17		46,3
5	18,03		46,2
5	23,51		46,2
5	30,35		45,6
5	37,1		45,4
5	50,01		44,5



α 30° of 20. horizontal
and string

Fods 5)

mit Gradienten

$$d = 33,5$$

$$\gamma = 25^\circ$$

	min	sec	T(r)
	7,41		70,1
			53,2
	14,52		
	5,35		63,6
	12,39		54,8
	18,76		54,2
	25,17		53,6
	31,17		52,6
	37,43		52,0
	43,32		51,5
	49,34		50,8
	55,54		50,1
			50,1
1	07,62		53,0
1	12,81		53,2
1	18,36		54,3
1	24,63		54,5
1	30,23		50,7
1	35,83		50,4
1	41,30		-
1	47,37		55,2
1	52,33		55,2
1	57,32		54,5
2	03,41		54,2
2	08,04		53,5
2	14,06		-
2	19,72		52,4
2	24,84		-
2	29,73		-
2	35,12		-
2	40,60		51,4
2	46,57		50,7
2	53,41		50,5
2	59,54		-
3	03,30		45,4
3	10,72		43,1
3	18,05		-
3	25,34		46,5
3	32,52		-
3	39,31		47,0
3	46,5		-
3	53,10		-
3	59,28		-
4	06,21		40,6
			35,6

23.4.12

JH

⑦ Krümel stellt sich bei Drehung des Tisches
wie erwartet in "Abdriftung" ein.

Aussehen stellt er sich so zu Abdriftung

→ funktioniert!

Physikalisches Praktikum P2

Auswertung zum Versuch

Kreisel

(P2-71)

Sebastian Eisenhardt, Martin Koppenhöfer
(Montag-02)

23. April 2012

1 Drehimpulserhaltung

Im ersten Versuch demonstrierten wir die Drehimpulserhaltung mit einem Drehschemel und einem Fahrradkreisel. Wir führten die in der Vorbereitung aufgeführten Versuche durch und konnten unsere Vorhersagen qualitativ bestätigen.

Da der Drehschemel nicht exakt waagrecht stand, erfuhr der er ein weiteres Drehmoment, wenn wir nicht exakt über der Drehachse saßen. Der Schemel drehte sich dann immer in die Position, an der der Schwerpunkt des Experimentierenden am niedrigsten lag. Dieser Effekt überlagerte die Effekte der Drehimpulserhaltung.

Zusätzlich zu den in der Vorbereitung erklärten Versuchen führten wir auch folgendes Experiment durch: Der Experimentator hält zwei Gewichte in der Hand und streckt die Arme waagrecht aus. Versetzt man ihn in Drehung und zieht er dann die Arme an den Körper, so steigert sich seine Winkelgeschwindigkeit. Durch das Heranziehen der Arme verkleinert sich das Trägheitsmoment des Experimentators um die Rotationsachse. Da der Drehimpuls erhalten sein muss, erhöht sich nach $L = \Theta \cdot \omega$ seine Winkelgeschwindigkeit.

Wir konnten die Drehimpulserhaltung also experimentell bestätigen.

2 Freie Achsen

Nun untersuchen wir das Rotationsverhalten eines Quaders um seine Hauptachsen. Der Draht, über den der Motor mit der Kiste verbunden wurde, war krumm und bog sich bei hohen Rotationsfrequenzen stark durch. Dadurch wirkten störende Drehmomente auf die Rotationsachsen.

Die Rotation um die Hauptachse mit dem größten Trägheitsmoment (in dieser Richtung ist die Figurenachse am kürzesten) war stabil. Bei Rotation um die Achse des mittleren Trägheitsmomentes wurde der Quader durch die Störungen ins Torkeln gebracht und rotierte anschließend um die Achse des größten Trägheitsmomentes. Die Rotation um die Achse des kleinsten Trägheitsmomentes war zunächst stabil. Erst als wir die Störungen durch sehr schnelle Rotation stark erhöhten, torkelte der Quader und rotierte anschließend stabil um die Achse des größten Trägheitsmomentes.

Der Quader besitzt folglich die Achse des größten und kleinsten Trägheitsmomentes als freie Achsen. Allerdings ist die Achse des kleinsten Trägheitsmomentes nur stabil, solange die Störungen einen bestimmten Grenzwert nicht überschreiten.

3 Kräftefreier Kreisel

Wir beschleunigten den Kreisel zunächst auf 19 Umdrehungen/s. Während er durch Reibung langsam seine Eigenrotation ω verringerte, schlugen wir immer wieder auf den inneren Kardanrahmen

und bestimmten die Nutationsfrequenz ω_{Nutation} . Beide Frequenzen wurden mit Lichtschranken und einem Frequenzzähler bestimmt, wobei diese die Drehzahl d (Umdrehungen pro Sekunde) anstatt der Kreisfrequenz anzeigten. Die Anzeige an den Frequenzzählern schwankte in der ersten Nachkommastelle, daher rechnen wir mit einem systematischen Fehler von $\Delta(d) = \Delta(d_{\text{Nutation}}) = 0,1 \text{ s}^{-1}$.

Bei einer zweiten Messung brachten wir an der Achse des inneren Kardanrahmens Gewichte an, um das Trägheitsmoment um die äußere Kardanachse zu erhöhen. Die Gewichte verursachten ein zusätzliches Trägheitsmoment¹, sich nach dem Steiner'schen Satz aus der Masse m der Zylinder, ihren Durchmessern d und dem Abstand l der Zylinderschwerpunkte zur vertikalen Kardanachse ergibt. Den Fehler berechneten wir mit Gauß'scher Fehlerfortpflanzung:

$$\begin{aligned} \Theta_{\text{Gewichte}} &= m \left(\left(\frac{d}{2} \right)^2 + 2l^2 \right) \\ &= 1 \text{ kg} \left(\left(\frac{0,04 \text{ m}}{2} \right)^2 + 2 \cdot (0,149 \text{ m})^2 \right) = 448,0 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2 \\ \Delta(\Theta_{\text{Gewichte}}) &= \sqrt{\left(\frac{d^2}{4} + 2l^2 \right)^2 \cdot \Delta(m)^2 + m^2 \frac{d^2}{4} \cdot \Delta(d)^2 + 16m^2 l^2 \cdot \Delta(l)^2} \\ &= \left[\left(\frac{(0,04 \text{ m})^2}{4} + 2 \cdot (0,149 \text{ m})^2 \right)^2 \cdot (0,001 \text{ kg})^2 \right. \\ &\quad \left. + (1 \text{ kg})^2 \cdot \frac{(0,04 \text{ m})^2}{4} \cdot (1 \cdot 10^{-4} \text{ m})^2 + 16 \cdot (1 \text{ kg})^2 \cdot (0,149 \text{ m})^2 \cdot (0,001 \text{ m})^2 \right]^{1/2} \\ &= 6,0 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2 \end{aligned}$$

Wir erhielten somit:

$$\Theta_{\text{Gewichte}} \pm \Delta(\Theta_{\text{Gewichte}}) = (448,0 \pm 6,0) \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$$

Die Nutationsfrequenz hängt linear von der Drehfrequenz des Kreisel ab:

$$\begin{aligned} \omega_{\text{Nutation}} &= \frac{\Theta_c}{\sqrt{A \cdot B}} \cdot \omega \\ A &= \Theta_a^{\text{Kreisel}} + \Theta_a^{\text{Innenkardan}} + \Theta_a^{\text{Außenkardan}} \\ B &= \Theta_b^{\text{Kreisel}} + \Theta_b^{\text{Innenkardan}} \end{aligned}$$

Dabei ist c die Figurenachse des Kreisel und a und b die Kardanachsen. Unsere Messergebnisse zeigt Abbildung 1. Mit *Gnuplot* führten wir eine lineare Regression durch. Es ergaben sich folgende Steigungen:

Lineare Regression zu Aufgabe 3

	Steigung $m_n \cdot 10^{-4}$	statistischer Fehler $\sigma(m_n) \cdot 10^{-4}$
ohne Gewichte	5043,74	19,48
mit Gewichten	2820,38	9,45

Die Messwerte zeigen deutlich einen linearen Zusammenhang, die statistischen Fehler der Geradensteigungen sind dementsprechend sehr gering.

4 Dämpfung des Kreisels

Nun untersuchten wir die Dämpfung des Kreisels. Dazu beschleunigten wir ihn auf 33 Umdrehungen/s und maßen alle 30 s seine momentane Drehzahl. Die Messwerte zeigt Abbildung 2. Man

¹Im Folgenden ist $\Delta(f)$ der systematische Messfehler der Größe f und $\sigma(f)$ ihr statistischer Fehler. Sofern nicht anders vermerkt, werden Messwerte in der Form $f \pm \sigma(f) \pm \Delta(f)$ angegeben.

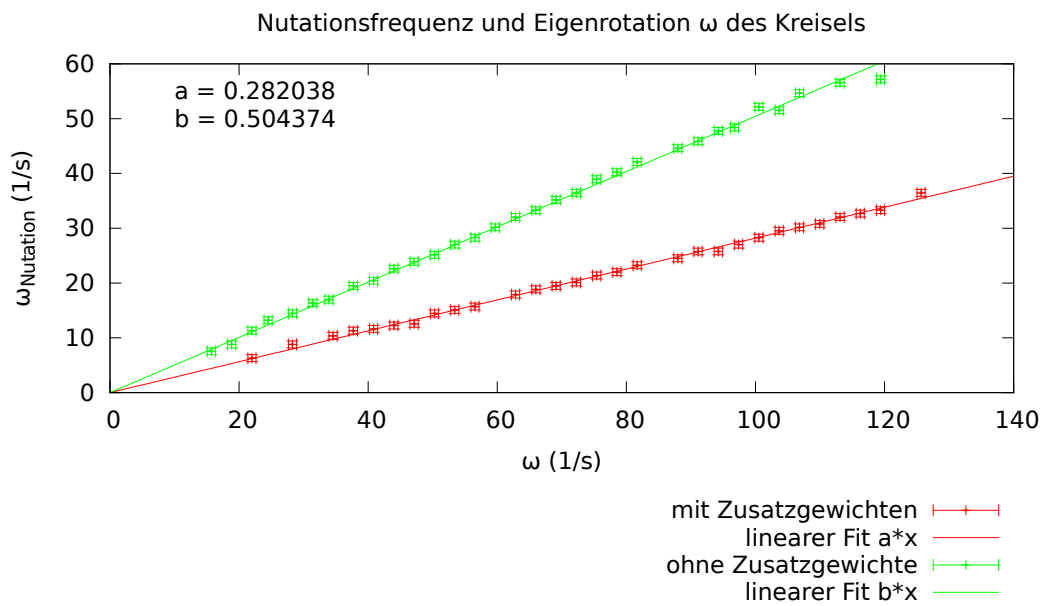


Abbildung 1: Zusammenhang zwischen Nutations- und Drehfrequenz des Kreisels

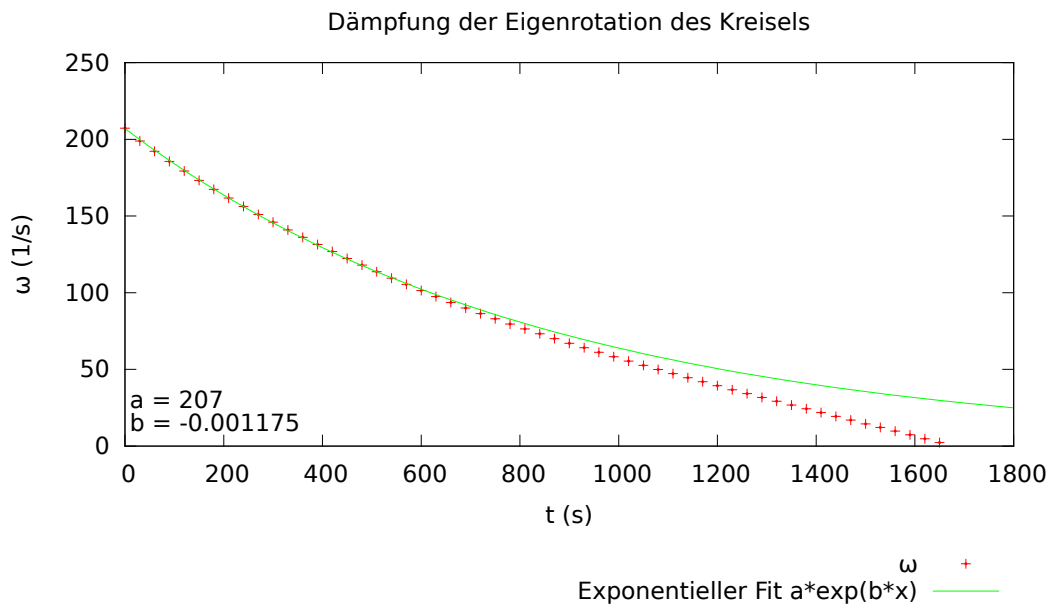


Abbildung 2: Dämpfung des Kreisels

erkennt, dass die Dämpfungskurve zu Beginn einen exponentiellen Abfall zeigt. Gegen Ende treten offensichtlich weitere Reibungsterme auf.

5 Kreisel mit äußeren Drehmomenten

In dieser Aufgabe bestimmten wir die Präzessionsfrequenz des Kreisels in Abhängigkeit von seiner Eigenrotation. Dazu hängten wir ein Gewicht in unterschiedlichen Abständen vom Kreiselschwerpunkt an eine Stange in der Verlängerung seiner Figurenachse. Es verursacht das Drehmoment

$$M = r \cdot mg \cdot \cos \alpha$$

senkrecht zur Figurenachse, wobei α den Winkel zwischen der Figurenachse und der Horizontalen darstellt. Für den Zusammenhang zwischen Präzessions-Kreisfrequenz und Eigenrotation gilt:

$$\omega_p = \frac{r \cdot mg \cdot \cos \alpha}{\Theta_c} \cdot \frac{1}{\omega}$$

Wir führten drei Versuche durch: Zunächst wurde lediglich der Stab angebracht. Dann setzten wir direkt am äußeren Kardanrahmen ein zusätzliches Gewicht auf die Stange. Schließlich positionierten wir das Gewicht etwa in der Mitte der Stange. Dadurch verschob sich jeweils der gemeinsame Schwerpunkt, in dem die Gewichtskraft angreift, und sein Abstand vom Kreisel. Die resultierenden Massen und Schwerpunkte sowie den Startwinkel der Stange zeigt folgende Tabelle:

	r (cm)	$\Delta(r)$ (cm)	m (g)	$\Delta(m)$ (g)	α (°)	$\Delta(\alpha)$ (°)
nur Stab	32,5	0,2	330	1	5	10
Stab, Gewicht am Kardan	23,7	0,2	705	1,4	30	10
Stab, Gewicht in der Mitte	33,0	0,3	705	1,4	25	10

Den Winkel α konnten wir am Versuchsaufbau nur grob abschätzen, daher sind hier die relativen Messfehler sehr groß. Wir trugen unsere Messergebnisse linearisiert auf und bestimmten mit *Gnuplot* die Steigung der Regressionsgeraden. Die Ergebnisse zeigt Abbildung 3.

Lineare Regression zu Aufgabe 5

	Steigung m_p (s ⁻²)	$\sigma(m_p)$ (s ⁻²)
Stab	82,7	0,4
Stab, Gewicht am Kardan	137,4	1,6
Stab, Gewicht in der Mitte	197,7	3,2

6 Hauptträgheitsmomente

Aus den Messwerten der vorherigen Aufgaben bestimmten wir nun die Hauptträgheitsmomente des Kreisels unter Berücksichtigung der zusätzlichen Trägheitsmomente der Kardanrahmen. Aus den Messwerten aus Aufgabe 5 kann man das Trägheitsmoment Θ_c um die Figurenachse des Kreisels berechnen:

$$\Theta_c = \frac{r \cdot mg \cdot \cos \alpha}{m_p}$$

$$\sigma(\Theta_c) = \sqrt{\Theta_c^2 \cdot \left(\frac{\sigma(m_p)}{m_p}\right)^2}$$

$$\Delta(\Theta_c) = \sqrt{\Theta_c^2 \cdot \left(\frac{\Delta(r)}{r}\right)^2 + \Theta_c^2 \cdot \left(\frac{\Delta(m)}{m}\right)^2 + \left(\frac{r \cdot mg \sin \alpha}{m_p}\right)^2 \cdot \Delta(\alpha)^2}$$

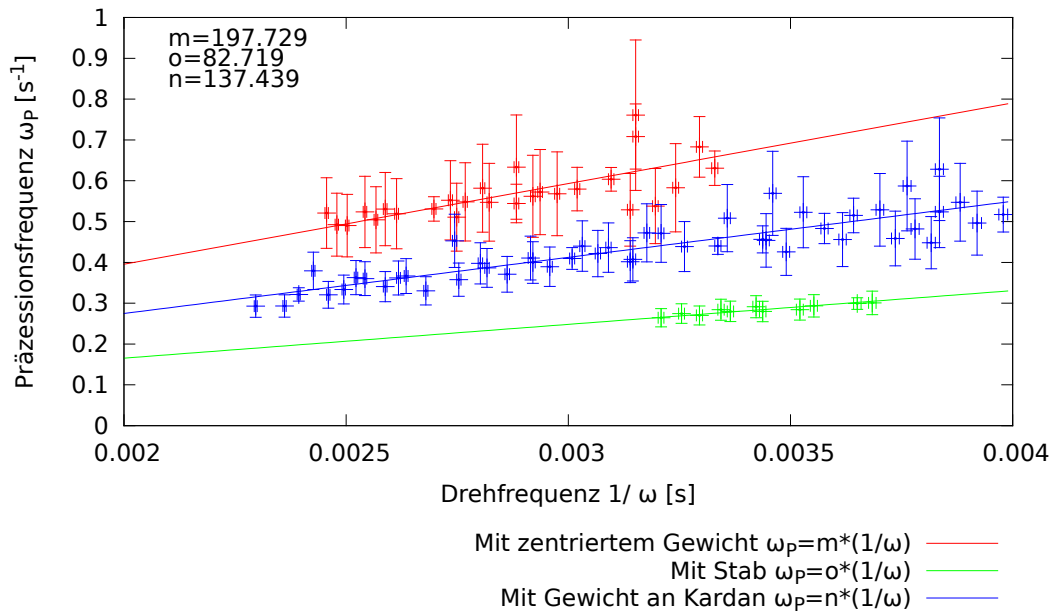


Abbildung 3: Präzessionsfrequenz ω_p in Abhängigkeit der Rotationsfrequenz ω

Für den Stab alleine gilt:

$$\Theta_c^{\text{Stab}} = \frac{0,325 \text{ m} \cdot 0,33 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2} \cdot \cos(5^\circ)}{82,7 \text{ s}^{-2}} = 1267,1 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$$

$$\sigma(\Theta_c^{\text{Stab}}) = \sqrt{(1267,1 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2)^2 \cdot \left(\frac{0,4 \text{ s}^{-2}}{72,5 \text{ s}^{-2}}\right)^2} = 6,8 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$$

$$\Delta(\Theta_c^{\text{Stab}}) = \left[(1267,1 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2)^2 \cdot \left(\frac{0,002 \text{ m}}{0,325 \text{ m}}\right)^2 + (1267,1 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2)^2 \cdot \left(\frac{0,001 \text{ kg}}{0,33 \text{ kg}}\right)^2 + \left(\frac{0,325 \text{ m} \cdot 0,33 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2} \cdot \sin(5^\circ)}{82,7 \text{ s}^{-2}}\right)^2 \cdot (10^\circ)^2 \right]^{1/2}$$

$$= 21,2 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$$

Befindet sich die Masse am Außenkardan, so erhält man:

$$\Theta_c^{\text{Außenkardan}} = \frac{0,237 \text{ m} \cdot 0,705 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2} \cdot \cos(30^\circ)}{137,4 \text{ s}^{-2}} = 1033,8 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$$

$$\sigma(\Theta_c^{\text{Außenkardan}}) = \sqrt{(1033,8 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2)^2 \cdot \left(\frac{1,6 \text{ s}^{-2}}{137,5 \text{ s}^{-2}}\right)^2} = 12,4 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$$

$$\Delta(\Theta_c^{\text{Außenkardan}}) = \left[(1033,8 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2)^2 \cdot \left(\frac{0,002 \text{ m}}{0,237 \text{ m}}\right)^2 + (1033,8 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2)^2 \cdot \left(\frac{0,0014 \text{ kg}}{0,705 \text{ kg}}\right)^2 + \left(\frac{0,237 \text{ m} \cdot 0,705 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2} \cdot \sin(30^\circ)}{137,4 \text{ s}^{-2}}\right)^2 \cdot (10^\circ)^2 \right]^{1/2}$$

$$= 105 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$$

Befindet sich die Masse in der Mitte des Stabes, so gilt:

$$\Theta_c^{\text{Mitte}} = \frac{0,33 \text{ m} \cdot 0,705 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2} \cdot \cos(25^\circ)}{197,7 \text{ s}^{-2}} = 1047,1 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$$

$$\sigma(\Theta_c^{\text{Mitte}}) = \sqrt{(1047,1 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2)^2 \cdot \left(\frac{3,2 \text{ s}^{-2}}{197,7 \text{ s}^{-2}}\right)^2} = 16,8 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$$

$$\Delta(\Theta_c^{\text{Mitte}}) = \left[(1047,1 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2)^2 \cdot \left(\frac{0,003 \text{ m}}{0,33 \text{ m}}\right)^2 + (1047,1 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2)^2 \cdot \left(\frac{0,0014 \text{ kg}}{0,705 \text{ kg}}\right)^2 + \left(\frac{0,33 \text{ m} \cdot 0,705 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2} \cdot \sin(25^\circ)}{197,7 \text{ s}^{-2}}\right)^2 \cdot (10^\circ)^2 \right]^{1/2}$$

$$= 85,7 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$$

Für die drei Messungen zur Präzessionsfrequenz ergaben sich folgende Werte:

	Θ_c (10^{-5} kg m^2)	$\sigma(\Theta_c)$ (10^{-5} kg m^2)	$\Delta(\Theta_c)$ (10^{-5} kg m^2)
Stab	1267,1	6,8	21,2
Stab, Gewicht am Kardan	1033,8	12,4	105
Stab, Gewicht in der Mitte	1047,1	16,8	85,7

Zur weiteren Rechnung in Aufgabe 6 bestimmten wir den gewichteten Mittelwert von Θ_c :

$$\Theta_c = (1244,8 \pm 5,6 \pm 20,2) \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$$

Aus Aufgabe 3 lassen sich nun A und B bestimmen. Für A gilt:

$$A = \frac{\Theta_{\text{Gewichte}}}{\left(\frac{m_n^{\text{ohne}}}{m_n^{\text{mit}}}\right)^2 - 1}$$

$$\sigma(A) = \Theta_{\text{Gewichte}} \cdot \frac{2 \frac{m_n^{\text{ohne}}}{m_n^{\text{mit}}}}{\left(\left(\frac{m_n^{\text{ohne}}}{m_n^{\text{mit}}}\right)^2 - 1\right)^2} \cdot \sqrt{\sigma(m_n^{\text{ohne}})^2 + \frac{(m_n^{\text{ohne}})^2}{(m_n^{\text{mit}})^4} \cdot \sigma(m_n^{\text{mit}})^2}$$

$$\Delta(A) = \sqrt{\frac{\Delta(\Theta_{\text{Gewichte}})^2}{\left(\left(\frac{m_n^{\text{ohne}}}{m_n^{\text{mit}}}\right)^2 - 1\right)^2}}$$

In Zahlen bedeutet das:

$$A = \frac{448 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2}{\left(\frac{5043,74 \cdot 10^{-4}}{2820,38 \cdot 10^{-4}}\right)^2 - 1} = 2038,2 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$$

$$\sigma(A) = 448 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2 \cdot \frac{2 \frac{5043,74 \cdot 10^{-4}}{2820,38 \cdot 10^{-4}}}{\left(\left(\frac{5043,74 \cdot 10^{-4}}{2820,38 \cdot 10^{-4}}\right)^2 - 1\right)^2} \cdot \sqrt{\sigma(19,48 \cdot 10^{-4})^2 + \frac{(5043,74 \cdot 10^{-4})^2}{(2820,38 \cdot 10^{-4})^4} \cdot \sigma(9,45)^2}$$

$$= 20,9 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$$

$$\Delta(A) = \sqrt{\frac{\Delta(6 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2)^2}{\left(\left(\frac{5043,74 \cdot 10^{-4}}{2820,38 \cdot 10^{-4}}\right)^2 - 1\right)^2}} = 27,2 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$$

B erhält man wie folgt:

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{\Theta_c^2}{A \cdot (m_n^{\text{ohne}})^2} \\
 \sigma(B) &= \sqrt{\left(\frac{\Theta_c^2}{(m_n^{\text{ohne}})^2 \cdot A^2}\right)^2 \sigma(A)^2 + \left(\frac{2 \cdot \Theta_c}{A \cdot (m_n^{\text{ohne}})^2}\right)^2 \sigma(\Theta_c)^2 + \left(\frac{2 \cdot \Theta_c^2}{A \cdot (m_n^{\text{ohne}})^3}\right)^2 \sigma(m_n^{\text{ohne}})^2} \\
 &= B \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma(A)}{A}\right)^2 + 4 \left(\frac{\sigma(\Theta_c)}{\Theta_c}\right)^2 + 4 \left(\frac{\sigma(m_n^{\text{ohne}})}{m_n^{\text{ohne}}}\right)^2} \\
 \Delta(B) &= \sqrt{\left(\frac{\Theta_c^2}{(m_n^{\text{ohne}})^2 \cdot A^2}\right)^2 \Delta(A)^2 + \left(\frac{2 \cdot \Theta_c}{A \cdot (m_n^{\text{ohne}})^2}\right)^2 \Delta(\Theta_c)^2} \\
 &= B \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta(A)}{A}\right)^2 + 4 \left(\frac{\Delta(\Theta_c)}{\Theta_c}\right)^2}
 \end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{(1244,8 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2)^2}{2038,2 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2 \cdot (5043,74 \cdot 10^{-4})^2} = 2988,4 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2 \\
 \sigma(B) &= 2988,4 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2 \cdot \sqrt{\left(\frac{20,9 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2}{2038,2 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2}\right)^2 + 4 \left(\frac{5,6 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2}{1244,8 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2}\right)^2 + 4 \left(\frac{19,48 \cdot 10^{-4}}{5043,74 \cdot 10^{-4}}\right)^2} \\
 &= 46,9 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2 \\
 \Delta(B) &= 2988,4 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2 \cdot \sqrt{\left(\frac{27,2 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2}{2038,2 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{20,2 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2}{1244,8 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2}\right)^2} \\
 &= 104,9 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2
 \end{aligned}$$

Zusätzlich sollten wir noch die Rotormasse aus Θ_c und seinem Durchmesser d abschätzen:

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{2 \cdot \Theta_c}{(d/2)^2} \\
 \sigma(M) &= \sqrt{\frac{4}{(d/2)^4} \cdot \sigma(\Theta_c)^2} \\
 \Delta(M) &= \sqrt{\frac{4}{(d/2)^4} \cdot \Delta(\Theta_c)^2 + \frac{4 \cdot \Theta_c^2}{(d/2)^6} \cdot \Delta(d)^2}
 \end{aligned}$$

Explizit bedeutet das:

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{2 \cdot 1244,8 \cdot 10^5 \text{ kg m}^2}{((0,135 \text{ m})/2)^2} \\
 &= 5,464 \text{ kg} \\
 \sigma(M) &= \sqrt{\frac{4}{((0,135 \text{ m})/2)^4} \cdot (5,6 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2)^2} \\
 &= 0,025 \text{ kg} \\
 \Delta(M) &= \sqrt{\frac{4}{((0,135 \text{ m})/2)^4} \cdot (20,2 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2)^2 + \frac{4 \cdot (1244,8 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2)^2}{((0,135 \text{ m})/2)^6} \cdot (0,0001 \text{ m})^2} \\
 &= 0,089 \text{ kg}
 \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich folgende Messergebnisse:

Hauptträgheitsmomente und Rotormasse

Größe		Wert	σ	Δ
Θ_c	(10^{-5} kg m ²)	1244,8	5,6	20,2
A	(10^{-5} kg m ²)	2038,2	20,9	27,2
B	(10^{-5} kg m ²)	2988,4	46,9	104,9
M	(kg)	5,464	0,025	0,089

Das Trägheitsmoment Θ_c des Kreisels um seine Figurenachse ist am kleinsten, obwohl die Figurenachse mit der Achse des größten Trägheitsmomentes des Kreiselrotors zusammenfällt. Die Beiträge der Kardanaufhängung zu A und B sind offensichtlich sehr groß. Da die Kardanrahmen aus massivem Metall bestehen, ist dieses Resultat verständlich. $B = \Theta_b^{\text{Kreisel}} + \Theta_b^{\text{Innenkardan}}$ ist größer als $A = \Theta_a^{\text{Kreisel}} + \Theta_a^{\text{Innenkardan}} + \Theta_a^{\text{Äußenkardan}}$, d.h. das Trägheitsmoment bei Rotation um die innere Kardanachse ist größer, als das um die äußere Kardanachse. Dies erscheint plausibel, da $\Theta_a^{\text{Kreisel}} = \Theta_b^{\text{Kreisel}}$ (symmetrischer Kreisel) gilt und der innere Kardanrahmen ein kompletter Ring ist, während der äußere Kardanrahmen nur ein Halbring ist.

7 Kreisel im beschleunigten Bezugssystem

Zuletzt studierten wir die Funktionsweise eines Kreiselkompass an einem Modell. Der Kreisel war um ca. 30° gegenüber der Horizontalen geneigt und auf einer drehbaren Platte gelagert. Er war bezüglich seiner Horizontalebene horizontal gefesselt. Zu Beginn des Versuches stand die Figurenachse des Kreisels vom Labor aus gesehen horizontal, d.h. in Ost-West-Richtung. Versetzte man Kreisel und Tisch in Rotation, so richtete sich die Figurenachse, wie in der Vorbereitung beschrieben, senkrecht aus. Sie zeigte dann in Nord-Süd-Richtung. Dabei musste sie sich erst auf die Nordrichtung einschwingen. Insgesamt funktionierte das Modell wie vorhergesagt.