



SS/WS 20.10./11.

Praktikum: (P1/P2) (Mo/Di/Mi/Do) Gruppe-Nr: 03

Name: Schiele Vorname: Alexander

Name: Weis Vorname: Johannes

Versuch: Resonanz (mit/ohne) Fehlerrechnung

Betreuer: ~~Volker Heine~~ Moritz Peter Durchgeführt am: 16.12.2010

Abgabe am: 13.1.11

Rückgabe am: .....	Begründung:
--------------------	-------------

2. Abgabe am: .....

Ergebnis: (+ / 0 / -)	Fehlerrechnung: ja / nein
Datum: 17.1.11	Handzeichen: M.P.
Bemerkungen: Sehr schön! Bestes Protokoll bis jetzt!	



Bei diesem Versuch geht es um freie und erzwungene Schwingungen. Es werden mechanische und elektrische Schwingungen untersucht, ebenso wie das Resonanzverhalten bezüglich Amplitude und Phase, sowie Charakteristika wie Resonanzschärfe bzw. Güte und Dämpfungen verschiedenen Ursprungs. Alle wichtigen Zusammenhänge sind in einer Vorbereitungshilfe zu diesem Versuch erläutert.

Bei diesem Versuch arbeiten Sie mit dem Messwerterfassungssystem „CASSY“, das im Praktikum an verschiedenen Versuchen eingesetzt wird. *Details zu der Funktionsweise des Interfaces finden Sie in der Vorbereitungshilfe zu diesem Versuch sowie auf den ersten 30 Seiten des CASSY Handbuchs, die sich in den Literaturlisten befinden.*

**Hinweis:** Bitte USB-Stick zur Datensicherung mitbringen.

### Aufgaben:

**1. Drehpendel, freie Schwingungen:** Machen Sie sich anhand der Kurzanleitung zu CASSY mit dem Menü der Software, der Verwendung von Funktionstasten und den Einstellmöglichkeiten für Diagramme und Anzeigeelementen vertraut. Stellen Sie den zeitlichen Verlauf des Phasenwinkels, der Winkelgeschwindigkeit und der kinetischen Energie dar. Verwenden Sie dazu eine einfache Abschätzung des Trägheitsmomentes des Drehpendels. Erzeugen Sie auch eine Phasenraumdarstellung des Schwingungsvorgangs. Bestimmen Sie die Periodendauer der Schwingung.

Der Schwingungsvorgang ist auch ohne Wirbelstrombremse nicht ganz dämpfungsfrei. Erklären Sie die Art der Dämpfung und entwickeln Sie ein einfaches Modell für den Amplitudenabfall. Überlagern Sie die Messdaten mit dem Ihrem Modell entsprechenden funktionalen Zusammenhang und passen Sie die Modellparameter möglichst gut per Hand an (*fit by eye*). Dazu eignen sich einfache Tabellenkalkulationsprogramme auf Ihrem PC. Sie bekommen dadurch ein Gefühl für den Einfluss der verschiedenen Parameter auf die Kurvenform.

**2. Drehpendel, freie gedämpfte Schwingungen:** Nehmen Sie mit CASSY bei verschiedenen Strömen  $I_B$  durch die Wirbelstrombremse ( $I_B=100, 200, 400, 700\text{mA}$ ) die entsprechenden Winkel-Zeit-Diagramme auf. Ermitteln Sie wie in Aufgabe 1 die Dämpfungskonstante  $\beta$  durch Anpassung der Schwingungsfunktion an die Messdaten. Bestimmen Sie Dämpfungskonstante  $\beta$  auch aus dem Dämpfungsverhältnis  $k$ . Verwenden Sie für die  $k(I_B)$ -Bestimmung eine optimale Anzahl  $n$  von Schwingungen und die zweckmäßigere der beiden Formeln:

$$k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_{i-1}}{\Phi_i} \quad \text{oder} \quad k = \sqrt[n]{\Phi_0 / \Phi_n}$$

Erläutern Sie, warum Sie praktisch keine  $I_B$ -Abhängigkeit für  $T$  finden.

Stellen Sie die Dämpfungskonstante  $\beta_{\text{kor}}(I_B) = \beta(I_B) - \beta(0)$  in Abhängigkeit von  $I_B$  geeignet graphisch dar, begründen Sie  $\beta_{\text{kor}}(I_B) = \text{const} \cdot I_B^2$  und extrapolieren Sie auf den  $I_B$ -Wert für Grenzdämpfung ( $\beta = \omega_0$ ). Ermitteln Sie diesen Wert auch experimentell, und vergleichen Sie beide Ergebnisse. Berechnen Sie die Güte  $Q(I_B)$  des Systems aus  $\omega_0$  und  $\beta(I_B)$ . Beachten Sie den Gültigkeitsbereich der Formeln für  $Q$ .

**3. Messen Sie die Winkelrichtgröße  $D^*$  der Schneckenfeder des Drehpendels statisch.** Diskutieren Sie Ihre Idee für das Messverfahren von  $D^*$  vorher mit dem Betreuer. Bestimmen Sie das Trägheitsmoment  $\Theta$  des Drehpendels aus  $D^*$  und  $T(0)$  und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus Aufgabe 1.

**4. Drehpendel, erzwungene Schwingungen:** Nehmen Sie Resonanzkurven  $\varphi(\Omega)$  bei verschiedenen Strömen  $I_B$  ( $200, 400\text{mA}$ ) mit CASSY auf. Beobachten und diskutieren Sie auch die Phasenverschiebung  $\psi$ . (a) möglichst weit unterhalb, (b) möglichst weit oberhalb und (c) bei der Resonanzfrequenz.

*Achtung:* diese Phasenverschiebung wird im vorgegebenen Versuchsaufbau nicht von CASSY registriert, da eine simultane Messung der anregenden Schwingung nicht vorgesehen ist (dazu würde eine zweite BMW-

Box am Antriebsmotor benötigt). Die Drehzahl des Antriebmotors ist nicht sehr stabil einstellbar - die Meßgenauigkeit ist deshalb nur mäßig. Für die Messung der Drehzahl wartet man die Einschwingzeit des Drehpendels (diese kann man sehr gut in der Phasenraumdarstellung beobachten) ab und bestimmt sie aus dem *Winkel-Zeit-Diagramm* mit Hilfe von CASSY. Achten Sie auf eine ausreichende Dichte der Meßpunkte, besonders in Resonanznähe. Ändern Sie gegebenenfalls die Intervallgröße der Messparameter. Vergleichen Sie den Verlauf der gemessenen Resonanzkurven mit dem theoretischen Verlauf.

Benutzen Sie  $(1/\sqrt{2})$ -Amplituden-Punkte für die Gütebestimmung  $Q(I_B)$  des Resonators und vergleichen Sie diese Ergebnisse mit jenen von Aufgabe 2.

**5. Serienschwingkreis, erzwungene Schwingungen:** Nehmen Sie Resonanzkurven  $I(\omega)$  bei verschiedenen Dämpfungswiderständen  $R_p$  auf (Siehe Hinweise in der Vorbereitungshilfe) (Messbereich für  $U$ : 0-70V). Stellen Sie die Schwingungsamplitude und die Impedanz des Schwingkreises als Funktion der Frequenz in einer gemeinsamen Darstellung dar. Bestimmen Sie die Gütefaktoren der Schwingkreise aus der Resonanzbreite. Demonstrieren Sie die Resonanzüberhöhung an Spule und Kondensator, indem Sie die Spannungsverläufe an Spule und Kondensator zusammen mit der anliegenden Spannung als Funktion der Frequenz darstellen. Bestimmen Sie auch daraus die Güte des Schwingkreises. Stellen Sie die Phasenverschiebung als Funktion der Frequenz dar.

#### **Zubehör:**

Drehpendel (Pohlsches Rad) mit Motor, Getriebe und Exzenter zur Anregung, mit Drehkörper aus Kupfer ( $\rho = 8,96 \text{ g/cm}^3$ ), kreisringförmig ( $r_i=7,5\text{cm}$ ,  $r_a=9,5\text{cm}$ ,  $d=0,2\text{cm}$ ) mit Speichen, mit Schnurrille am Außenrand, mit Wirbelstrombremse (zulässiger Strom: *langzeitig* 1A / *kurzzeitig* 1,6A);

Stromversorgungsgeräte mit Regelmöglichkeiten für die Motordrehzahl und für den Strom durch die Wirbelstrombremse;

Dreheisen-Vielfachmeßinstrument für die Messung des Stromes durch die Wirbelstrombremse;

Federkraftmesser 1N sowie Faden, Tesafilm (Einfädelhilfe) und Stativ für die  $D^*$ -Bestimmung;

Stoppuhr;

CASSY SENSOR Messinterface mit Kabeln und Bewegungswandler;

POWER CASSY als Spannungsquelle;

PC zur Datenerfassung.

CASSY Lab Software

Dämpfungswiderstände  $R_p$ , Spule  $L = 44 \text{ mH}$  und Kondensator  $C = 0,33 \text{ }\mu\text{F}$ , Laborkabel.

#### **Literatur:**

Walcher: *Praktikum der Physik* (zu Drehpendel und Schwingungsgleichungen)

Fricke, Lamberts, Schuchardt, Hrsg. Moeller: *Leitfaden der Elektrotechnik*, Bd.4, Teil 1 (zu elektrischen Schwingkreisen, insbesondere L||C||R; vorhanden in Uni.-Bibl.)

Feynman: *Lectures on Physics*, Bd.1 (besonders geeignet für das Verständnis des Versuchsinhalts)

# Physikalisches Praktikum

## Versuchsprotokoll Resonanz

Alexander Schiele

Johannes Weis

Gruppe Do-03

# Inhalt:

<b>Vorbereitung Alexander Schiele</b>	<b>3</b>
Theoretischer Hintergrund	3
1. Drehpendel, freie Schwingungen	4
2. Drehpendel, freie gedämpfte Schwingungen	4
3. Statische Messung der Winkelrichtgröße $D$ der Schneckenfeder des Drehpendels	5
4. Drehpendel, erzwungene Schwingungen	5
5. Serienschwingkreis, erzwungene Schwingungen	6
<b>Vorbereitung Johannes Weis</b>	<b>8</b>
Theoretischer Hintergrund	8
1. Drehpendel, freie Schwingungen	9
2. Drehpendel, freie gedämpfte Schwingungen	9
3. Messen der Winkelrichtgröße $D^*$ der Schneckenfeder	10
4. Drehpendel mit erzwungenen Schwingungen	10
5. Serienschwingkreis mit erzwungenen Schwingungen	11
<b>Auswertung</b>	<b>13</b>
1. Drehpendel, freie Schwingungen	13
2. Drehpendel, freie gedämpfte Schwingungen	13
3. Messung der Winkelrichtgröße und des Trägheitsmomentes	18
4. Erzwungene Schwingungen	18
5. Elektrischer Schwingkreis mit erzwungener Schwingung	20

# Vorbereitung

## Alexander Schiele

### Theoretischer Hintergrund

Dieser Versuch befasst sich mit harmonischen Schwingungen, die allgemeine Differenzialgleichung lautet:

$$\ddot{x}(t) + 2\beta \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t)$$

Diese Gleichung berücksichtigt Dämpfungen durch den Faktor  $\beta$ , welche proportional zur Geschwindigkeit sind. Außerdem wird auch eine treibende Kraft  $f(t)$  eingeschlossen.

Die Lösung einer solchen Gleichung erhält man als Linearkombination der allgemeinen homogenen Lösung  $x_h(t)$  und einer partikulären Lösung  $x_p(t)$ . Die homogene Lösung erhält man durch den Ansatz  $x(t) = c e^{-\lambda t}$ . Es ergibt sich durch Lösen des charakteristischen Polynoms

$$\lambda_{1/2} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}. \text{ Man muss nun in drei Fälle trennen:}$$

Kriechfall ( $\beta > \omega_0$ ):

In diesem Fall ist der Radient  $>0$ , es ergeben sich für  $\lambda$  reelle Zahlen und die Lösung der homogenen Differenzialgleichung lautet:

$$x_h(t) = e^{-\beta t} (C_1 e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} + C_2 e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t})$$

Aperiodischer Grenzfall ( $\beta = \omega_0$ ):

In diesem Fall wird die Wurzel 0. Daraus ergibt sich als Lösung:

$$x_h(t) = C_1 (1 + t \cdot C_2) e^{-\beta t}$$

Schwingfall ( $\omega_0 > \beta$ ):

Nun wird der Radient negativ, daraus ergeben sich für  $\lambda$  komplexe Lösungen und somit:

$$x_h(t) = e^{-\beta t} (c_1 e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t} + c_2 e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t}) = e^{-\beta t} A \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t - \alpha)$$

wobei in allen Fällen  $C_1$ ,  $C_2$ , A und  $\alpha$  freie Konstanten sind, die durch die Anfangsbedingungen bestimmt werden.

# 1. Drehpendel, freie Schwingungen

In diesem Versuch soll die Schwingung eines Pohlschen Rades untersucht werden. Ein Pohlsches Rad ist ein Drehpendel, das durch eine Drehfeder eine rücktreibende Kraft erfährt. Die Differenzialgleichung dieses Problems für den Phasenwinkel lautet:

$$\Theta \ddot{\phi} + \gamma \dot{\phi} + D \phi = 0 \quad \text{mit} \quad \Theta : \text{Trägheitsmoment}, \quad \gamma : \text{Reibungskoeffizient}, \quad D: \text{Federkonstante}$$

Der Reibungskoeffizient entsteht durch die Luftreibung und die Reibung des Materials. In dieser Aufgabe sollen wir den zeitlichen Verlauf des Phasenwinkels mit CASSY darstellen, also die Lösung der Differenzialgleichung. Außerdem soll auch der zeitliche Verlauf der Winkelgeschwindigkeit und daraus der Verlauf der kinetischen Energie dargestellt werden. Da der Phasenwinkel eine periodische Schwingung ausführt, wird das auch die Winkelgeschwindigkeit tun.

Für die kinetische Energie ergibt sich  $E_{kin} = \frac{1}{2} \Theta \dot{\phi}^2 \sim \cos^2$ . Das liegt daran, dass kinetische Energie in potentielle Energie umgewandelt wird.

CASSY ist in der Lage, Ableitungen und Funktionen von Messgrößen (z.B. Energie) auszugeben. Dafür muss natürlich das Trägheitsmoment des Drehpendels bekannt sein:

$$\Theta = \int r^2 dm = \int \rho(r) r^2 dV = \frac{1}{2} m (r_a^2 - r_i^2) = 1,403 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Desweiteren soll eine Phasenraumdarstellung des Schwingvorgangs erstellt werden. Darunter versteht man eine Darstellung, bei der die Winkelgeschwindigkeit über dem Phasenwinkel aufgetragen wird.

Nun soll noch die Dämpfungskonstante  $\beta$  durch Anpassung der Schwingungsfunktion an die Messdaten bestimmt werden.

# 2. Drehpendel, freie gedämpfte Schwingungen

Es soll die Messung aus Aufgabe 1 wiederholt werden allerdings mit Dämpfung durch eine Wirbelstrombremse. Es sollen als Ströme  $I_B = 100, 200, 400, 700 \text{ mA}$  durch die Wirbelstrombremse verwendet werden. Außerdem soll auch die Dämpfungskonstante wie in Aufgabe 1 bestimmt werden, deren Wert sich vergrößert haben sollte. Eine andere Methode um

$$\beta \text{ zu bestimmen ist aus dem Dämpfungsverhältnis } k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\phi_{i-1}}{\phi_i} \text{ oder } k = \sqrt[n]{\frac{\phi_0}{\phi_n}}.$$

Mit  $k = e^{\beta T}$  folgt  $\beta = \frac{\ln k}{T}$ .

Es gibt praktisch keine Abhängigkeit T von  $I_B$  da:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0 \left(1 - \frac{\beta^2}{\omega_0^2}\right)} \approx \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\beta^2}{\omega_0^2} + \dots\right) \approx \frac{2\pi}{\omega_0} \text{ da wir im Schwingfall, also im Fall der}$$

schwachen Dämpfung  $\beta \ll \omega_0$  sind und somit der zweite und alle weiteren Terme in der Klammer als 0 genähert werden können.

Die Dämpfungskonstante setzt sich zusammen aus der Reibung aus Aufgabe 1 und der Wirbelstrombremse, deswegen folgt

$$\beta_{korr.}(I_B) = \beta(I_B) - \beta(0)$$

Eine Wirbelstrombremse basiert auf der Lorentzkraft  $\vec{F} = I \vec{l} \times \vec{B} \rightarrow F = IlB = Il\mu_0 n I = \text{const } I^2$  .

Da  $\beta$  proportional zu  $F$  ist, ist  $\beta$  auch proportional zu  $I^2$ .

Der Gütefaktor einer Schwingung ergibt sich aus dem Quotienten der Schwingungsenergie und dem Energieverlust pro Periode:

$$Q = 2\pi \frac{\phi_{\max}^2(t)}{\phi_{\max}^2(t) - \phi_{\max}^2(t+T)} = 2\pi \frac{e^{-2\beta t}}{e^{-2\beta t} - e^{-2\beta(t+T)}} = 2\pi \frac{1}{1 - e^{-2\beta T}} \approx \frac{\omega_0}{2\beta(I_B)}$$

### 3. Statische Messung der Winkelrichtgröße D der Schneckenfeder des Drehpendels

In dieser Aufgabe soll die Winkelrichtgröße D bestimmt werden. Dazu lenkt man die Feder um einen Winkel  $\phi$  durch eine tangentielle Kraft F aus. Man misst die Kraft, den Winkel und den Radius r, dann kann man D berechnen durch:

$$D\phi = M = F \cdot r \Leftrightarrow D = \frac{F \cdot r}{\phi}$$

Es gilt für die Eigenfrequenz:

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi}{T_0^2} = \frac{D}{\Theta} \rightarrow \Theta = \frac{D T_0^2}{4\pi}$$

### 4. Drehpendel, erzwungene Schwingungen

In diesem Versuch soll die Resonanzkurve  $\phi(\Omega)$  bei verschiedenen Bremsströmen mit CASSY aufgezeichnet werden. Außerdem verwendet man eine antreibende Kraft der Form:

$$f(t) = k \cos(\Omega t) \quad \text{mit} \quad k = \frac{M_0}{\Theta}$$

Die Lösung der Differenzialgleichung:

$\ddot{\phi}(t) + 2\beta\dot{\phi}(t) + \omega_0^2\phi(t) = f(t)$  setzt sich wie im theoretischen Hintergrund erklärt aus der partikulären und homogenen Lösung zusammen. Die homogene Lösung fällt allerdings exponentiell mit der Zeit ab und kann deswegen nach endlicher Zeit vernachlässigt werden. Deswegen führt das System nach endlicher Zeit eine Schwingung mit der außen angelegten Frequenz  $\Omega$  aus:

$$\phi(t) = A \cos(\Omega t + \Psi)$$

Für die Phasenverschiebung  $\Psi$  gilt:

$$\Psi = \arctan\left(\frac{2\beta\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}\right)$$

Für  $\Omega \ll \omega_0$  ist die Phasenverschiebung  $\Psi \approx 0$ , bei der Resonanzfrequenz  $\Omega \approx \omega_0$  geht der

Bruch gegen unendlich, deswegen ist die Phasenverschiebung  $-\frac{\pi}{2}$ . Wählt man nun  $\Omega \gg \omega_0$ ,

dann ist die Phasenverschiebung  $-\pi$ .

Für die Amplitude A gilt:

$$A = \frac{k}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\beta\Omega)^2}}$$

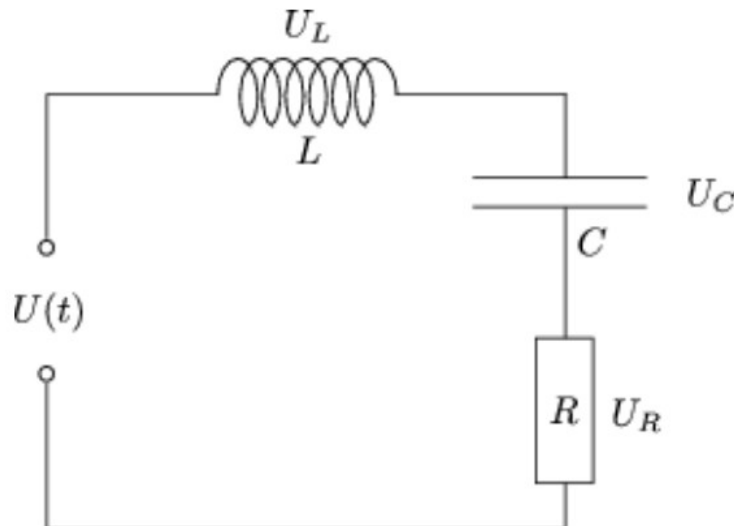
Für die Bestimmung der Güte verwendet man die Bandbreite  $\Delta\omega$  zwischen  $\omega_1$  und  $\omega_2$ ,



für die die Amplitude auf einen Wert  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  zur Amplitude im Resonanzfall abgefallen ist.

$$\Delta \omega \approx 2\beta = \frac{\omega_0}{Q} \rightarrow \approx \frac{\omega_0}{\Delta \omega}$$

## 5. Serienschwingkreis, erzwungene Schwingungen



Ein Serienschwingkreis besteht aus einem Widerstand, einer Spule und einem Kondensator, welche in Reihe geschaltet sind. Als treibende Kraft wird eine Spannungsquelle verwendet. Mit Hilfe der Kirchhoffschen Maschenregel gilt folgendes:

$$U(t) = U_L(t) + U_R(t) + U_C(t) \rightarrow \ddot{I}(t) + \frac{L}{R} \dot{I}(t) + \omega_0^2 I(t) = \dot{U}(t) \frac{1}{L}$$

Mit der Substitution

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{R}{2L}$$

erhalten wir die uns bekannte Form eines gedämpften, getriebenen, harmonischen Oszillators.

Die Lösung der Differenzialgleichung ist gegeben durch:

Die Lösung der Differenzialgleichung ist gegeben durch:

$$I(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \cos(\omega t + \Psi) + I_0 \cdot e^{i\omega t + \Psi} \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

Die Stromstärke  $I_0$  lässt sich über die Impedanz  $Z$  des Schwingkreises bestimmen:

$$I_0 = \frac{U_0}{Z(\omega)} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Die Impedanz wird am kleinsten für  $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{44 \text{ mH} \cdot 0,33 \mu\text{F}}} = 8,7 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{s}}$

Für die Frequenz ergibt sich damit:

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 1320 \text{ Hz}$$

Die Phasenverschiebung berechnet sich durch:

$$\Psi = \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

Der Gütefaktor lässt sich berechnen durch:

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Der Gütefaktor kann im Resonanzfall deutlich größer als 1 werden, deswegen spricht man von Spannungsüberhöhung. Daraus lässt sich auch der Gütefaktor berechnen:

$$|U_L(\omega_0)| = |L \dot{I}| = \omega_0 \frac{L}{R} U_0 = Q U_0 \quad |U_C(\omega_0)| = \left| \frac{1}{C} \int I dt \right| = \frac{1}{\omega_0 C R} = Q U_0$$

Daraus ergibt sich

$$Q = \frac{|U_C(\omega_0)|}{U_0} = \frac{|U_L(\omega_0)|}{U_0}$$

# Vorbereitung

## Johannes Weis

### Theoretischer Hintergrund

Bei den ersten vier Aufgaben wird ein sog. Pohlsches Rad verwendet, das eine Drehschwingung ausführt und sich dabei wie ein harmonischer Oszillator verhält. Dabei liegt Energie in Form von Bewegungsenergie und potentieller Energie vor.

Beim Pohlschen Rad wird die potentielle Energie in einer Schneckenfeder gespeichert, die das Rad bei der Umdrehung abbremst und eine Rückstellkraft auf es ausübt. Das Rad kann wahlweise mit einer Wirbelstrombremse verlangsamt oder mit einem externen Antrieb beschleunigt werden. Das führt zur folgenden Differenzialgleichung:

$$\Theta \ddot{\phi}(t) + \gamma \dot{\phi}(t) + D \phi(t) = 0$$

wobei  $\Theta \ddot{\phi}(t)$  das Reaktionsmoment,  $\gamma \dot{\phi}(t)$  die bremsenden Momente der Reibung und der Wirbelstrombremse und  $D \phi(t)$  das zurücktreibende Moment der Schneckenfeder darstellen.

Die bekannte Gleichung des harmonischen Oszillators lautet:

$$\ddot{\Phi} + 2\beta \dot{\Phi} + \omega_0^2 \Phi = 0$$

Für das Pohlsche Rad gilt hier:  $\beta = \frac{\gamma}{2\Theta}$  und  $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{\Theta}}$ .  $\beta$  hängt hier sehr stark von der

Wirbelstrombremse ab. Ohne diese ist es nur klein und wird durch die Reibung bedingt. Im idealen Fall ohne Reibung würde gelten:  $\ddot{\Phi} + \omega_0^2 \Phi = 0$

Diese Gleichung des harmonischen Oszillators mit Verzögerung lässt sich lösen durch den Ansatz:

$$\phi(t) = c e^{-\lambda t}, \text{ wobei für } \lambda \text{ gilt: } \lambda_{1/2} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}. \text{ Außerdem ist } \omega = \sqrt{(\omega_0^2 - \beta^2)}.$$

Für einen harmonischen Oszillator lassen sich drei verschiedene Fälle unterscheiden:

**1) Schwingfall** ( $\beta < \omega_0$ ): In diesem Fall schwingt der Oszillator mit sich durch die Dämpfung verkleinernder Amplitude, aber gleicher Frequenz. Da  $\omega$  in diesem Fall imaginär wird, gilt:

$\phi(t) = e^{-\beta t} (c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}) = e^{-\beta t} A \cos(\omega t + \psi)$ . Die Konstanten  $c_1$ ,  $c_2$  bzw.  $A$  sind durch die Anfangsbedingungen des Systems festgelegt,  $\psi$  entspricht einer Phasenverschiebung.

**2) Kriechfall** ( $\beta > \omega_0$ ): Es gibt nun keine Schwingung, sondern nur ein langsames Abklingen in den Ruhezustand. Für diesen Fall gilt:  $\phi(t) = A e^{-\beta t} (c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{-\alpha t}) = e^{-\beta t} A \cosh(\omega t)$

**3) aperiodischer Grenzfall** ( $\beta = \omega_0$ ): Dies ist der schnellstmögliche Fall, in dem das System abklingen kann, ohne dass dabei eine Schwingung entsteht. Dafür gilt:  $\phi(t) = A(1 + t \cdot B) e^{-\beta t}$

Im Falle eines äußeren Antriebs handelt es sich um eine erzwungene Schwingung, für die gilt:

$\ddot{\phi} + 2\beta \dot{\phi} + \omega_0^2 \phi = f(t)$ . Hierbei bildet sich die Lösung durch Zusammenaddieren einer homogenen Lösung (für  $f(t)=0$ ) und einer partikulären Lösung abhängig von  $f(t)$ .

## 1. Drehpendel, freie Schwingungen

Bei diesem Versuch soll sich zunächst mit dem Messwerterfassungssystem CASSY vertraut gemacht werden. Anschließend soll bei einer Schwingung des Pohlschen Rads ohne Wirbelstrombremse der zeitliche Verlauf folgender Größen dargestellt werden:

**Phasenwinkel:** Dieser berechnet sich mit  $\varphi = \frac{s}{\text{Radius}}$ , wobei s die Strecke, um die sich das Rad bewegt, darstellt. Diese misst CASSY. Es ist eine sinusförmige Schwingung zu erwarten.

**Winkelgeschwindigkeit:** Dies ist die Ableitung des Phasenwinkels nach der Zeit, die CASSY direkt berechnen kann.

**Kinetische Energie:** Es gilt:  $E = \frac{1}{2} \Theta \dot{\phi}^2$ . Da man bei CASSY direkt Formeln eingeben kann, lässt sich die kinetische Energie einfach aus der bereits gemessenen Winkelgeschwindigkeit bestimmen. Für  $\Theta$  kann folgende Abschätzung verwendet werden:

$$\Theta = m r^2 = \pi (r_2^2 - r_1^2) 0,2 \text{ cm} 8,93 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} (0,085 \text{ m})^2 = 0,00138 \text{ m}^2 \text{ kg} = 1,38 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ kg}$$

(Die Daten stammen aus der Vorbereitungshilfe)

**Phasenraumdarstellung des Schwingungsvorgangs:** Hierbei wird der Phasenwinkel über der Phasengeschwindigkeit aufgetragen, was ebenfalls mit CASSY einfach möglich ist.

Wie bereits erläutert, entsteht auch ohne Wirbelstrombremse eine Dämpfung, d. h. Verlangsamung des Rads, die durch Reibung verursacht wird. Der mit dem Dämpfungsfaktor verbundene Amplitudenabfall soll durch Abschätzen und Ausprobieren bestimmt werden und der gemessenen Kurve angepasst werden, was z. B. durch Tabellenkalkulationsprogramme möglich ist.

## 2. Drehpendel, freie gedämpfte Schwingungen

Der oben durchgeführte Versuch wird nun wiederholt unter Einsatz der Wirbelstrombremse bei Stromstärken von  $I_B = 100, 200, 400 \text{ und } 700 \text{ mA}$ . Wiederum sollen Winkel-Zeit-Diagramme aufgezeichnet werden und die Dämpfungskonstante  $\beta$  durch Anpassung an die Messdaten bestimmt werden.

Die Dämpfungskonstante kann für diesen Fall allerdings auch berechnet werden. Es gilt:

$$k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\phi_{i-1}}{\phi_i} \quad \text{oder} \quad k = \sqrt[n]{\frac{\phi_0}{\phi_n}} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{\ln k}{T}$$

Das arithmetische Mittel ist für diesen Fall wohl besser geeignet, da anders als beim geometrischen Mittel mehr als nur zwei Messwerte eingehen können, wodurch der statistische Fehler verringert wird.

Da die Dämpfung nur Einfluss auf die Amplitude, nicht aber auf die Periodendauer T hat, sollte T von  $I_B$  unabhängig sein.

Um  $\beta(I_B)$  korrekt zu bestimmen, muss allerdings das durch Reibung verursachte und in 1. bestimmte  $\beta_0$  vom eben bestimmten Wert abgezogen werden:

$$\beta_{\text{korrr}}(I_B) = \beta(I_B) - \beta_0$$

Die Dämpfung  $\beta_{korr}(I_B)$  ist proportional zur Leistung der Spule in der Wirbelstrombremse. Deshalb gilt:  $\beta_{korr}(I_B) \propto P_L = U \cdot I_B = R \cdot I_B^2 \Rightarrow \beta_{korr}(I_B) = const. \cdot I_B^2$

Diese Dämpfung durch die Wirbelstrombremse soll nun in Abhängigkeit von  $I_B$  graphisch dargestellt werden. Dadurch kann man die oben beschriebene Konstante bestimmen. Für den

$$I_B \text{ -Wert der Grenzdämpfung gilt: } I_{B,Grenz} = \sqrt{\frac{\omega_0}{const.}}$$

Dieser Wert soll auch noch experimentell bestimmt werden, was möglich ist, indem man ausprobiert, für welche Stromstärke das Rad am schnellsten abklingt, ohne dabei ins Schwingen zu kommen.

Der Gütefaktor ist bestimmt durch das Verhältnis:  $Q = \frac{2\pi \text{ Schwingungsenergie}}{\text{Energieverlust pro Periode}} = \frac{\omega_0}{2\beta(I_B)}$

### 3. Messen der Winkelrichtgröße $D^*$ der Schneckenfeder

Die Winkelrichtgröße  $D^*$  kann bestimmt werden, indem man das Pohlsche Rad mit einer bekannten Kraft auslenkt. Da die Kraft tangential angreift, das Rad aber rund ist, muss man das auf die Feder wirkende Drehmoment  $F \cdot r$  berechnen und mit dem rückwirkenden Moment der Feder  $D^* \cdot \varphi$  gleichsetzen.

Wie bereits hergeleitet, gilt:  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T(0)} = \sqrt{\frac{D}{\theta}}$ . Für das Trägheitsmoment gilt also:

$$\theta = \frac{D \cdot T(0)^2}{4\pi^2}$$

### 4. Drehpendel mit erzwungenen Schwingungen

Nun soll eine Schwingung für Ströme  $I_B$  von 200 und 400mA erzeugt und aufgenommen werden. Für diese Schwingung lautet die Differentialgleichung:

$$\ddot{\phi} + 2\beta \dot{\phi} + \omega_0^2 \phi = \frac{M_0}{\Theta} \cos(\Omega t)$$

Dies ist eine inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung. Für ihre Lösung gilt:

$$\phi(t) = \phi_h(t) + \phi_p(t)$$

Dies ergibt in diesem Fall laut Vorbereitungshilfe:

$$\phi(t) = e^{-\beta t} A \cos(\omega t - \psi) + B \cos(\Omega t - \psi)$$

Nach einer Einschwingzeit hängt die Schwingung nicht mehr von der Frequenz der Schwingung ab, sondern nur noch von der aufgeprägten Schwingung:  $\phi = A \cdot \cos(\Omega t + \psi)$

Für die Amplitude A gilt:  $A = \frac{k}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\beta\Omega)^2}}$

Es bildet sich eine Schwingung mit der Frequenz des Antriebs, die allerdings zu diesem

phasenverschoben ist. Für diese Phasenverschiebung gilt:  $\psi = \arctan\left(\frac{2\beta\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}\right)$

Die Phasenverschiebung soll nun für folgende drei Fälle untersucht werden:

- 1) weit unterhalb der Resonanzfrequenz ( $\Omega \ll \omega_0$ ) : In diesem Fall wird die Schwingung durch die Eigenfrequenz kaum beeinflusst, der Phasenunterschied beträgt  $\psi \approx 0$  .
- 2) in der Nähe der Resonanzfrequenz ( $\Omega = \omega_0$ ) : Hier beträgt die Phasenverschiebung  $\psi = -\frac{\pi}{2}$  .
- 3) weit oberhalb der Resonanzfrequenz ( $\Omega \gg \omega_0$ ) : Das System schwingt der aufgezwungenen Schwingung entgegen.  $\psi \approx -\pi$  .

Die Phasenverschiebung ist stets negativ, d. h. die resultierende Schwingung läuft der antreibenden Schwingung immer nach.

Die maximale Amplitude der Schwingung wäre bei  $\Omega = \omega_0$  zu erwarten. Dies ist jedoch nicht der Fall, da sich die Resonanzfrequenz durch die Dämpfung etwas verschiebt. Daher wird sie bei der Resonanzfrequenz  $\Omega_{RES} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  erreicht. Für ( $\Omega \ll \omega_0$ ) gilt für die Amplitude näherungsweise  $A = \frac{k}{\omega_0^2} = \frac{M_0}{D}$  , bei ( $\Omega \gg \omega_0$ ) nimmt sie mit  $\frac{1}{\omega^2}$  ab.

Außerdem soll der Gütefaktor über die Breite der Resonanzkurve bestimmt werden. Dafür werden die Frequenzwerte bestimmt, für die  $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_{RES}$  gilt. Daraus kann man den Gütefaktor nach

$$Q \approx \frac{\omega_0}{\Delta \omega} \text{ berechnen (s. Vorbereitungshilfe)}$$

## 5. Serienschwingkreis mit erzwungenen Schwingungen

Im Gegensatz zu den anderen Aufgaben, geht es nun nicht mehr um mechanische, sondern elektromagnetische Schwingungen. Es handelt sich hierbei um einen Serienschwingkreis aus Kondensator, Widerstand, Spule und Wechselstromquelle.

Für die Spannung an den verschiedenen Bauteilen gilt:

$$U(t) = U_L(t) + U_R(t) + U_C(t) = L \dot{I}(t) + RI(t) + \frac{\int I(t) dt}{C}$$

Dies führt zur Differentialgleichung

$$\ddot{I}(t) + \frac{L}{R} \dot{I}(t) + \omega_0^2 I(t) = \frac{U(t)}{L}$$

Hier gilt für die Resonanzfrequenz:  $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$  und für die Dämpfung  $\beta = \frac{R}{2L}$

Bei dem verwendeten Schwingkreis sollte die Resonanzfrequenz bei

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{44 \cdot 10^{-3} H \cdot 0,33 \cdot 10^{-6} F}} \approx 8300 \text{ s}^{-1} \approx 1320 \text{ Hz} \text{ liegen.}$$

Diese Differentialgleichung kann analog zu der des mechanischen Problems gelöst werden.

Wie beim mechanischen Oszillator bleibt auch hier nach einer gewissen Einschwingzeit nur noch eine von der antreibenden Frequenz abhängige Schwingung übrig:

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \psi)$$

Für die Amplitude ergibt das: 
$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U_0}{Z}$$

mit der Impedanz 
$$Z(\omega) = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} .$$

Der Gütefaktor ist definiert nach  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$  . Dieser kann deutlich größer als 1 werden, sodass im Resonanzfall  $U_L$  und  $U_C$   $U_0$  übersteigen können. Dieses Verhalten wird als Spannungsüberhöhung bezeichnet.

Der Gütefaktor kann auch wie bei Aufgabe 4 über die Breite der Resonanzkurve bestimmt werden.

Dazu werden wieder die Frequenzen an den Stellen  $\frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$  bestimmt.

Außerdem sollen die Spannungsverläufe an Spule und Kondensator als Funktion der Frequenz dargestellt werden. Auch daraus ist im Resonanzfall eine Gütebestimmung möglich.

# Messprotokoll

A1 Radius außen 9,5 cm

A3 Gewicht: 15 g

Auslenkung: 0,88 rad

$$2\pi = 360^\circ$$

A4 10 Schwingungen  $200 \text{ m A} = I_B$

	$t_1$ in s	$t_2$ in s	$2 \cdot A$ in rad	Quotient
in Phase	84,5 s	107,2 s	17,95 rad	
Gegenphase	67,3	76,7 s	18,03 rad	
1	37,0	48,3	$1,73 \text{ Hz s} \quad  17,89 - 18,39  = 0,5$	
2	113,4	735,1	$2,17 \text{ Hz s} \quad  15,89 - 16,41  = 0,52$	
3	708,5	727,3	$1,92 \text{ Hz s} \quad  13,25 - 14,57  = 1,32$	
4	96,1	111,7	$1,5 \text{ Hz s} \quad  13,94 - 4,13  = 0,19$	
5	28,9	44,9	$1,6 \text{ Hz s} \quad  3,89 - 4,16  = 0,27$	
6	37,3	53,9	$1,66 \text{ Hz s} \quad  3,84 - 4,21  = 0,37$	
7	48,6	<del>66,4</del> 66,4	$1,78 \text{ Hz s} \quad  3,72 - 4,34  = 0,62$	
8	50,5	69,6	$1,91 \text{ s} \quad  2,64 - 5,36  = 2,72$	
9	63,7	83,9	$2,02 \text{ s} \quad  3,23 - 4,82  = 1,59$	
10	33,6	52,9	$1,93 \text{ s} \quad  2,02 - 5,95  = 3,93$	
11	37,7	50,8	$1,91 \text{ s} \quad  2,99 - 5,00  = 2,01$	
12	137,2	156,6	$1,94 \text{ s} \quad  7,98 - 5,94  = 3,96$	
13	88,9	108,3	$ 2,00 - 5,87  =$	
14	0,9	20,3	$ 1,93 - 5,81  =$	
15	57,0	73,5	$ 3,77 - 4,09  =$	



$$I_B = 400 \text{ mA}$$

$t_1$	$t_2$	T	$z \cdot A$
19,5	56,4	3,69	$ 0,74 + 0,02  = 0,16$
155,9	183,0	2,71	$ 0,77 + 0,05  = 0,22$
265,8	286,7	2,09	$ 0,36 + 0,24  = 0,60$
375,5	394,9	1,99	$ 0,67 + 0,55  = 1,22$
505,2	524,5	1,93	$ 0,67 + 0,56  = 1,23$
656,8	674,6	1,78	$ 0,36 + 0,24  = 0,60$
852,9	871,0	1,81	$ 0,40 + 0,28  = 0,68$
1045,3	1065,1	1,98	$ 0,62 + 0,51  = 1,13$
1279,7	1300,1	2,09	$ 0,45 + 0,35  = 0,80$
1554,9	1574,9	1,80	$ 0,38 + 0,27  = 0,65$
1677,2	1693,4		$ 0,20 + 0,09  = 0,29$
1780,9	1792,3		$ 0,08 - 0,07  = 0,07$
1903,2	1927,4		$ 0,47 + 0,37  = 0,72$
2002,6	2021,6		$ 0,55 + 0,46  = 1,01$
2105,3	2124,6		$ 0,66 + 0,57  = 1,23$
2186,4	2206,0		$ 0,67 + 0,58  = 1,25$

### Aufgabe 5

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 8,299 \frac{1}{s}$$

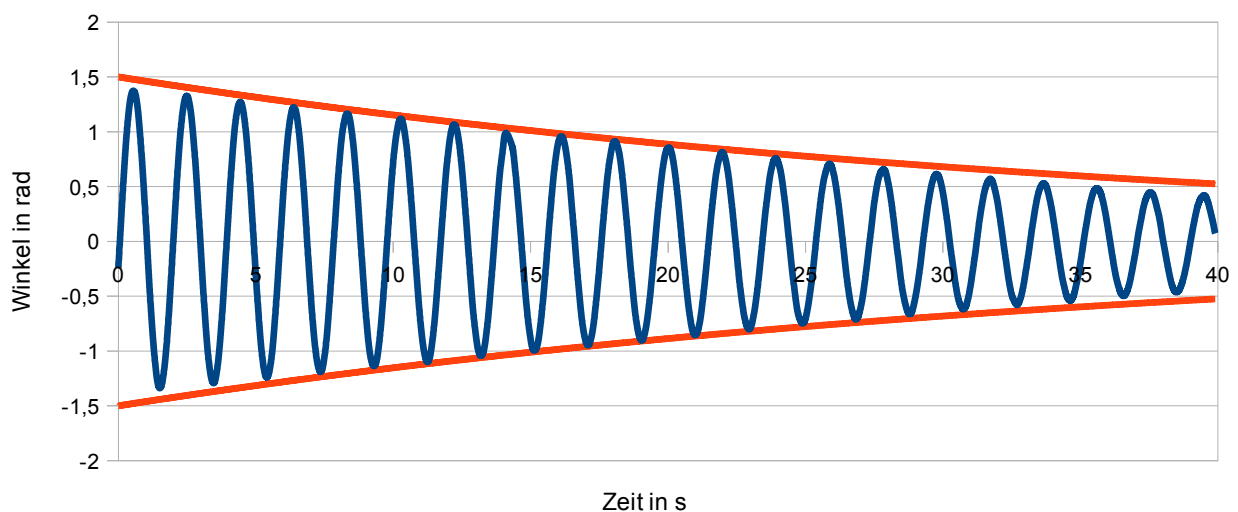
$$\cancel{f = \frac{\omega}{2\pi}} \quad \omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = 1,320 \text{ Hz}$$

# Auswertung

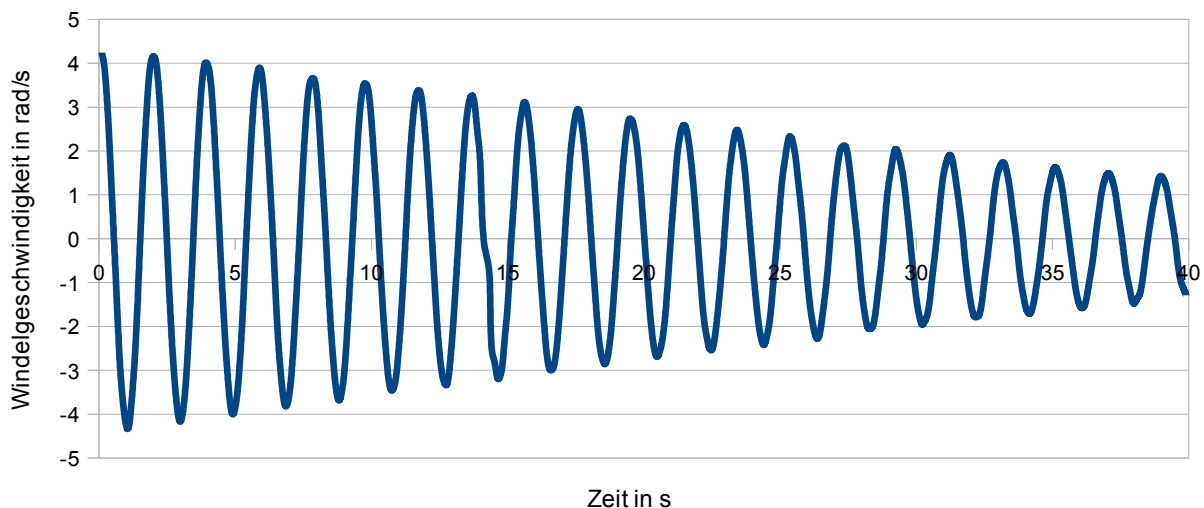
## 1. Drehpendel, freie Schwingungen

Bei diesem Versuch sollen der zeitliche Verlauf des Phasenwinkels, der Winkelgeschwindigkeit und der kinetischen Energie dargestellt werden.

Der **Phasenwinkel** lässt sich aus der Strecke berechnen, um die sich ein zum Messzweck am pohlschen Rad befestigter Faden auf- und abrollt. Diese Werte konnte CASSY direkt berechnen:

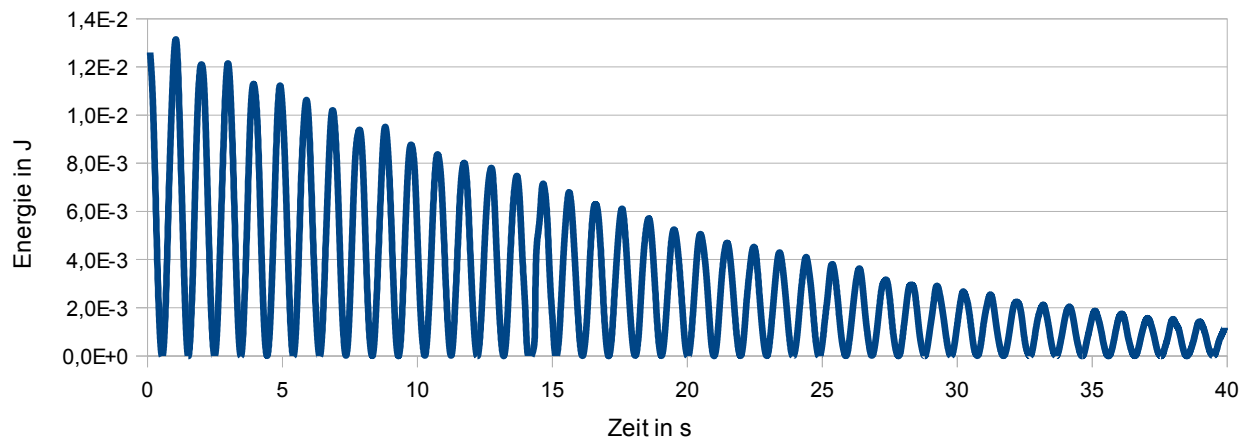


Die **Winkelgeschwindigkeit**, d. h. die Ableitung des Phasenwinkels, konnte CASSY ebenfalls direkt berechnen und anzeigen:

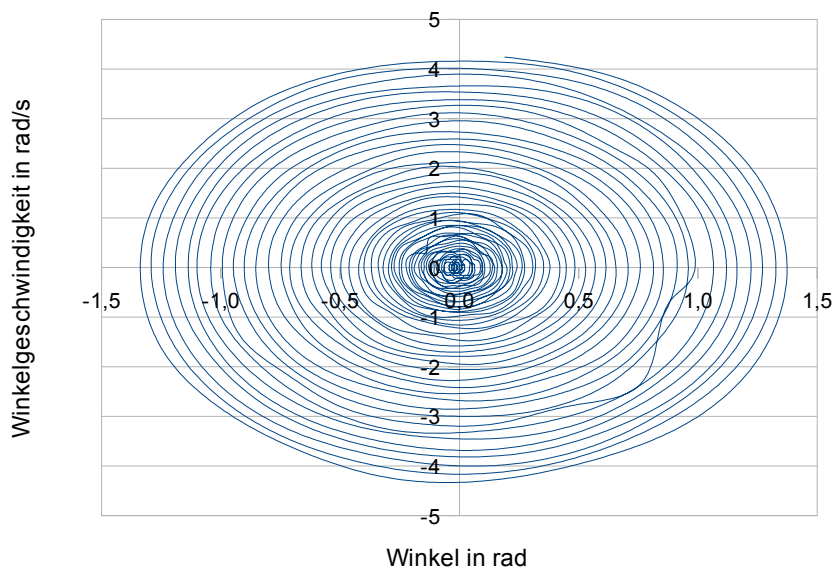


Die **Energie** wurde mit der bereits in der Vorbereitung berechneten Abschätzung

$$\Theta = 1,38 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ kg} \quad \text{nach} \quad E = \frac{1}{2} \Theta \dot{\phi}^2 \quad \text{aus der Winkelgeschwindigkeit berechnet:}$$



Außerdem kann man aus den gemessenen Werten von Winkel und Winkelgeschwindigkeit auch ein kreisförmiges **Phasenraumdiagramm** zeichnen:

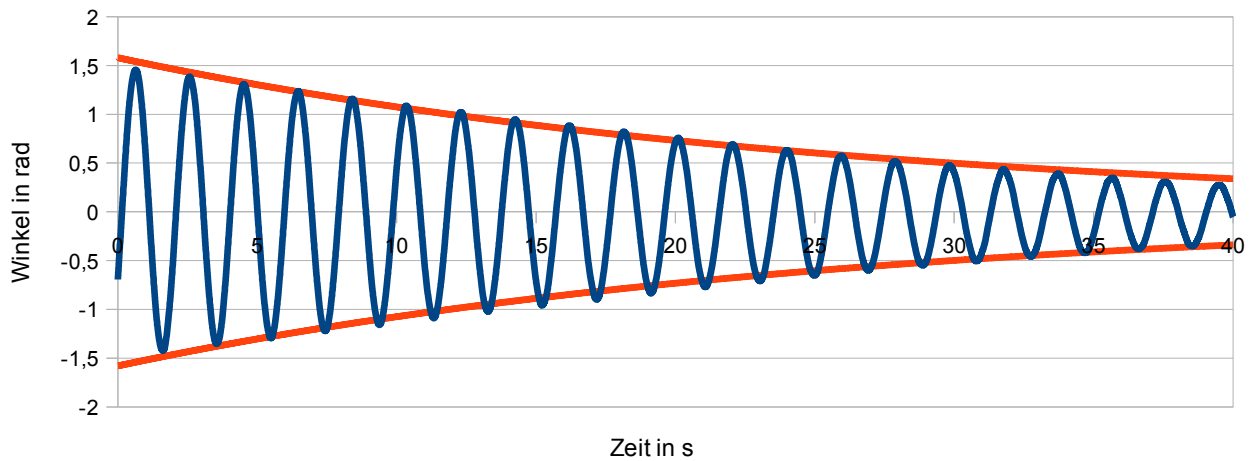


Wie man am Winkel-Zeit-Schaubild leicht erkennt, ist die Schwingung auch ohne Wirbelstrombremse nicht dämpfungsfrei, was an der Reibung liegt. Dieser Amplitudenabfall kann durch eine Einhüllende der Form  $h(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{B}} + C$  beschrieben werden. Im obigen Schaubild haben wir durch Ausprobieren und Anpassen eine Einhüllende der Gleichung  $h(t) = 1,5 \cdot e^{-\frac{t}{38}}$  gefunden. Daraus lässt sich mit  $\beta = B^{-1}$  die sog. Dämpfungskonstante  $\beta = 0,0263$  bestimmen. Berechnet man  $\beta$  nach der Methode von Aufgabe 2, ergibt das  $\beta = 0,0294 s^{-1}$ .

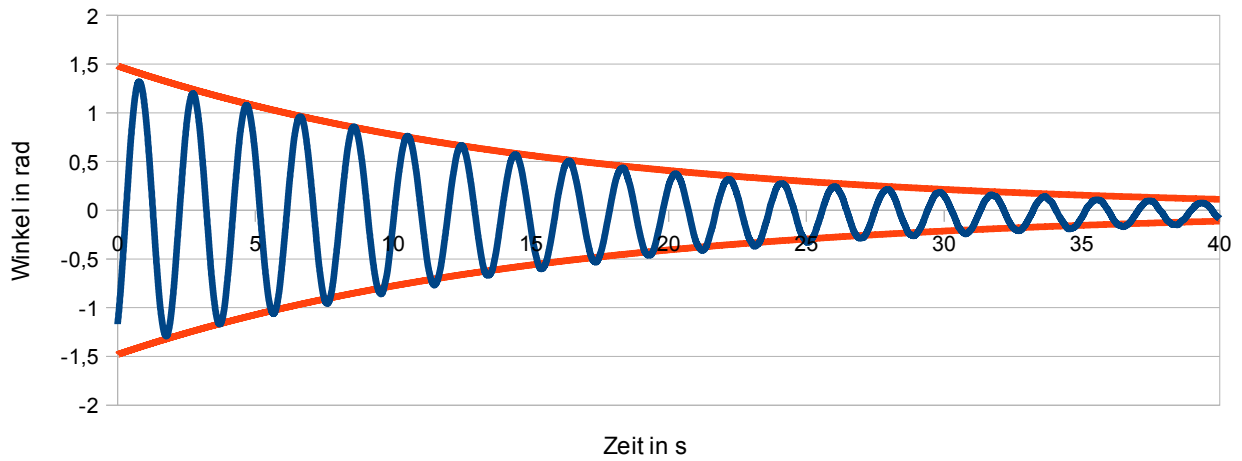
## 2. Drehpendel, freie gedämpfte Schwingungen

Wie oben wurde nun der Phasenwinkel gemessen, allerdings mit eingeschalteter Wirbelstrombremse bei Stromstärken von  $I_B = 100, 200, 400$  und  $700$  mA. Dies ergab die folgenden Schaubilder:

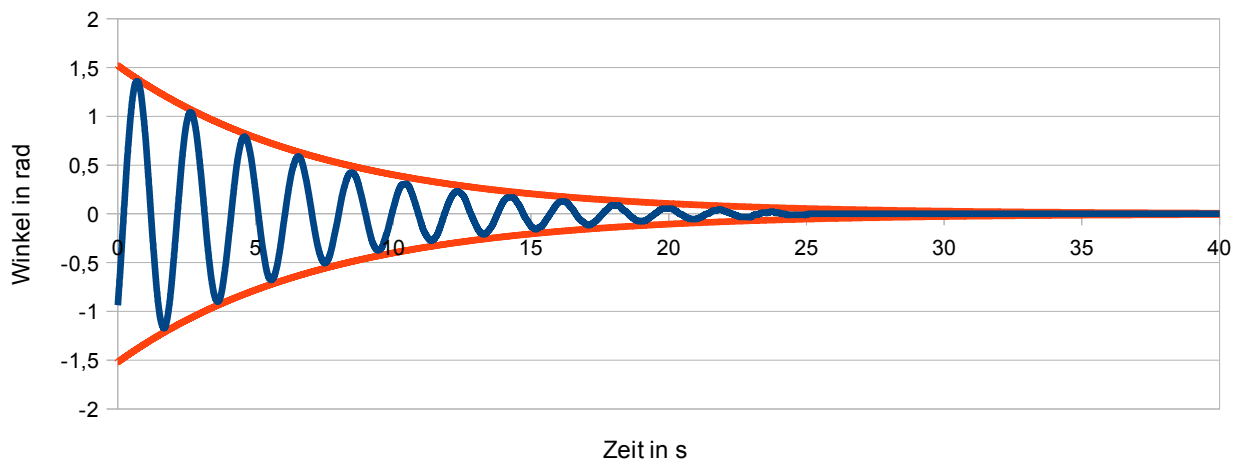
Schwingung für  $I = 100 \text{ mA}$



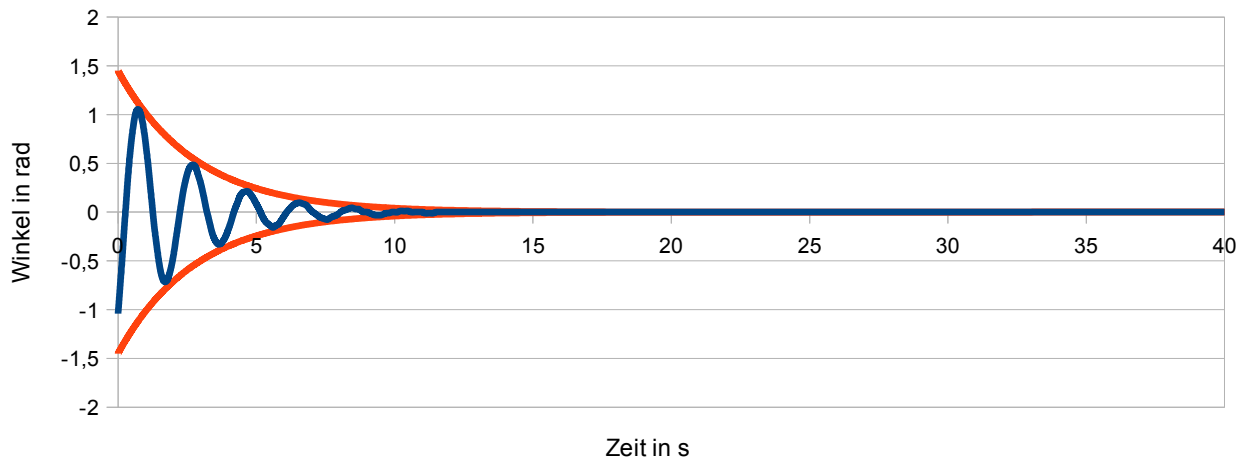
Schwingung bei  $I = 200 \text{ mA}$



Schwingung bei  $I = 400 \text{ mA}$



Schwingung bei I = 700 mA



Die Einhüllenden haben wir wieder durch Ausprobieren und Anpassen als Gleichungen der Form  $h(t) = \pm A \cdot \exp\left(\frac{t}{B}\right) + C$  erstellt. Aus diesen kann man wieder die Dämpfungskonstante  $\beta = B^{-1}$  bestimmen:

Stromstärke $I_B$ in mA	Gleichung der Einhüllenden	Dämpfungskonstante $\beta$ in $\frac{1}{s}$
100	$h(t) = 1,58 \cdot e^{-\frac{t}{26}}$	0,039
200	$h(t) = 1,48 \cdot e^{-\frac{t}{15,5}}$	0,065
400	$h(t) = 1,52 \cdot e^{-\frac{t}{7,5}}$	0,133
700	$h(t) = 1,45 \cdot e^{-\frac{t}{2,8}}$	0,357

Die Dämpfungskonstante kann auch nach den Formeln  $k = n \sqrt{\frac{\phi_1}{\phi_2}}$  und  $\beta = \frac{\ln k}{T}$  berechnet werden, wobei n die Anzahl der Schwingungen zwischen den gewählten Werten  $\phi_1$  und  $\phi_2$  darstellt und T die Periodendauer. Außerdem sollte die sog. korrigierte Dämpfungskonstante, d. h. nur die Dämpfung der Wirbelstrombremse ohne Luftreibung, berechnet werden ( $\beta_{\text{kor}}(I_B) = \beta(I_B) - \beta_0$ ). Für  $\beta_0$  wird der Wert aus Aufgabe 1  $\beta_0 = 0,0294 s^{-1}$  verwendet.

Der Gütefaktor Q berechnet sich nach

$$Q = \frac{2\pi \text{ Schwingungsenergie}}{\text{Energieverlust pro Periode}} = \frac{\omega_0}{2\beta(I_B)} = \frac{2\pi}{T} \frac{1}{2\beta(I_B)} = \frac{\pi}{T\beta(I_B)} \text{ für } \beta \ll \frac{1}{T_0}$$

Die Ergebnisse sind in folgender Tabelle dargestellt:

$I_B$ in mA	t1 in s	t2 in s	n	T in s	$\Phi_1$ in rad	$\Phi_2$ in rad	k	$\beta$ in s <sup>-1</sup>	$\beta$ korr	Q
100	0,6	39,5	20	1,95	1,44	0,27	1,09	0,043	0,013	37,81
200	0,8	39,4	20	1,93	1,32	0,07	1,16	0,075	0,045	21,8
400	0,7	20	10	1,93	1,36	0,05	1,38	0,168	0,139	9,67
700	0,7	10,4	5	1,94	1,05	0,01	2,51	0,475	0,445	3,41

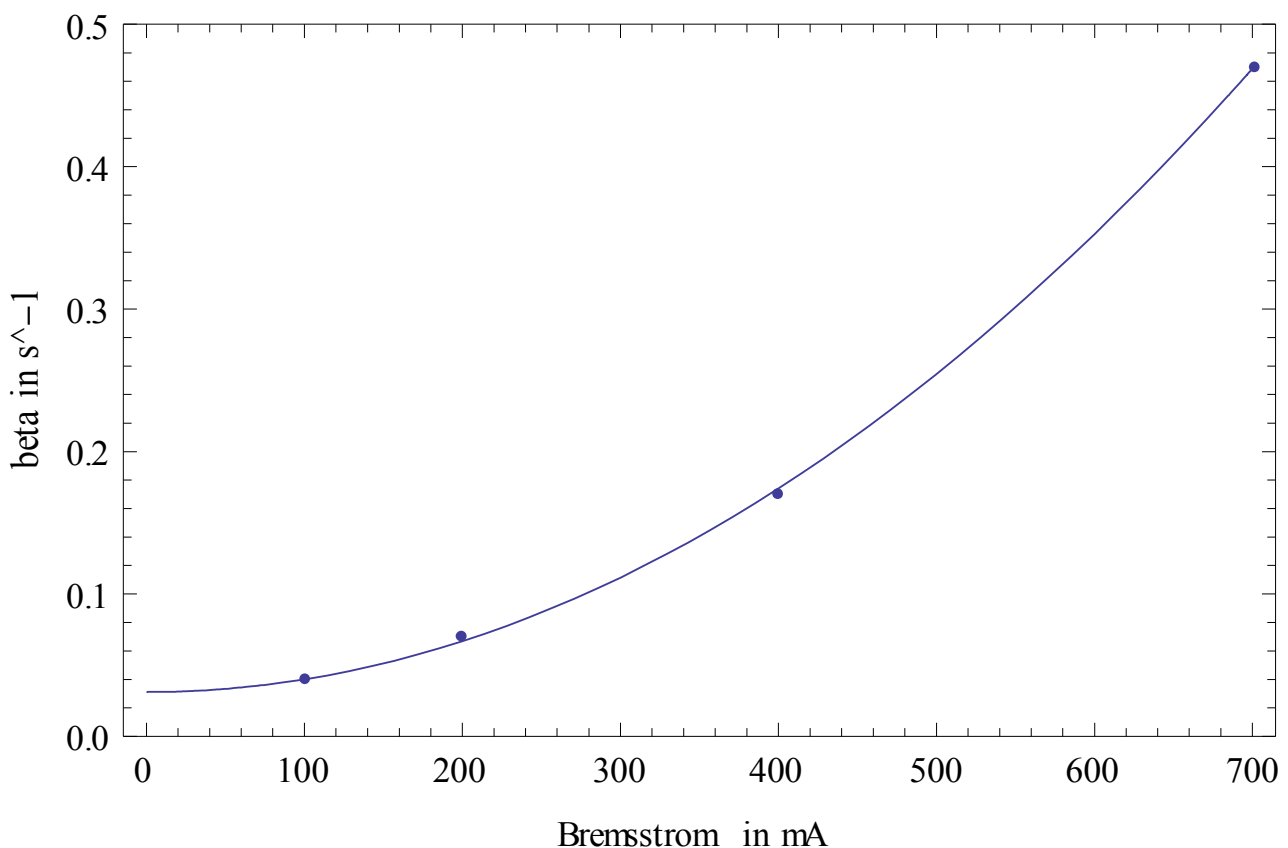
Die Abweichung der  $\beta$ -Werte beträgt zwischen 10 und 33%. Das lässt daraus schließen, dass das Verfahren, die Einhüllende durch Ausprobieren und Anpassen zu bestimmen (erste Methode) wohl relativ ungenau ist.

Es gibt kaum eine Änderung von T in Abhängigkeit von der Stärke der Wirbelstrombremse. Das liegt daran, dass das System immer noch mit seiner Eigenfrequenz  $\omega_0$  schwingt, da es nur abgebremst (also seine Amplitude verringert), sonst aber nicht von außen beeinflusst wird. Es gilt nämlich:  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{D}{\Theta}}$ . Diese Größen hängen nicht von  $I_B$  ab.

Die Bedingung für die oben verwendete Formel für den Gütefaktor ( $\beta \ll \frac{1}{T_0}$ ) ist für

$I_B = 700 \text{ mA}$  nicht mehr unbedingt erfüllt. Für diesen Wert kann man den Gütefaktor mit der besseren Formel  $Q = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\beta T_0}} = 7,466$  berechnen.

Da die Dämpfung  $\beta_{korr}(I_B)$  proportional zur Leistung der Spule in der Wirbelstrombremse ist, gilt:  $\beta_{korr}(I_B) \propto P_L = U \cdot I_B = R \cdot I_B^2 \Rightarrow \beta_{korr}(I_B) = \text{const.} \cdot I_B^2$ . Daher kann man  $\beta$  über  $I_B$  auftragen und eine quadratische Ausgleichskurve zeichnen, über die die Konstante bestimmt werden kann:



Die Konstante kann man aus der Gleichung für die Ausgleichskurve, die wir mit Mathematica erstellt haben, ablesen:  $const. = 8,93 \cdot 10^{-7}$

Nun kann man den  $I_B$  -Wert für die Grenzämpfung (die Dämpfung, bei der der aperiodische

Grenzfall eintritt) bestimmen:  $I_{B,Grenz} = \sqrt{\frac{\omega_0}{const.}} \approx 1,924 A$  .

Diesen Wert haben wir auch experimentell bestimmt. Er betrug etwa 1,9A , das bedeutet eine Abweichung von etwa 1,2 %

### 3. Messung der Winkelrichtgröße und des Trägheitsmomentes

Zur Messung dieser Größen haben wir ein 15g-Gewicht über die Umlenkrolle des Messgerätes an das Rad gehängt. Dies entspricht einer Kraft von  $F = 0,015 kg \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} \approx 0,147 N$  . Dabei ergab

sich eine Auslenkung des Rades um  $50,4^\circ = 0,88 \text{ rad}$ . Das Rad hatte einen Radius von  $r = 9,5 \text{ cm}$ .

Für die Winkelrichtgröße  $D^*$  gilt (s. Vorbereitung):  $Fr = D^* \varphi$  d. h.  $D^* = \frac{Fr}{\varphi} = 0,0159 Nm$  .

Mithilfe dieser Größe kann man auch das Trägheitsmoment des Drehpendels bestimmen. Für dieses

gilt (s. Vorbereitung):  $\theta = \frac{D \cdot T(0)^2}{4\pi^2}$  .  $T(0)$  ist die Periodendauer ohne zusätzliche Dämpfung, die

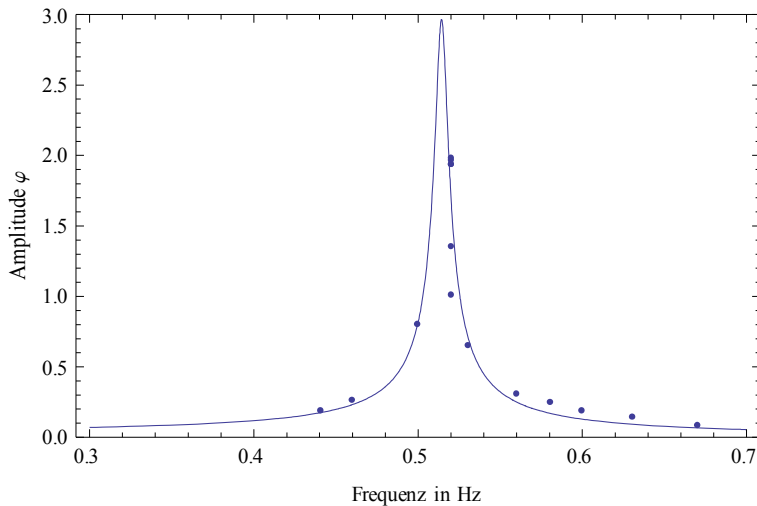
allerdings mit den Periodendauern mit Dämpfung übereinstimmt (s. Aufgabe 2). Sie kann aus den Messdaten von Aufgabe 1 bestimmt werden und beträgt  $T(0) = 1,95 s^{-1}$  .

Damit ergibt sich  $\theta = 1,52 \cdot 10^{-3} kg m^2$

Dieses Ergebnis weicht um 10,1% von der Berechnung in Aufgabe 1 ab, stimmt also ungefähr damit überein.

### 4. Erzwungene Schwingungen

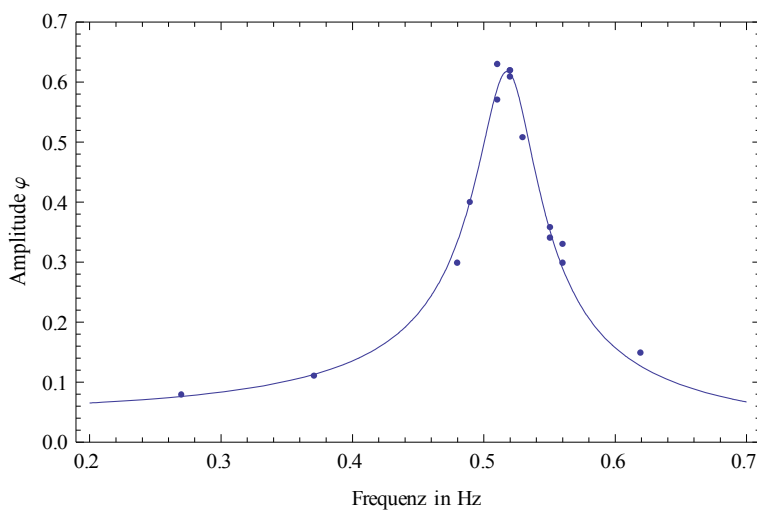
Nun führten wir Messungen bei einem externen Antrieb mit variabler Frequenz durch. Dazu führten wir zwei Messreihen durch, einmal mit einer Stromstärke der Wirbelstrombremse von 200 mA und das andere mal mit 400 mA. Wir maßen jeweils die Frequenz und sowohl maximalen als auch minimalen Ausschlag, woraus wir die Amplitude berechneten. Bei jeder Messung mussten wir eine gewisse Zeit warten, bis sich das System eingeschwungen hatte. Diesen Zustand sahen wir als erreicht an, wenn sich auf der Graphik, die CASSY anzeigte, keine sichtbare Änderung der Amplitude mehr ergab. Die Amplitude über die Frequenz aufgetragen ergab folgende Schaubilder (die Ausgleichskurven haben wir mit Mathematica berechnet):



für  $I_B = 200 \text{ mA}$      $\Omega_{max} = 0,514 \text{ Hz}$     ,     $\Phi_{max} = 2,97 \text{ rad}$

Die Ausgleichskurve lautet  $A(x) = \frac{0,012}{\sqrt{(0,51^2 - x^2)^2 + (2 \cdot 0,004 x)^2}}$

Bei dieser Kurve liegt die Maximalamplitude deutlich oberhalb des maximalen Wertes, den wir gemessen haben, von daher ist fraglich, ob dieser Bereich das Resonanzverhalten korrekt beschreibt. Zumindest wäre die Messung einer solch großen Amplitude unter den gegebenen Versuchsbedingungen nicht möglich, da wir schon bei den gemessenen größten Amplituden bei etwa 2 rad den Bereich, in dem das Gewicht am Fadenende zwischen Messbox und Tisch schwingen konnte, fast vollständig ausgenutzt haben.



für  $I_B = 400 \text{ mA}$      $\Omega_{max} = 0,518$      $\Phi_{max} = 0,618$

Hier lautet die Ausgleichskurve:  $A(x) = \frac{0,015}{\sqrt{(0,52^2 - x^2)^2 + (2 \cdot 0,023 \cdot x)^2}}$

Diese Schaubilder sollten wir mit den theoretisch zu erwartenden Werten vergleichen. Die Amplitude sollte (s. Vorbereitung) bei  $\Omega_{RES} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  liegen.  $\omega_0$  kann man aus der bei Aufgabe 1 gemessenen Periodendauer berechnen,  $\beta$  haben wir für diese Stromstärken der Wirbelstrombremse bereits in Aufgabe 2 bestimmt.

Dies ergibt eine Resonanzfrequenz von 0,51 Hz bei 200 mA und 0,48 Hz bei 400 mA (  $\omega_0$  liegt



bei 0,51 Hz). Die Tendenz, dass sich die Resonanzfrequenz mit zunehmender Dämpfung verringert, ist in den Schaubildern nicht zu erkennen, was an der schlechten Einstellbarkeit und geringen Stabilität des externen Motors liegen könnte. Insgesamt entsprechen die Kurven aber relativ gut der Form, wie sie theoretisch zu erwarten wäre.

Wir haben beobachtet, dass sich eine Phasenverschiebung der angeregten Schwingung im Vergleich zur Antriebsschwingung ergab, die gut mit den erwarteten Werten übereinstimmte. Sie betrug 0 unterhalb der Resonanzfrequenz und darüber  $-\pi$ . Auffallend war, dass der Übergangsbereich sehr klein war und die Werte bereits bei kleinen Abständen von der Resonanzfrequenz sehr dicht bei 0 bzw.  $-\pi$  lagen.

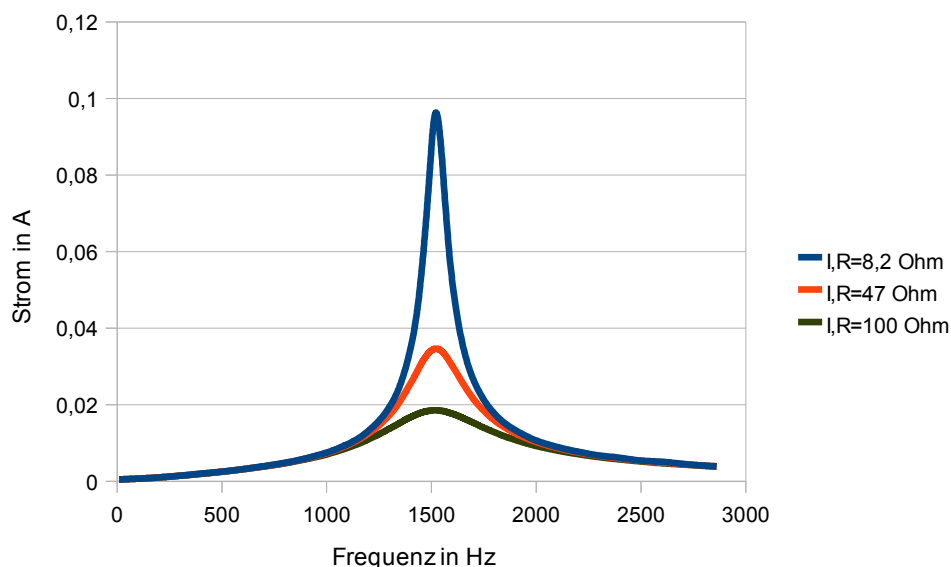
Desweiteren soll die Güte des Systems bestimmt werden. Dazu benötigt man die Breite des Peaks in der Höhe  $\frac{\Phi_{max}}{\sqrt{2}} = 2,10$  für 200mA bzw. 0,437 für 400mA. Diese beträgt für 200mA

0,00805 Hz und für 400mA 0,0468 Hz. Für die Güte gilt dann  $Q \approx \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$  (s. Vorbereitungshilfe).

Dies ergibt eine Güte von 63,7 für 200mA und 11,0 für 400mA. Der Wert für 200mA ist allerdings wegen des bereits beschriebenen, vermutlich zu hohen Peaks nicht unbedingt aussagekräftig. Der Vergleich mit den Gütewerten von Aufgabe 2 (21,8 für 200mA und 9,67 für 400mA) ergibt Abweichungen von 192% bzw. 13,8%. Da wir nur zwei Vergleichswerte haben und einer davon unsicher ist, können wir also keine Aussage treffen, ob sich die Güte bei einer erzwungenen Schwingungen im Vergleich zur freien, gedämpften verändert.

## 5. Elektrischer Schwingkreis mit erzwungener Schwingung

Der verwendete elektrische Schwingkreis bestand aus einer Wechselspannungsquelle und damit in Reihe geschaltetem Widerstand, Spule und Kondensator. Wir führten mit CASSY eine Messreihe durch, bei der die Stromstärke im Schwingkreis in Abhängigkeit von der Frequenz gemessen wurde. Die Frequenz wurde nach jeder Messung in periodischen Schritten erhöht. Diese Messreihe führten wir für drei verschiedene Widerstände durch.



Man erkennt aus den Messdaten und dem Schaubild, dass die Resonanzfrequenz bei etwa 1520 Hz liegt. Dies weicht vom in der Vorbereitung berechneten Wert von 1320 Hz um 15% ab. Dies könnte z. B. an ungenauer Angabe der Größen von Spule, Kondensator und/oder Widerständen liegen.

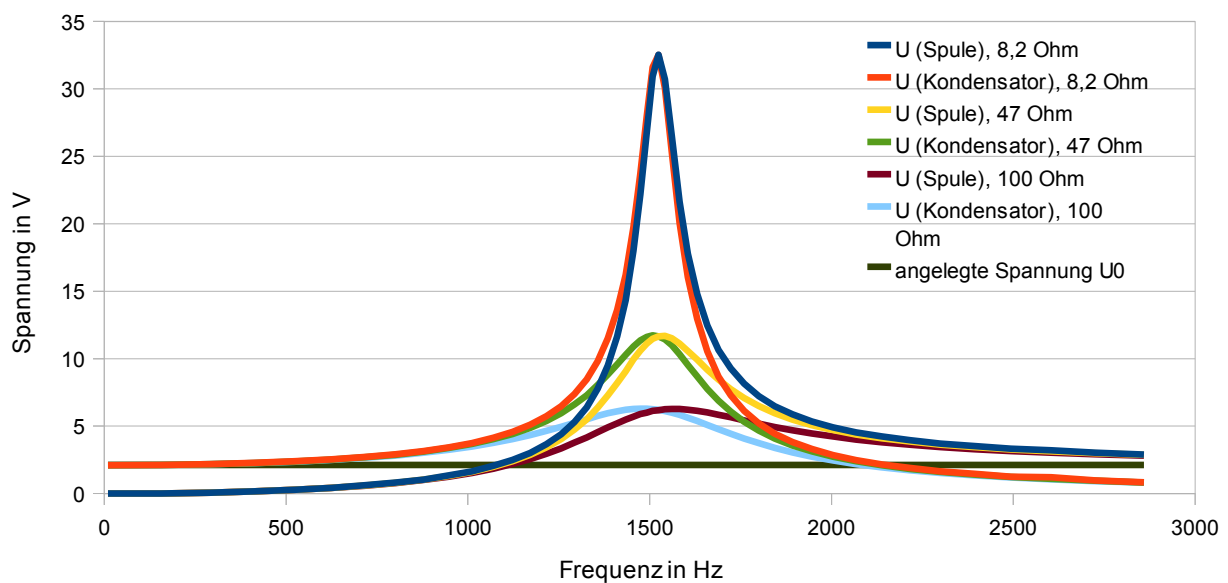


Außerdem maßen wir gleichzeitig die Gesamtimpedanz des Schwingkreises. Diese änderte sich in Abhängigkeit von der Frequenz wie unten dargestellt. Sie ist minimal bei der Resonanzfrequenz. Es ist auffällig, dass die unterschiedlichen Widerstände nur im Bereich der Resonanzfrequenz zu verschiedenen Kurven sowohl bei der Stromstärke als auch bei der Impedanz führen. Dort unterscheiden sich die Kurven aber sehr stark.

Aus der oberen Kurve haben wir nach dem Verfahren von Aufgabe 4 die Güte der Schwingkreise bestimmt. Dies ergab folgende Ergebnisse:

Widerstand in $\Omega$	8,2	47	100
Güte	13,99	5,33	3,04

Zum Demonstrieren der Spannungsüberhöhung an Spule und Kondensator des Schwingkreises haben wir diese Spannungen ebenfalls in Abhängigkeit der Frequenz im folgenden Schaubild aufgetragen. Die Ausgangsspannung an der Stromquelle war stets gleich (olivgrüne Linie).



Man erkennt, dass die Spannungen am Kondensator stets  $U_c \geq U_0$  für  $\omega < \omega_0$  und die Spannungen an der Spule stets  $U_L \geq U_0$  für  $\omega > \omega_0$  sind. Dies liegt daran, dass der Kondensator bei kleinen Frequenzen wie ein sehr großer Widerstand wirkt, an ihm also nahezu die komplette Spannung  $U_0$  abfällt, während die Spule kaum eine Einschränkung für den Stromfluss darstellt. Bei hohen Frequenzen ist dies umgekehrt. Man erkennt auch, dass durch die Eigenschwingung des Schwingkreises in der Nähe der Resonanzfrequenz deutlich größere Spannungen als die Spannung der Stromquelle entstehen, dies stellt die sog. Spannungsüberhöhung dar.

Eine weitere Möglichkeit, die Güte der Schwingkreise zu berechnen, ist folgende:

$Q = \frac{U_{L,max}}{U_0}$  oder  $\frac{U_{C,max}}{U_0}$ . Dies ergibt folgende Werte, die mit den oben berechneten weitgehend übereinstimmen:

Widerstand R in $\Omega$	8,2	47	100
Güte Q	15,34	5,51	2,96

Außerdem sollte die Phasenverschiebung gemessen werden (siehe unten stehendes Schaubild). Sie läuft bei kleinem Widerstand bei der Resonanzfrequenz sehr schnell von  $+90^\circ$  zu  $-90^\circ$ . Bei größeren Widerständen (entspricht größerer Dämpfung) gibt es einen größeren Übergangsbereich.

