



SS/WS 20.10.../.....

Praktikum: (~~P1~~/P2) (~~Mo~~/~~Di~~/Mi/Do) Gruppe-Nr: 14...

Name: Hauser ..... Vorname: Julia .....

Name: Leichle ..... Vorname: Stefan .....

Versuch: Gamma-Spektroskopie (P2-72,73,83) (mit/~~ohne~~) Fehlerrechnung

Betreuer: Nicole Pulch ..... Durchgeführt am: 31.05.2010

Abgabe am: 07.06.2010 .....

Rückgabe am: ..... Begründung:

2. Abgabe am: .....

Ergebnis: (+ / 0 / -)

Fehlerrechnung: ja / ~~nein~~

Datum: 07.06.2010 .....

Handzeichen: N. Pulch .....

Bemerkungen:



## Versuch P2-72,73,83: **Gamma-Spektroskopie und Statistik**

**Raum F2-19**

Bei Experimenten der Kern- und Elementarteilchenphysik ist neben den Fragen nach Art, Ort, Richtung und Zeitpunkt die Frage nach der Energie der auftretenden Strahlung besonders wichtig. Für die  $\gamma$ -Spektroskopie gibt es, wie auch für die anderen Teilchenarten, eine ganze Reihe von Nachweismethoden, von denen die mit Szintillator, Photokathode und Sekundärelektronenvervielfacher (SEV) besonders verbreitet ist. So werden z.B. auch in den Großexperimenten des LHCs am CERN Photonen mit Szintillationszählern vermessen.

In diesem Versuch lernen Sie diese wichtige experimentelle Technik und die zugehörigen elektronischen Geräte kennen. Für das Verständnis der Methode bedarf es der Beschäftigung mit den drei Wechselwirkungsprozessen von  $\gamma$ -Strahlung mit Materie. Schließlich liefern die bei der Szintillationsspektroskopie auftretenden statistischen Vorgänge noch Anlass zu einer etwas eingehenderen Beschäftigung mit statistischen Gesetzmäßigkeiten.

**Hinweis:** Die Kernphysik-Räume stellen einen innerbetrieblichen Überwachungsbereich dar. Hier gelten nach der Strahlenschutzverordnung besondere Regeln, die unbedingt zu beachten sind. Kernphysikalische Versuche dürfen erst nach Teilnahme an der Strahlenschutzbelehrung (die im Regelfall während der Vorbesprechung zum Praktikum stattfindet) durchgeführt werden. Der Zugang zum Bunker für radioaktive Präparate ist nur den Betreuern gestattet.

**Hinweis:** Bitte USB-Stick mitbringen, um die Daten zur Auswertung mit nach Hause nehmen zu können.

### **Aufgaben:**

#### **1.1 Messen Sie das Impulshöhenspektrum der $\gamma$ -Strahlung von Cs-137 im Einkanalbetrieb des Impulshöhenanalysators.**

Die Datenerfassung erfolgt über das Vielkanal-Interface des CASSY-LAB Systems. Starten Sie das CASSY Programm und machen Sie sich damit vertraut. Stellen Sie die geeigneten Parameter in dem *Messparameterfenster* ein. Es empfiehlt sich, dieses Fenster für schnelleres Arbeiten weiterhin offen zu halten. Das Bedienungshandbuch des CASSY Systems ist vor Ort vorhanden und liegt auf der Praktikumsseite im Internet in elektronischer Form vor. Zur Durchführung des Versuches ist die Kenntnis der ersten dreißig Seiten von Nutzen und sollten schon zur Versuchsvorbereitung gelesen werden.

Der dynamische Bereich des Detektors soll durch geeignete Einstellung der Betriebsspannung am SEV (*Sehen Sie sich die Ausgangsimpulse des SEV am Oszilloskop an.*) und der Software-Verstärkung möglichst voll ausgenutzt werden. Die Spannung ist gut eingestellt, wenn die Signale der höchsten Gamma-Linie gerade noch nicht in Sättigung gehen ( $\sim 900\text{V}$ ). Das Spektrum ist in eine zweckmäßige Anzahl von Impulshöhenintervallen (z.B. 50 Intervalle) zu zerlegen.

Eine Messdauer von 10 Sekunden pro Intervall (=Kanal, Fenster) ergibt vernünftige Gesamtmesszeiten. Der Abstand zwischen radioaktiver Quelle ( $\gamma$ -Präparat) und Szintillatorvorderfläche wird so gewählt, daß die Zählrate im Vielkanalmodus wenigstens  $1000\text{ s}^{-1}$  beträgt. Diese Rate können Sie im Fenster *Eigenschaften* (rechte Maustaste auf den Spektrumsbutton) erkennen. In diesem Fenster können Sie auch gezielt einzelne Spektren löschen.

#### **1.2 Messen Sie das Impulshöhenspektrum der $\gamma$ -Strahlung von Cs-137, Na-22 und von Co-60 sowie das Untergrundspektrum mit Hilfe des 1024-Kanalbetriebs des Impulshöhenanalysators.**

Stellen Sie die Programmparameter in dem *Parameterfenster* entsprechend ein. Der dynamische Detektorbereich soll vom Impulshöhenspektrum der höherenergetischen Strahlung (Co-60, 1173 und 1333 keV), ausgenutzt und unverändert auch bei der Messung an Cs-137 (662 keV) und Na-22 (511 und 1275 keV) benutzt werden.

Das Entstehen eines Impulshöhenspektrums mit der Zeit kann am Bildschirm verfolgt werden. Der Abstand Präparat - Szintillator soll jeweils so gewählt werden, daß die effektive Zählraten für Co-60, Na-22 und Cs-137 etwa gleich sind und 1000/s bis 1500/s betragen. Diese effektive Zählrate (Mittel über alle Kanäle) wird im Fenster *Eigenschaften* angezeigt. Überprüfen Sie, welchen Einfluss das Untergrundspektrum auf die Messung hat, und korrigieren Sie ggf. die Spektren.

*Hinweis:* Bitte vergessen Sie nicht, auch Zwischenergebnisse abzuspeichern, um etwaigen Datenverlust vorzubeugen.

### **1.3 Deuten Sie die erhaltenen Impulshöhenspektren aufgrund der verschiedenen Wechselwirkungsprozesse von $\gamma$ -Strahlung mit Materie.**

Dazu ist es zweckmäßig, anhand des Photopeaks von Cs-137 eine Energieskalierung vorzunehmen und dann die gemessenen und die berechneten Energien an Stellen, bei denen Besonderheiten im Impulshöhenspektrum zu erwarten sind, zu vergleichen. **Berechnen Sie dafür bereits in der Vorbereitung die Energien der Comptonkanten.**

Das Programm unterstützt den Benutzer bei der Analyse eines Spektrums: Zeigt der Cursor in das zu analysierende Spektrum und drückt man die rechte Maustaste, so werden verschiedene Analysewerkzeuge angeboten. Zusätzlich können Sie erklärenden Text in die Diagramme einfügen und diese dann ausdrucken.

Diskutieren Sie auch die statistischen Effekte, welche die 'Verschmierung' des erhaltenen Impulshöhenspektrums, besonders deutlich bei den Photopeaks, bewirkt haben. **Schätzen Sie die Anzahl der Elektronen  $n_e$  ab**, die bei einem Impuls, der zum Photopeak bei Cs-137 beiträgt, von der Photokathode emittiert wurden.  $n_e$  charakterisiert die Auflösung eines Detektors.

Überprüfen Sie die Linearität der Apparatur, indem Sie die Information aus den drei Spektren verwenden. Mit unveränderten Einstellungen können noch Spektren (oder ein Überlagerungsspektrum) mit weiteren radioaktiven Quellen aufgenommen werden. Geeignet sind Am-241 (59,5 keV) und Co-57 (122 keV). Der Betreuer kann Ihnen diese Quellen aushändigen.

## **2 Bestimmen Sie die Aktivität des Cs-137-Präparats.**

Verwenden Sie die Zählraten, die vom Programm berechnet und angezeigt werden, und die Nachweiswahrscheinlichkeit (Diagramm 'Quotient Anzahl der ... Quanten') des benutzten Szintillatorkristalls im gewählten Abstand und bei der betreffenden Strahlungsenergie. Welche Effekte berücksichtigt das Diagramm, wenn bei seiner Verwendung kein weiterer Effekt mehr in die Rechnung einfließen muß? Bei wenigstens drei verschiedenen Abständen Quelle-Szintillatorstirnfläche sollte gemessen und ein Ausgleichswert berechnet werden. Prüfen Sie, ob eine Totzeitkorrektur der Zählraten notwendig ist.

## **3 Röntgenemission**

Verwenden Sie die Cs-Quelle um an Materialien mit schwerem Z Röntgenemission zu erzeugen. Legen Sie dazu die entsprechenden Materialien direkt auf den Szintillator. Erhöhen Sie die Messgenauigkeit für niedrige Energien durch Erhöhen der Detektorspannung. Zur genauen Peakbestimmung sollte der Gaussfit verwendet werden.

**3.1 Führen Sie eine Energiekalibration anhand der Ba und Pb –  $K_{\alpha}$  Röntgenlinie durch und stellen Sie die gemessene Energie gegen  $Z^2$  für alle vorhandenen Elemente auf** (Moseleysches Gesetz, siehe Abbildung).

**3.2 Bestimmen Sie anhand Ihres Diagramms das „unbekannte Element“.**

**4.1 Untersuchen Sie die statistische Verteilung von gemessenen Ereignisanzahlen bei häufig wiederholter Messung von Untergrundstrahlung unter stets gleichen Bedingungen.**

Wählen Sie dazu im *Parameterfenster*: *Vielkanalmessung*, 256 Kanäle und *wiederholende Messung* bei einer Messzeit von 1 Sekunde. Nehmen Sie einen statistischen Daten-Pool von mindestens 150 Spektren auf.

Sie erhalten eine Tabelle mit 150 Spalten (Spektren) und 256 Zeilen (Kanäle, Energieintervalle). Keiner der Einträge ist vorhersagbar sondern hängt nur von der Statistik des radioaktiven Zerfalls ab, der einen natürlichen Zufallsgenerator darstellt.

Bilden Sie zwei Stichproben mit je 150 Zahlen, indem Sie:

- die Zählrate aus nur einem Teil eines Spektrums aufintegrieren, so dass der Mittelwert der 150 Summen ungefähr 3 beträgt.
- die Gesamtzählrate der einzelnen Spektren verwenden.

Hilfe zur Bearbeitung mit EXCEL: Importieren Sie die von CASSY-Lab gespeicherten LAB Dateien in EXCEL (Einstellungen: "getrennt", Trennzeichen: "Tabulator"). Im Mittelteil enthält diese Datei einen großen Tabellenblock mit allen Spektren als Spaltenvektoren. Die relevanten Zahlen stehen in Zeilen, die mit NAN (*not a number*) beginnen. Zur Auswertung generiert man in einer EXCEL-Tabelle eine Spalte mit den Einträgen zum Beispiel "=Summe(C10:C26)", "=Summe(D10:D26)", "=Summe(E10:E26)", ... bzw. "=Summe(C1:C256)", "=Summe(D1:D256)", "=Summe(E1:E256)", ...

Mit der Häufigkeitsfunktion kann man dann zur weiteren Analyse die Häufigkeitsverteilung dieser Stichproben erhalten. Erstellen Sie dazu eine Spalte mit den Klassen (z.B. Zahlen 1 bis 40), markieren Sie die Zellen der Spalte, die die Häufigkeiten aufnehmen sollen. Unter *Einfügen/Funktion* finden Sie die Funktion *Häufigkeit*. Wählen Sie für *Daten* die Werte einer Stichprobe und für *Klassen* die Zellen der Klassenspalte. Beim Verlassen der Funktion bestätigen Sie mit *Strg-Umschalt-Eingabe*, damit die Formel als Matrixfunktion eingegeben wird.

#### **4.2 Berechnen Sie von beiden Stichproben den Mittelwert $\bar{x}_m$ , die Standardabweichung $s$ der Einzelmesswerte und die Standardabweichung $s_{\bar{x}_m}$ des Mittelwertes.**

Prüfen Sie, ob die Standardabweichung der Einzelmesswerte gleich der Wurzel aus dem Mittelwert ist, wie die theoretisch zu erwartende Poisson-Verteilung es verlangt.

**4.3 Stellen Sie die Stichproben als Häufigkeitsverteilungen graphisch dar, und tragen Sie in das jeweilige Diagramm auch die mit Hilfe von  $\bar{x}_m$  berechnete Poisson-Verteilung und die mit Hilfe von  $\bar{x}_m$  und  $s$  berechnete Gaußverteilung (=Normalverteilung) ein.** Machen Sie eine Aussage über die Ersetzbarkeit der Poissonverteilung durch die Gaußverteilung in Abhängigkeit vom Mittelwert.

**4.4 Prüfen Sie mit Hilfe des Chi-Quadrat-Tests bei einer vernünftig gewählten Signifikanzzahl die Hypothesen, daß die Stichprobe a) aus einer 1) normalverteilten, 2) poissonverteilten Grundgesamtheit stammt.**

#### **Zubehör:**

NaJ(Tl)-Szintillationskristall (1"×1" Ø×Höhe, Dicke der Alu-Hülle: 0,5mm)

Photomultiplier mit 14-stufigem Sekundärelektronenvervielfacher (SEV), mit Photokathode Ø=1,5", (im Gehäuse gemeinsam mit NaJ); Vorverstärker aufgesteckt.

Spannungsversorgung 1kV/0.6mA

CASSYLAB System mit Vielkanal Interface und PC.

Mess- und Auswerteprogramm CASSYLAB

Zweikanal-Oszillograph, 50MHz; Maßstab

#### **Radioaktive Präparate:**

Cs-137 {140, 170, 270 kBq} in  $\gamma$ -Fassung (Plexiglasstift), Abstand Quelle-Stirnfläche ( $2,0 \pm 0,5$ ) mm

3x Co-60 {20 kBq} in Aluminiumstift Ø×L=12mm×85mm; Abstand Quelle-Stirnfl. ( $4,0 \pm 0,2$ ) mm

3x Na-22 {74 kBq} in Aluminiumstift Ø×L=12mm×85mm; Abstand Quelle-Stirnfl. ( $4,0 \pm 0,2$ ) mm (neu)

weitere Präparate (Am-241; Co-57) sind ausleihbar.

#### **Literatur:**

Riezler, Kopitzki: *Kernphysikalisches Praktikum*

G. F. Knoll: *Radiation Detection and Measurement*, VCH 2000

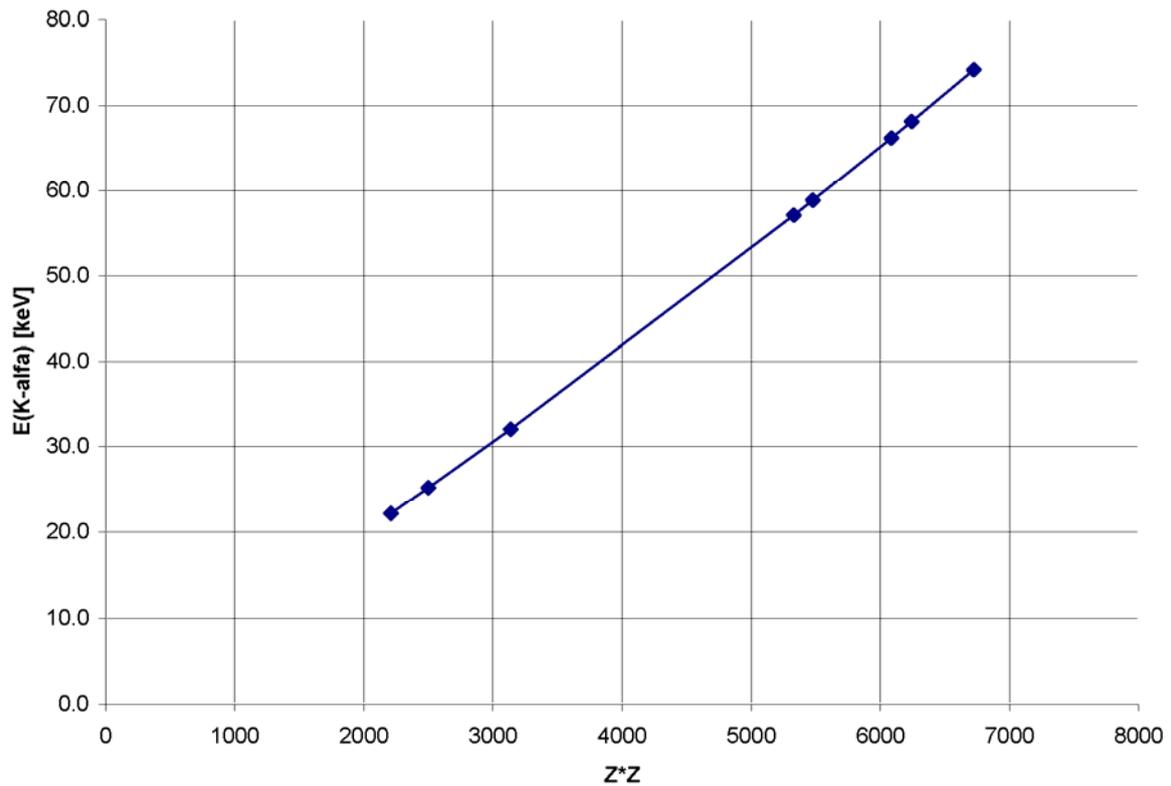
Musiol, Ranft, Reif, Seeliger: *Kern- und Elementarteilchenphysik*, VCH 1988

J.R. Taylor: *Fehleranalyse*, VCH 1988

Jüngst: *Vorbereitungshilfe zu diesem Versuch*

### zum Moseley Gesetz ( $E \sim Z^2$ )

Element	Z	K-alpha-1	K-alpha-2	Branching 1/2	K-gemittelt	Z*Z	Mos-Fakt
Ag	47	22.2	22.0	53.1	<b>22.1</b>	2209	0.010
Sn	50	25.3	25.0	53.4	<b>25.2</b>	2500	0.010
Ba	56	32.2	31.8	54.3	<b>32.1</b>	3136	0.010
Ta	73	57.5	56.3	57.4	<b>57.1</b>	5329	0.011
W	74	59.3	58.0	57.6	<b>58.8</b>	5476	0.011
Pt	78	66.8	65.1	58.5	<b>66.2</b>	6084	0.011
Au	79	68.8	67.0	58.7	<b>68.1</b>	6241	0.011
Pb	82	75.0	72.8	59.5	<b>74.2</b>	6724	0.011
		[keV]	[keV]	[%]	<b>[keV]</b>		



# Gamma-Spektroskopie und Statistik - P2-72,73,83

Julia Hauser, Stefan Leichle

## Vorbereitung

### Gammastrahlen und ihre Wechselwirkung mit Materie

Gammastrahlung ist eine elektromagnetische Strahlung, welche beim Kernzerfall entsteht. Sie hat im Vergleich zu  $\alpha$ - und  $\beta$ -Strahlung (geladene Teilchen) eine hohe Eindringtiefe. Die Quanten der Gammastrahlung (Photonen) sind ungeladen. Zum Nachweis dieser ungeladenen Teilchen nutzt man die verschiedenen Wechselwirkungen der Quanten mit Materie - und vor allem die daraus entstehenden Sekundärteilchen - aus:

- Photoeffekt: Das Photon löst ein Elektron aus einer inneren Schale eines Atoms. Hierbei wird die Energie des Photons vollständig absorbiert und in Austrittsarbeit (zum Lösen des Elektrons) und kinetische Energie des Elektrons aufgeteilt. Der Photoeffekt tritt vor allem bei niedrigen Photonenenergien und hohen Ordnungszahlen der Atome ( $\rightarrow$  viele Elektronen) auf. Als Tertiärprodukte entstehen Röntgenstrahlung oder Auger-Elektronen.
- Comptoneffekt: In einem inelastischen Stoß überträgt ein Photon einen Teil seiner Energie an ein äußeres Elektron eines Atoms. Das Elektron wird gelöst und erhält kinetische Energie vom Photon, das Photon erfährt durch die Energieabgabe eine Frequenzänderung. Der Energieübertrag ist hierbei von der Streurichtung abhängig. Einen maximalen Energieübertrag erhält man für die Rückstreuung des Photons ( $\rightarrow$  Comptonkante). Die Wahrscheinlichkeit für den Comptoneffekt steigt mit geringen Quantenenergien und steigender Ordnungszahl der Atome.
- Paarbildung: Ab einer Energie von 1,02 MeV kann ein  $\gamma$ -Quant ein Elektron-Positron-Paar erzeugen. Das Positron zerstrahlt mit einem Elektron unter Ausstrahlung zweier Quanten, welche wiederum Photo- oder Comptoneffekte hervorrufen können. Dies wird im Versuch aufgrund der geringeren Energien jedoch nicht auftreten.

### Wirkungsweise eines Detektors

Zur Registrierung von  $\gamma$ -Quanten werden wir in den Versuchen einen Szintillator verwenden. Dieses Messgerät besteht aus zwei Komponenten:

Im Szintillatorkristall werden durch die eintreffenden Gammaquanten oder Sekundärteilchen Photonen im sichtbaren oder UV-Bereich emittiert. Diese werden hinter dem Kristall auf einer zu diesem Spektrum passende Photokathode aufgefangen, wo sie durch den Photoeffekt Elektronen lösen. Durch diesen Ablauf ergeben

sich an den Szintillator folgende Bedingungen: Transmission der emittierten Photonen, möglichst hohe Emission (verschiedene Anregungsniveaus, kurzlebige Anregungszustände).

Der zweite Teil ist ein Sekundärelektronenvervielfacher (SEV), welcher die Elektronen aus der Photokathode vervielfacht und so in einen elektrisch registrierbaren Impuls umwandelt. Dazu treffen die Elektronen auf Dynoden, auf welchen sie mehrere weitere Elektroden herausschlagen. Diese werden dann zur nächsten Dynode beschleunigt, sodass lawinenartig viele Elektronen freigesetzt werden. So können Verstärkungsfaktoren bis zu einer Milliarde erreicht werden.

## Messung eines Spektrums

Ein Spektrum ist die Auftragung der Anzahl (oder relativen Häufigkeit) von Impulsen über ihre Energie (oder Wellenlänge oder Frequenz). Zur Messung eines Spektrums gibt es zwei Möglichkeiten:

- Einkanalanalyse: Ein Spannungsfenster konstanter Größe  $\Delta U$  wird über den zu messenden Bereich geschoben. In jedem Messintervall ( $U$  bis  $U + \Delta U$ ,  $U + \Delta U$  bis  $U + 2\Delta U$  usw.) wird die Anzahl der Impulse innerhalb dieses Intervalls gezählt.
- Vielkanalanalyse: Hier werden in Parallel-Verarbeitung in mehreren Kanälen gleichzeitig die Impulse gezählt. So kann in kürzerer Zeit ein Spektrum mit gleicher oder besserer Zählstatistik als in der Einkanalanalyse aufgenommen werden.

## „Fehler“ in Spektren

### Rückstreupeaks

Da die Strahlungsquelle in alle Richtungen  $\gamma$ -Quanten abstrahlt, werden auch Quanten in die dem Szintillator entgegengesetzte Richtung ausgestrahlt. Erfahren diese Quanten nun einen Compton-Effekt mit Rückstreuung ( $\theta$  zwischen  $100^\circ$  und  $180^\circ$ ) treffen sie dennoch in den Szintillator, wobei sie jedoch schon eine Energie nahe der Compton-Kante verloren haben. Da die Energien der Quanten nach dem Compton-Effekt durch  $E'_\gamma = E_\gamma / (1 + \frac{E_\gamma}{m_0 c^2} (1 - \cos \theta))$  gegeben sind, liegen die Energien der zwischen  $100^\circ$  und  $180^\circ$  gestreuten Quanten in einem kleinen Energieintervall. So kommt es zu einer Überhöhung der Impulsanzahl in diesem Bereich, was als Rückstoßpeak im Spektrum zu erkennen ist.

### Escape-Peaks

Escape-Peaks treten auf, wenn die  $\gamma$ -Quanten Paarbildung hervorrufen und die dabei entstehenden Elektronen das Detektormaterial ohne weitere Wechselwirkung verlassen.

### Compton-Kante

Die Compton-Kante entsteht aufgrund der oberen Grenze des Energieübertrags beim Comptoneffekt (siehe oben). Die Maximalenergie des Elektrons und damit die Lage der Compton-Kante beträgt  $E_{\max} = E_\gamma \cdot \left(1 - 1 / \left(1 + \frac{2E_\gamma}{m_0 c^2}\right)\right)$ .

## Pile-Ups

Der Szintillator hat eine beschränkte zeitliche Auflösung, da die Sekundärelektronen, die nach einem  $\gamma$ -Einfall im SEV gelöst werden, alle registriert und zur Energie des  $\gamma$ -Quants gerechnet werden sollen. Treten nun sehr kurz nacheinander zwei  $\gamma$ -Quanten auf, werden die Elektronen zu einem Impuls gezählt. Hierdurch wird fälschlicherweise anstelle zweier Impulse nur ein energiereicherer Impuls gezählt. Die Mindestzeit die zwischen zwei Impulsen liegen muss, damit diese korrekt ausgewertet werden, heißt Totzeit.

## Röntgenlinie des Cs-137

Im Spektrum des Cs-137 ist im niedrigen Energiebereich ein weiterer Peak zu erkennen. Dies ist der Photopeak von Ba-137, welches nach seiner Entstehung beim Cs-Zerfall vom angeregten in den unangeregten Zustand übergeht und dabei die Energie an ein kernnahes Elektron übergibt. Dieses verlässt die Quelle. Beim Nachrücken eines äußeren Elektrons auf seinen Platz wird ein Röntgenquant (ca. 32 keV) emittiert.

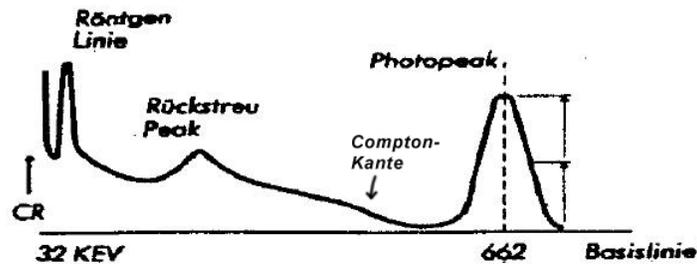


Abbildung 1: Spektrum mit „Fehlern“ und Röntgenlinie

## Röntgenemission

Elemente mit hoher Kernladungszahl können Photonen mit Energien im Röntgenbereich emittieren. Die Energie der abgestrahlten Photonen ist dabei charakteristisch für das jeweilige Element, man kann also anhand dieser Strahlung bestimmen, welche Elemente sich in einer Probe befinden.

## Moseley'sches Gesetz

Das Moseley'sche Gesetz beschreibt die Lage der  $K_{\alpha}$ -Linien im Spektrum. Es gilt:

$$f_{K_{\alpha}} \approx f_R \cdot (Z - 1)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)$$

Die Energie der emittierten Röntgenquanten ist also proportional zum Quadrat der Kernladungszahl. Trägt man die gemessenen Energien (Photopeaks der Röntgenquanten) verschiedener Elemente über  $Z^2$  auf, erhält man eine Gerade (Wertetabelle und Diagramm auf dem Aufgabenblatt abgebildet).

Um diese Linie aufzeichnen zu können, legen wir verschiedene Proben direkt auf den Szintillationskristall und verwenden die Cs-137 -Probe um die Proben anzuregen. Im aufgenommenen Spektrum ermitteln wir dann die Energie des Röntgenpeaks, welcher uns auf die Kernladungszahl schließen lässt. In Aufgabe 3 bestimmen wir auf diese Weise die Elemente in verschiedenen Proben.

## Statistische Effekte

### Unschärfen

Eigentlich erwartet man scharfe Peaks z.B. für die Röntgenemission, tatsächlich misst man aber eine stochastische Verteilung um den erwarteten Peak. Verantwortlich dafür ist die endliche Energieauflösung, die der Halbswertsbreite eines Peaks entspricht.

### Statistische Auswertung

Wir untersuchen den radioaktiven Zerfall des Cs-137-Präparats. Da es sich dabei um einen von Natur aus stochastischen Prozess handelt, verwenden wir stochastische Methoden. Dazu zeichnen wir in Aufgabe 4 150 Spektren unter den selben Bedingungen auf und nehmen 2 verschiedene Stichproben:

- Integration der Zählrate in einem Teil des Spektrums (Mittelwert etwa 3)
- Verwendung der Gesamtzählrate einzelner Spektren

Danach bestimmen wir Mittelwert, Standardabweichung und Mittelwert der Standardabweichung mit folgenden Formeln:

$$x_m = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^N x_i$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=0}^N (x_i - x_m)^2}$$

$$s_{x_m} = \frac{s}{\sqrt{N}}$$

Im Falle einer Poissonverteilung gilt außerdem  $s = \sqrt{x_m}$ , was bei unseren Messwerten zu überprüfen ist.

## Gauß- und Poissonverteilung

Beides sind typische statistische Verteilungen, die Gaußverteilung nennt man auch Normalverteilung. Bei der Gaußverteilung handelt es sich um eine kontinuierliche Verteilung, deren Kurve einer Glocke ähnlich sieht:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - x_m)^2}{s^2}\right)$$

Die Poissonverteilung ist eine diskrete Verteilung:

$$f(n) = \frac{(x_m)^n}{n!} \cdot \exp(-x_m)$$

Für große  $x_m$  kann die Poissonverteilung durch eine Gaußverteilung angenähert werden mit  $s = x_m$ .

## $\chi^2$ -Test

Um zu überprüfen, ob eine gegebene Verteilung einer theoretischen Kurve entspricht (wie z.B. der Gaußverteilung oder Poissonverteilung), verwendet man den  $\chi^2$ -Test. Dazu berechnet man die Größe  $\chi^2$  wie folgt:

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^N \frac{(x_i - e_i)^2}{e_i}$$

Dabei ist  $x_i$  der gemessene Wert und  $e_i$  der Wert, der der theoretischen Kurve entspricht. Nun vergleicht man die Größe  $\chi^2$  mit dem Wert aus einer Tabelle (Signifikanzniveau  $\alpha$  über Freiheitsgrade  $N - 1$ ). Ist  $\chi^2$  größer oder gleich dem Wert aus der Tabelle, so wird die theoretische Kurve abgelehnt, d.h. die gemessene Verteilung entspricht nicht der Theorie.

---

## Bildquellen:

- Abb. 1: aus Vorbereitungshilfe, S. 2

# Sammelspektroskopie - Aufgaben

## 1.1 $\gamma$ -Spektrum im 1-Kanalbetrieb (Cs-137)

- SEV und Software-Einstellungen einstellen  $\rightarrow$  Signale der vollen Impulse  $\sim 900V$
- Spektrum in ca 50 Intervalle zerlegen
- Präparat so auslegen, dass im Wellenlängenbereich eine Zählrate  $\sim 1000 \frac{1}{s}$  angestreift wird
- 10 Sekunden pro Intervall messen

## 1.2 $\gamma$ -Spektrum im Vielkanalbetrieb (Cs-137, Na-22, Co-60)

- Messintervall auf Co-60 einstellen (bis 1333 keV) und für andere Präparate so belassen (Na-22: 511 keV  $\rightarrow$  511-1333 keV sollte im Spektrum messbar sein)
- Zählzeiten aller Präparate etwa gleich  $\sim 1000 - 1500 \frac{1}{s} \Rightarrow$  Abstand präparat wählen
- Aufnahme eines Spektrums (gleiche Zeit für alle Präparate?)
- Aufnahme des Untergrundspektrums (gleiche Zeit?)
- Subtraktion des -u- von dem entsprechenden Spektrum

## 1.3 Deutung der Spektren und Wächterschaltungen

- Energieskalierung der Achsen anhand des Photopeaks von Cs-137 (662 keV)

- erwartete Bestandteile:

	Cs-137	Co-60	Na-22	
Photopeak	662	1178 1333	511 1275	keV
Comptonkonte	477	969 1113	510 1064	keV
Rückstreupunkt	185	240 215	114 215	keV
Bi-BT-Röntgenlinie	32			

- Abschätzung der Elektronen eines Impulses im Photopeak:  $n_e = \left(\frac{E}{\Delta E}\right)^2$
- Überprüfung der Linearität der Apparatur  
z.B.  $E(\text{Comptonkonte}) + E(\text{Rückstreupunkt}) = E(\text{Photopeak})$  bei korrekten Achsen

## 2 Aktivität des Cs-137:

- Zählrate aus CASY, Abstand Quelle - Szintill  $\rightarrow$  Aktivität bestimmen mithilfe von Abb. 4 der Vorlesungshilfe
- mind. 3 Messwerte für unterschiedliche Abstände
- Totzeitkorrektur why?

### 3) Röntgenmessungen:

- Detektorspannung erhöhen  $\Rightarrow$  höhere Genauigkeit bei niedrigen Energien
- Proben direkt auf Detektor legen
- $\gamma$ -Quelle ( $^{137}\text{Cs}$ - $\text{Ba}^{137\text{m}}$ ) zur Anregung nutzen

3.1 -  $\text{K}\alpha$ - und  $\text{Pb}$ -linien aufzeichnen (Spitze als Endpunkte annehmen)

3.2 -  $E-Z^2$ -Diagramm aufstellen  $\Rightarrow$   $Z$  bestimmen und Probe identifizieren

### 4.1) Statistische Untersuchung:

- Messung des Untergrundspektrums, 150 und, 1s
- Stichproben bilden: a) Zählraten aus einem Teil des Spektrums aufsummieren (Mittelwert  $\approx 5$ )

b) genaue Zählrate des Spektrums aufsummieren

- Häufigkeitsverteilung aufstellen (z.B. Anzahl Teilchen 1 2 3 ...  $n$ )  
Häufigkeit 0 2 1 ...  $n$

4.2) - berechne  $\bar{x}_m$ ,  $S$ ,  $S_{em}$

- prüfe  $s = \sqrt{\bar{x}_m}$  (das sollte im Falle einer Poissonverteilung so aussehen sein)

4.3) - Häufigkeiten plotten inkl. Poisson und Gaußkurven, die sich zum Bild ergeben

- ist die Poissonverteilung, deren Gaußverteilung annähernd,  $\mu$   $\bar{x}_m$  hinreichend groß?

4.4)  $\chi^2$ -Test:

- berechne die erwarteten Häufigkeitswerte nach der Gaußverteilung  $g_i$  und der Poissonverteilung  $f_i$  aus 4.3

- berechne  $\chi_g^2 = \sum_{i=0}^n \frac{(x_i - g_i)^2}{g_i}$  und  $\chi_f^2 = \sum_{i=0}^n \frac{(x_i - f_i)^2}{f_i}$

- vergleiche  $\chi^2$  mit Tabellennäheren und prüfe Anlage über die Wahrscheinlichkeit, mit der eine Poisson- oder Gaußverteilung vorliegt

# Gammasppektroskopie - Messprotokoll

Pu

① 1) Probe: Cs-137  
 Beschleunigungsspannung: 878 V  
 Abstand Detektor - Ionisationskammer: 1,1 cm  
 Totzeit: 7%  
 Pulshöhe: 5102 mV  
 numerische Verstärkung: 0,98  
 Zählrate: 896,51  $\frac{1}{s}$

Messpunkte: 50  
 Dauer pro Messpunkt: 1s

2) Probe: Cs-137  
 Abstand: 1,3 cm  
 Zählrate: 1128,6  $\frac{1}{s}$   
 Totzeit: 8%

für alle Proben:  
 - numerische Verstärkung: 0,98  
 - Pulshöhe: 5102 mV  
 - Kanalbreite: 1024  
 - Messzeit: 300s  
 - Beschleunigungsspannung: 878 V

Probe: Untergrundspektrum  
 Zählrate: 31,44  
 Totzeit: 0%

Probe: Co-60  
 Abstand: 0,95 cm  
 Zählrate: 1131,76  
 Totzeit: 8%

Probe: Na-22  
 Abstand: 3,4 cm  
 Zählrate: 1158,33  
 Totzeit: 8%

3) Energieskalierung anhand des ersten Peaks von Co-60 (1173 keV)  
 Korrektur der Spektren durch Subtraktion des Untergrundspektrums mit CASY

② Abstand: je 0,5  
 Probe: Cs-137  
 1024 Kanäle

Abstand [cm]	Zählrate	Totzeit
0,5	85508	10%
1	71315	9%
1,5	62649	8%
2	54834	7%
3	43696	5,5%
4	35303	4%
6	24697	3%
10	15220	2%
20	6793	1%

③

Probe: Cs-137  
Abstand: 1,2 cm

Kesseltiefe: 300  
Kanalbetrieb: 1024

Probekästchen	Zählrate	Totzeit	
ohne (± Berium)	1183,38	8,5%	} Eichpunkte für ε-ε'-Gemisch
Tantal	1104,76	8%	
A	1009,22	7,5%	
C	960,84	7%	
D	1037,55	8%	
E	1078,65	8%	

④

Beauflegungsspannung 567V  
Kesselt pro Spektrum 1s

minimale Verstärkung 442

Anzahl Spektren 200

PK

# Auswertung

## Aufgabe 1

Vor Aufnahme des ersten Spektrums justierten wir den Aufbau und die Messsoftware: Wir brachten die Probe oberhalb des Szintillators an und variierten ihre Position, während wir eine Vielkanalmessung (1024 Kanäle) mit CASSY durchführten, bis uns eine Zählrate von etwa 1000 Impulsen pro Sekunde angezeigt wurde (Abstand Probenende-Szintillator: 2,1 cm). Anschließend machten wir nochmals mehrere solcher Messungen, wobei wir die Beschleunigungsspannung am SEV variierten. Wir passten sie so an, dass der Photopeak des Cs-137 möglichst weit am rechten Ende des Spektrums, aber noch ganz zu erkennen war (Beschleunigungsspannung: 878 V).

### 1.1 Impulshöhenspektrum im Einkanalbetrieb

Im Einkanalbetrieb nahmen wir mit CASSY ein Spektrum der Cs-137-Probe auf. Wir unterteilten das Spektrum in 50 Intervalle und maßen pro Intervall je 10 Sekunden (Anmerkung: Fehler im Protokoll, es muss korrekterweise 10s Messdauer und nicht 1s heißen). Wir erhielten damit nach 500s Messdauer folgendes Spektrum:

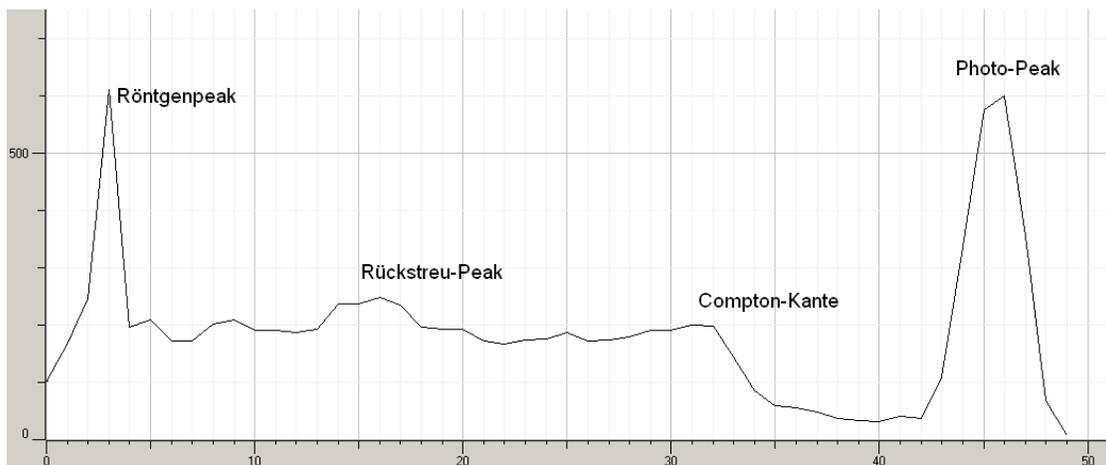


Abbildung 1: Spektrum Cs-137 im Einkanalbetrieb

Auf der x-Achse sind hierbei die Intervalle aufgetragen, auf der y-Achse die Anzahl der Impulse. Man erkennt deutlich den erwarteten Verlauf des Spektrums (Merkmale wie in der Abbildung beschriftet).

### 1.2 Impulshöhenspektren im Vielkanalbetrieb

Im Vielkanalbetrieb (1024 Kanäle) nahmen wir nochmals das Spektrum von Cs-137, außerdem von Co-60, Na-22 und das Untergrundspektrums auf. Da bei Co-60 höhere Quantenenergien (1333 keV) zu erwarten sind,

erniedrigten wir nach einer Testmessung die Beschleunigungsspannung des SEV auf 817 V, sodass auch dieser Photopeak vollständig im Spektrum erkennbar war. Dann nahmen wir die Spektren je 300 s mit 1024 Kanälen auf.

Für das Untergrundspektrum erhielten wir vor allem Impulse im niederenergetischen Bereich. Die Zählrate betrug  $31,44 \frac{1}{s}$ , die Totzeit 0 %:

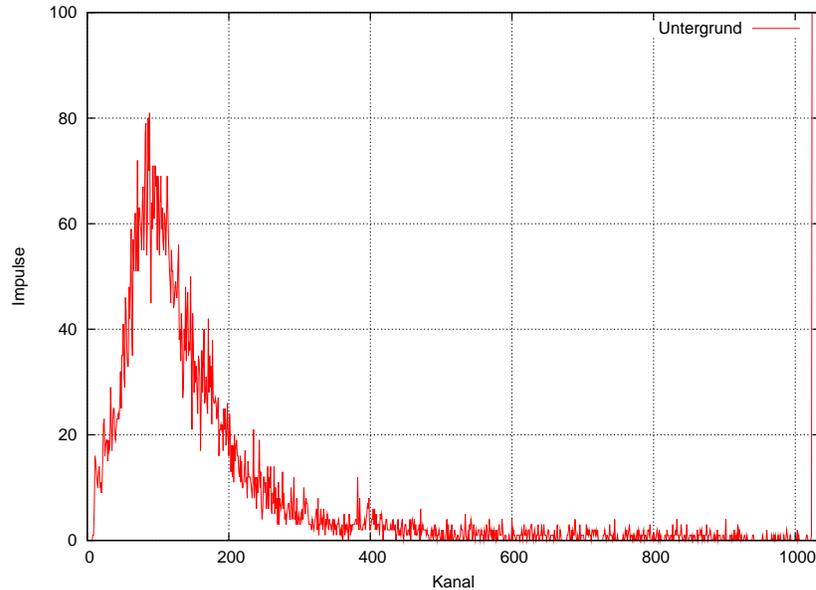


Abbildung 2: Untergrundspektrum

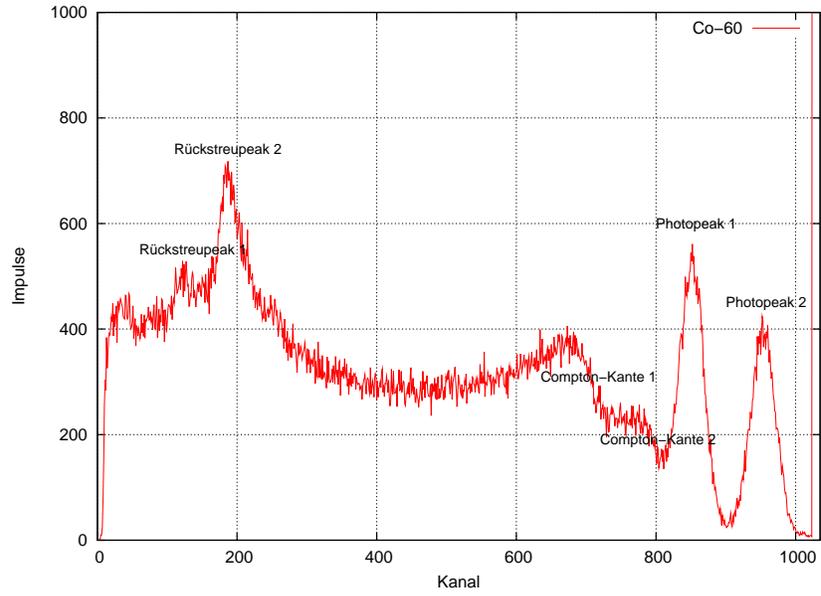
Die Anhäufung an Impulsen im Kanal 1024, welche in allen Spektren erkennbar ist, entsteht durch Pile-Ups.

Durch das aufgenommene Untergrundspektrum konnten wir die anderen Spektren bereits mit CASSY korrigieren (Subtraktion des Untergrundspektrums), sodass wir nun gleich die korrigierten Spektren auswerten können.

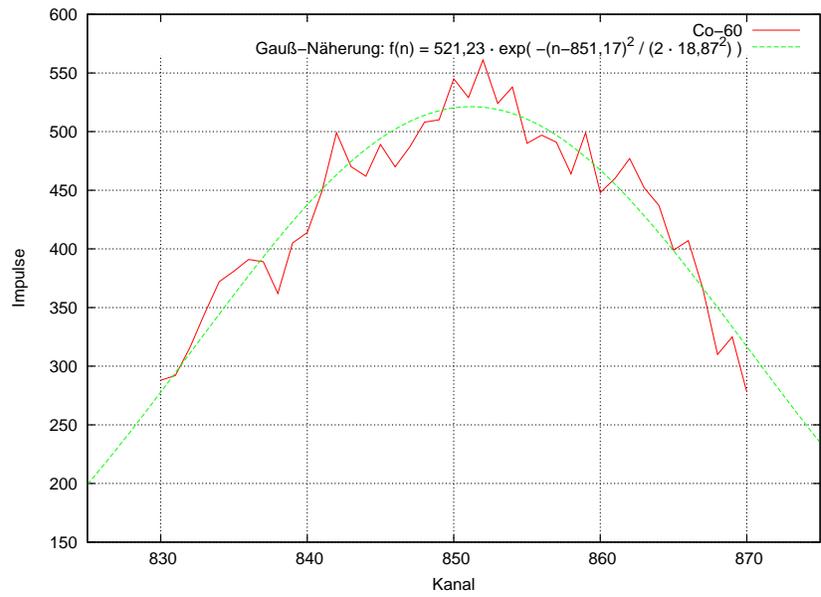
### 1.3 Deutung der Impulshöhenspektren

Zur weiteren Untersuchung der Spektren führen wir anhand des ersten Co-Photopeaks bei 1173 keV (Eichwert) eine Energiekalibrierung durch. Um das Maximum des Photopeaks möglichst genau zu bestimmen, nähern wir den Peak mit einer Gaußkurve  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}s} \cdot \exp(-\frac{1}{2} \frac{(E-1173 \text{ keV})^2}{s^2})$  an. Die Varianz  $s$  der Gaußkurve gibt uns auch sogleich den systematischen Fehler in der Eichung an:

Abbildung 3: Spektrum Co-60



(a) korrigiertes Spektrum Co-60



(b) Gauß-Fit am ersten Photopeak

Aus dem Gauß-Fit mittels Gnuplot erhalten wir für den ersten Photopeak eine Näherung von

$$f(n) = 521,23 \cdot e^{-\frac{1}{2} \frac{(n-851,17)^2}{18,87^2}}$$

Das bedeutet, dass wir das Maximum des Peaks in Kanal 851 (genau: 851,17) vorliegen haben. Wir wählen als Eichpunkt also 1173 keV für Kanal 851,17 und erhalten:

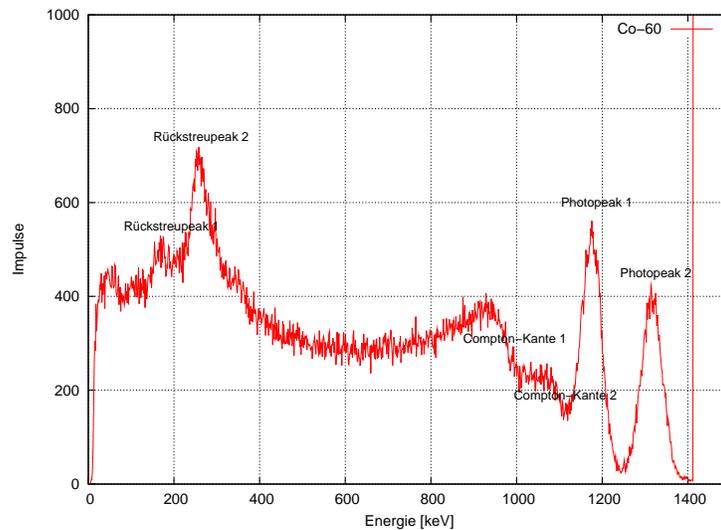
$$\Delta E = \frac{1173 \text{ keV}}{n_{\max}} = \frac{1173 \text{ keV}}{851,17} = 1,38 \frac{\text{keV}}{\text{Kanal}}$$

Einen systematischen Fehler erhalten wir aus der Verschmierung des Peaks aufgrund der endlichen Energieauflösung des Szintillationszählers, dessen Größe wir mit der Standardabweichung der genäherten Gaußkurve als  $\Delta n_{\max, \text{sys}} = 18,87$  abschätzen. Zudem ergibt sich ein statistischer Fehler aus dem statistischen Fehler in  $n_{\max}$ , welcher aus der Näherung von Gnuplot mit  $\Delta n_{\max, \text{stat}} = 0,29$  angegeben wird.

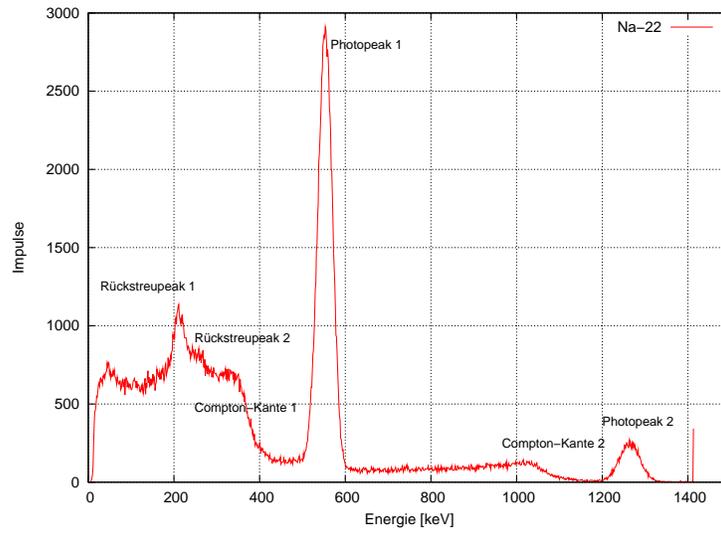
Mit dieser Energieskalierung können wir nun die Spektren als Impuls-Energie-Diagramme auftragen:

Abbildung 4: korrigierte Spektren mit Energieskalierung

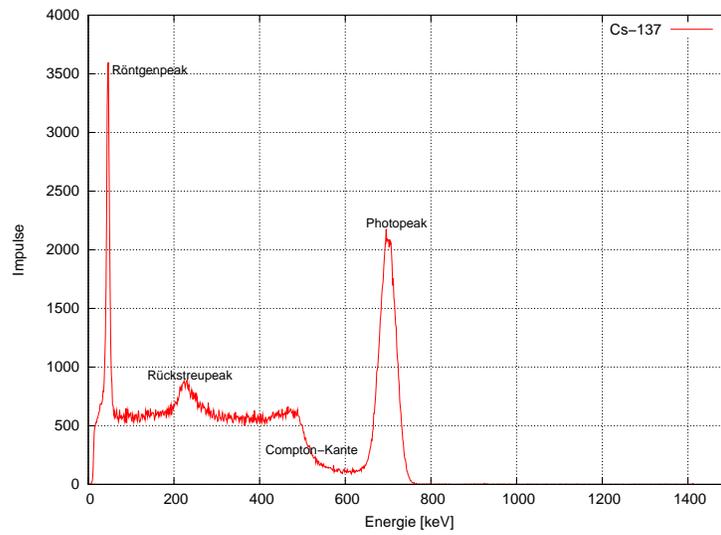
(a) Co-60



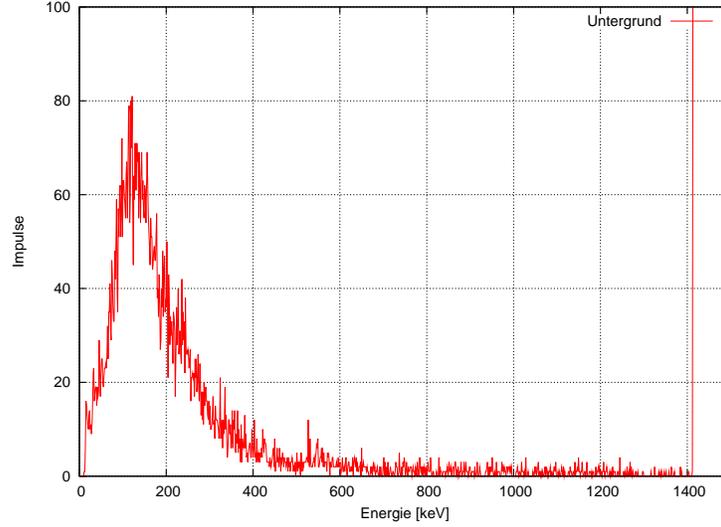
(b) Na-22



(c) Cs-137



(d) Untergrund



Wir wollen nun die Besonderheiten der Spektren (Photo-, Rückstreupeaks, Compton-Kanten und Röntgenpeak des Cs-137) untersuchen und ihre Energien bestimmen. Dazu werden wir die Peaks mithilfe von Gnuplot als Gaußkurven annähern - die Lage des Peaks entspricht dann dem Maximum der Kurve, der systematische Fehler der Standardabweichung.

Für die Energien erhalten wir dann

$$E = \Delta E \cdot n_{\max} = \frac{1173 \text{ keV}}{n_{\max, \text{Co}}} \cdot n_{\max} \quad (1)$$

wobei  $n_{\max}$  die Kanalnummer des Maximums,  $n_{\max, \text{Co}} = 851,17$  die Kanalnummer des ersten Photopeak im Co-Spektrum (Eichpunkt) und 1173 keV die Energie am Eichpunkt ist.

Den systematische Fehler erhalten wir durch Größtfehlerabschätzung aus den systematischen Fehlern in  $n_{\max, \text{Co}}$  und  $n_{\max}$  (Energieauflösung des Szintillators), welche wir aus den Breiten der genäherten Gaußkurven erhalten:

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{sys}} &= \left| \frac{\partial E}{\partial n_{\max, \text{Co}}} \right| \cdot \Delta n_{\max, \text{Co}, \text{sys}} + \left| \frac{\partial E}{\partial n_{\max}} \right| \cdot \Delta n_{\max, \text{sys}} \\ &= \frac{1173 \text{ keV} \cdot n_{\max}}{(n_{\max, \text{Co}})^2} \cdot \Delta n_{\max, \text{Co}, \text{sys}} + \frac{1173 \text{ keV}}{n_{\max, \text{Co}}} \cdot \Delta n_{\max, \text{sys}} \end{aligned}$$

Die Werte  $n_{\max, \text{Co}} = 851,17$  und  $\Delta n_{\max, \text{Co}, \text{sys}} = 18,87$  sind bekannt, sodass  $\Delta E_{\text{sys}}$  nur noch von  $n_{\max}$  und  $\Delta n_{\max, \text{sys}}$  abhängt:

$$\Delta E_{\text{sys}} = \frac{1173 \text{ keV} \cdot 18,87}{(851,17)^2} \cdot n_{\text{max}} + \frac{1173 \text{ keV}}{851,17} \cdot \Delta n_{\text{max, sys}} \quad (2)$$

Der statistische Fehler ergibt sich aus den statistischen Fehlern in den Fits und wird mittels Gauß'scher Fehlerfortpflanzung errechnet:

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{stat}} &= \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial n_{\text{max, Co}}}\right)^2 \cdot (\Delta n_{\text{max, Co, stat}})^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial n_{\text{max}}}\right)^2 \cdot (\Delta n_{\text{max, stat}})^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1173 \text{ keV} \cdot n_{\text{max}}}{(n_{\text{max, Co}})^2}\right)^2 \cdot (\Delta n_{\text{max, Co, stat}})^2 + \left(\frac{1173 \text{ keV}}{n_{\text{max, Co}}}\right)^2 \cdot (\Delta n_{\text{max, stat}})^2} \end{aligned}$$

Ebenso wie oben ist dieser Term nur noch von  $n_{\text{max}}$  und  $\Delta n_{\text{max, stat}}$  abhängig:

$$\Delta E_{\text{stat}} = \sqrt{\left(\frac{1173 \text{ keV} \cdot 0,29}{(851,17)^2}\right)^2 \cdot (n_{\text{max}})^2 + \left(\frac{1173 \text{ keV}}{851,17}\right)^2 \cdot (\Delta n_{\text{max, stat}})^2} \quad (3)$$

Aus Platzgründen werden wir hier nicht alle Gauß-Fits für die Peaks aller Spektren hier abbilden. Beispielhaft zeigen wir die Fits für die Peaks im Co-60-Spektrum. Dabei nähern wir die Peaks durch Gaußkurven, für die Comptonkanten gibt es keine funktionale Annäherung - wir schätzen ihre Lage mit dem linken Ende des Abfalls ab, da die Verbreiterung nach rechts nur aus der Verschmierung wegen der endlichen Energieauflösung folgt. Der systematische Fehler muss dann abgeschätzt werden.

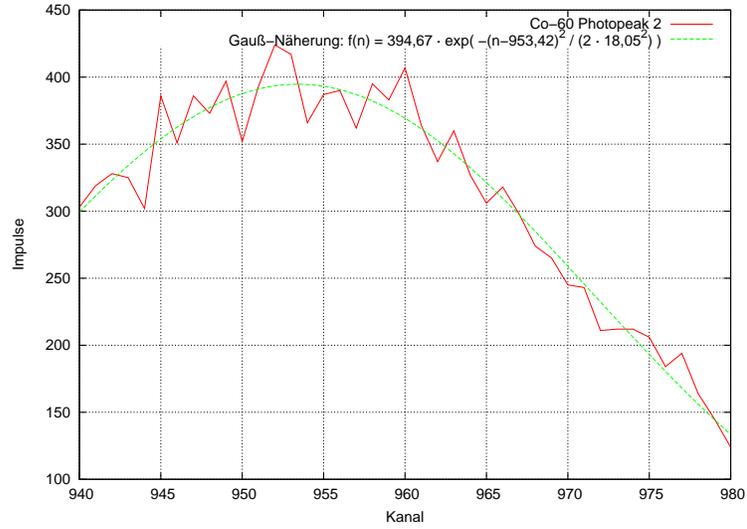
Auf den nächsten Seiten sehen wir die Photo- und Rückstreupeaks und ihre Gauß-Näherungen. Wir entnehmen den Gaußkurven ihr Maximum  $n_{\text{max}}$  als Lage des Merkmals, ihre Standardabweichung als systematischen Fehler  $\Delta n_{\text{max, sys}}$  und aus Gnuplot den statistischen Fehler der Regression als  $\Delta n_{\text{max, stat}}$ . Für die Comptonkanten lesen wir die Werte so gut wie möglich aus dem Spektrum ab. Aus (1) bis (3) erhalten wir dann die Energie der Peaks und den systematischen und statistischen Fehler in  $E$ :

Tabelle 1: Spektrum des Co-60

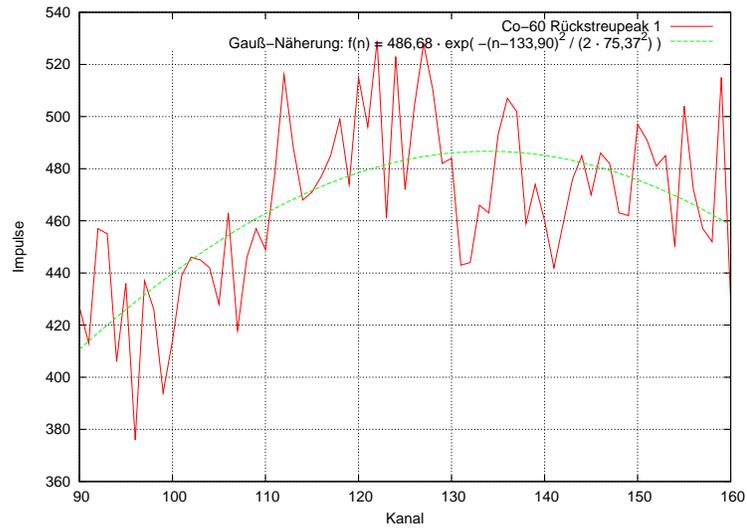
Merkmal	Kanal $n_{\text{max}}$	$\Delta n_{\text{max, sys}}$	$\Delta n_{\text{max, stat}}$	$E$ [keV]	$\Delta E_{\text{sys}}$ [keV]	$\Delta E_{\text{stat}}$ [keV]
Photopeak 2	953,42	18,05	0,38	1313,91	54,00	0,69
Compton-Kante 1	688	30	-	950	42,45	0,32
Compton-Kante 2	790	20	-	1090	28,84	0,37
Rückstreupeak 1	133,90	75,37	2,41	184,52	107,96	3,32
Rückstreupeak 2	189,31	36,85	1,21	261,70	51,09	1,55

## Abbildung 2: Merkmale des Co-60-Spektrums

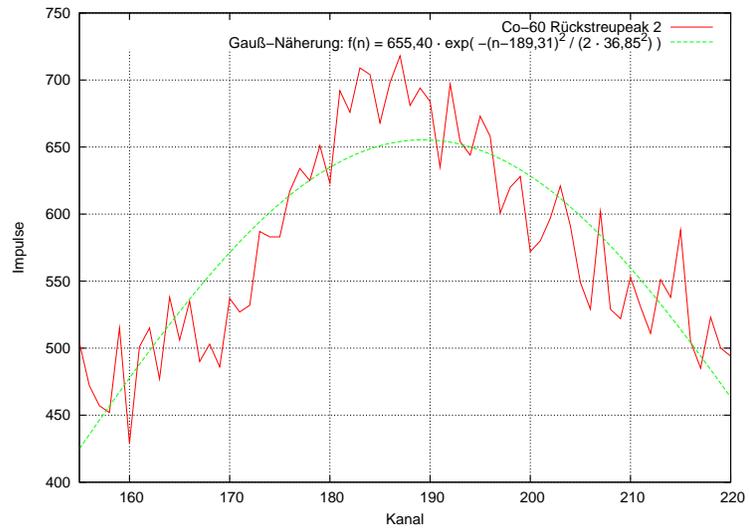
(a) Photopeak 2,  $n_{\max} = 953,42$



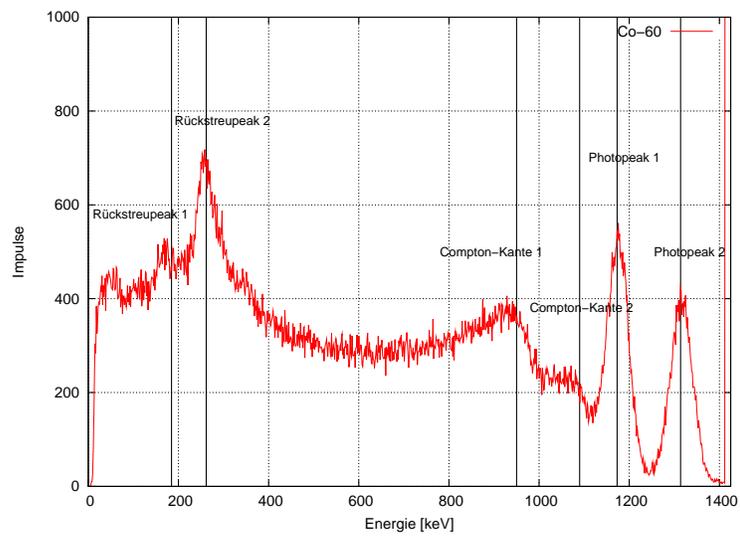
(b) Rückstreupeak 1,  $n_{\max} = 133,90$



(c) Rückstreupeak 2,  $n_{\max} = 189,31$



(d) Spektrum Co-60



Im Vergleich zu den theoretischen Werten sehen wir:

Merkmal	$E_{\text{Messung}} \pm \Delta E_{\text{sys}} \pm \Delta E_{\text{stat}}$ [keV]	$E_{\text{theoretisch}}$ [keV]	Abweichung [%]
Photopeak 2	$1313,91 \pm 54,00 \pm 0,69$	1333	1,43
Compton-Kante 1	$950 \pm 42,45 \pm 0,32$	968	1,86
Compton-Kante 2	$1090 \pm 28,84 \pm 0,37$	1118	2,50
Rückstreupeak 1	$184,52 \pm 107,96 \pm 3,32$	210	12,13
Rückstreupeak 2	$261,70 \pm 53,62 \pm 0,82$	215	21,72

Der zweite Photopeak und die Lage der Comptonkanten konnte aus unserem Spektrum mit guter Genauigkeit abgelesen werden, die unsere Werte stimmen im Rahmen der Fehler mit den theoretischen überein. Letzteres gilt auch für die Rückstreupeaks, wobei hier die Größe der systematischen Fehler nur wenig zufrieden stellend ist. Dieser große systematische Fehler entsteht jedoch durch die Gaußnäherung, da die Peaks schwach ausgeprägt sind und daher nur mit flachen Gaußkurven ( $\rightarrow$ hohe Standardabweichung) angenähert werden können.

Auf gleiche Weise werten wir nun die Spektren von Cs-137 und Na-22 aus.

Tabelle 2: Spektrum des Cs-137

(a) Lage der Merkmale

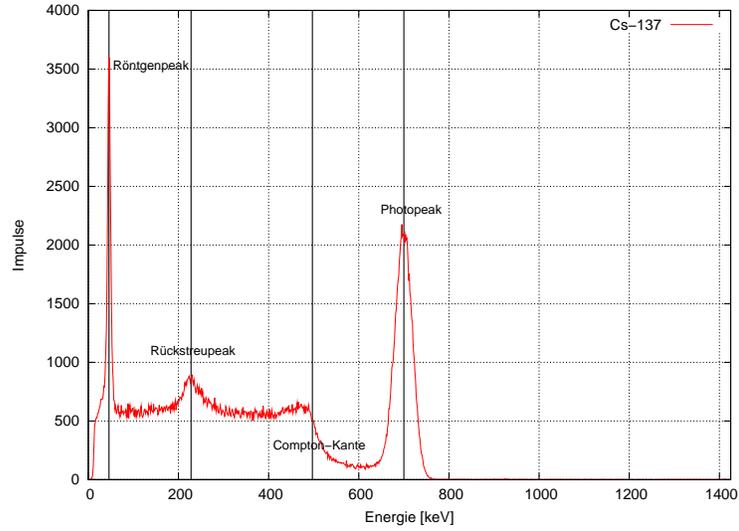
Merkmal	Kanal $n_{\text{max}}$	$\Delta n_{\text{max, sys}}$	$\Delta n_{\text{max, stat}}$	$E$ [keV]	$\Delta E_{\text{sys}}$ [keV]	$\Delta E_{\text{stat}}$ [keV]
Röntgenpeak	33,36	3,10	0,13	46,04	5,29	0,18
Rückstreupeak	165,10	42,32	1,65	227,84	63,37	2,28
Compton-Kante	360	20	-	496,80	38,56	0,17
Photopeak	506,77	14,22	0,09	699,34	35,08	0,27

(b) Vergleich mit theoretischen Werten

Merkmal	$E_{\text{Messung}} \pm \Delta E_{\text{sys}} \pm \Delta E_{\text{stat}}$ [keV]	$E_{\text{theoretisch}}$ [keV]	Abweichung [%]
Röntgenpeak	$46,04 \pm 5,29 \pm 0,18$	32	4,39
Rückstreupeak	$227,84 \pm 63,37 \pm 2,28$	185	2,32
Compton-Kante	$469,80 \pm 38,56 \pm 0,17$	477	1,51
Photopeak	$699,34 \pm 35,08 \pm 0,27$	662	5,59

Im Spektrum des Cs-137 konnte vor allem die Compton-Kante sehr gut und nahe am theoretischen Wert bestimmt werden. Für den Rückstreupeak ergab sich dasselbe Problem wie auch beim Co-60 - der Wert stimmt im Rahmen des Fehlers mit dem Theoriewert überein, aber der Fehler ist sehr groß. Für Röntgen- und Photopeak erhalten wir eine Abweichung von etwa 5%, jedoch liegen die theoretischen Werte außerhalb unseres Messfehlers. Da die Peaks im Spektrum sehr deutlich ausgeprägt sind, ist die Energieauflösung des Szintillators nicht für den Fehler verantwortlich. Ein Erklärung, warum unsere Messwerte hier höher als erwartet sind, sehen wir viel mehr in der mangelnden Linearität der Apparatur (siehe weiter unten).

Abbildung 3: Spektrum des Cs-137



Für das Na-22-Spektrum erhalten wir:

Tabelle 3: Spektrum des Na-22

(a) Lage der Merkmale

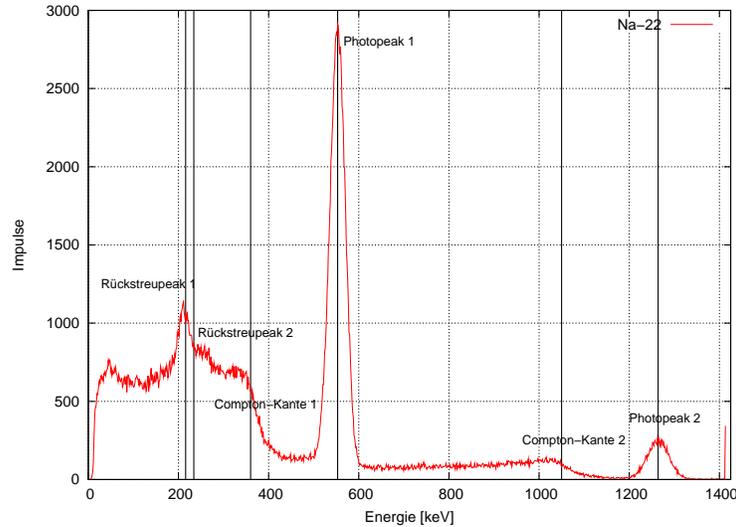
Merkmal	Kanal $n_{\max}$	$\Delta n_{\max, \text{sys}}$	$\Delta n_{\max, \text{stat}}$	$E$ [keV]	$\Delta E_{\text{sys}}$ [keV]	$\Delta E_{\text{stat}}$ [keV]
Rückstreupeak 1	156,18	28,21	0,56	215,53	43,65	0,78
Rückstreupeak 2	169,38	75,87	4,55	233,74	109,73	6,27
Compton-Kante 1	260	25	-	358,80	42,40	0,12
Compton-Kante 2	760	30	-	1048,80	64,56	0,36
Photopeak 1	400,85	12,58	0,08	553,17	29,58	0,22
Photopeak 2	916,00	17,55	0,28	1264,08	52,17	0,58

(b) Vergleich mit theoretischen Werten

Merkmal	$E_{\text{Messung}} \pm \Delta E_{\text{sys}} \pm \Delta E_{\text{stat}}$ [keV]	$E_{\text{theoretisch}}$ [keV]	Abweichung [%]
Rückstreupeak 1	$215,53 \pm 43,65 \pm 0,78$	171	26,04
Rückstreupeak 2	$233,74 \pm 109,73 \pm 6,27$	213	9,74
Compton-Kante 1	$358,80 \pm 42,40 \pm 0,12$	340	5,53
Compton-Kante 2	$1048,80 \pm 64,56 \pm 0,36$	1062	1,24
Photopeak 1	$553,17 \pm 29,58 \pm 0,22$	511	7,63
Photopeak 2	$1264,08 \pm 52,17 \pm 0,58$	1271	0,55

In diesem Spektrum konnten wiederum die Energien der Compton-Kanten sehr gut und genau bestimmt werden, ebenso der zweite Photopeak. Bei den Rückstreupeaks ergaben sich wieder die bereits erwähnten Probleme. Die Abweichung des ersten Photopeaks vom theoretischen Wert sehen wir in der mangelnden Linearität der Apparatur begründet.

Abbildung 4: Spektrum des Na-22



Es fällt auf, dass Peaks unterhalb von 700 keV nicht an erwarteter Position sind (Röntgen- und Photopeak von Cs-137, erster Photopeak von Na-22). Wir vermuten, dass in diesem Bereich die Genauigkeit (Auflösung und Linearität) des Szintillationszählers nicht so gut wie bei Energien im Bereich von 1000-2000 keV ist.

Zur Überprüfung der Linearität der Apparatur verwenden wir die Ergebnisse aller drei Spektren. Wir wissen, dass den Quanten im Rückstreupeak die Energie der Compton-Kante fehlt. Das bedeutet, dass - bei Linearität der Apparatur - die Summe der Energien von Rückstreupeak und Compton-Kante der Energie des Photopeaks entsprechen sollte. Wir überprüfen dies an unseren Messwerten:

Spektrum	$E_{\text{Rückstreup.}}$ [keV]	$E_{\text{Compton-K.}}$ [keV]	Summe [keV]	$E_{\text{Photop.}}$ [keV]	Abweichung [%]
Co-60	184,52	950	1134,52	1173	3,28
	261,70	1090	1351,7	1313,91	2,88
Cs-137	227,84	496,80	724,64	699,34	3,62
Na-22	215,53	358,80	574,33	553,17	3,83
	233,74	1048,80	1282,54	1264,08	1,46

Man erkennt, dass sich eine Abweichung von etwa 3% ergibt. Dies führt zu Abweichungen von 20-40 keV, was die oben festgestellten Abweichungen unserer Messwerte von den Theoriewerten erklären kann.

Die Auflösung des Detektors wird charakterisiert durch die Zahl an Elektronen, die bei einem Impuls des Photopeaks von der Photokathode emittiert werden. Ihre Anzahl lässt sich durch  $n_e = \left(\frac{E}{\Delta E}\right)^2$  abschätzen. Wir bestimmen die (energieabhängige) Auflösung aus dem Photopeak von Cs-137 und erhalten:

$$n_e = \left(\frac{E}{\Delta E}\right)^2 = \left(\frac{699,34 \text{ keV}}{35,08 \text{ keV}}\right)^2 = 397,43$$

## Aufgabe 2 - Aktivität des Cs-137 Präparat

Wir maßen die Aktivität des Cs-137 Präparats, indem wir mehrere Mehrkanalspektren mittels CASSY aufzeichneten. CASSY zählte dabei die Anzahl der detektierten Teilchen in einem festen Zeitintervall  $t$ . Mittels eines Diagramms aus der Vorbereitungshilfe erhält man die Detektionswahrscheinlichkeit  $w$  der Teilchen im Abstand  $d$  vom Präparat. Für die Aktivität  $A$  ergibt sich dann die Formel:

$$A = \frac{n_{\text{korr}}}{t \cdot w \cdot (1 - P_{\text{tot}})}$$

mit  $n_{\text{korr}} = n - t \cdot z_{\text{Untergrund}}$ ,  $t = 60$  s,  $P_{\text{tot}} =$  Totzeit des Detektors,  $z_{\text{Untergrund}} = 31,44 \frac{1}{\text{s}}$  (aus Aufgabenteil 1.2). Für den Fehler in  $A$  verwenden wir die Größtfehlerabschätzung für  $w$  und  $P_{\text{tot}}$ :

$$\begin{aligned} \Delta A_{\text{sys}} &= \left| \frac{\partial A}{\partial P_{\text{tot}}} \right| \cdot \Delta P_{\text{tot}} + \left| \frac{\partial A}{\partial w} \right| \cdot \Delta w \\ &= \left| \frac{n_{\text{korr}}}{t \cdot w \cdot (1 - P_{\text{tot}})^2} \right| \cdot \Delta P_{\text{tot}} + \left| \frac{n_{\text{korr}}}{t \cdot w^2 \cdot (1 - P_{\text{tot}})} \right| \cdot \Delta w \end{aligned}$$

Bei Ablesen des Abstands Probenende-Szintillator nehmen wir einen Ablesefehler von 0,1 cm, hinzu kommt der Fehler im Abstand Probenende-Probe (0,5 mm, siehe Aufgabenblatt). Da  $w$  aus einem Diagramm abgelesen werden muss, schätzen wir den Fehler  $\Delta w$  durch den halben Abstand zwischen den maximalen und minimalen Werten von  $w$  im Intervall  $2 \cdot \Delta d = 0,3$  cm ab, für  $w$  verwenden wir den Mittelwert. Für  $\Delta P_{\text{tot}}$  verwenden wir 0,5 % da CASSY ganzzahlige Prozentwerte für  $P_{\text{tot}}$  ausgibt.

Abstand [cm]	$w$	$\Delta w$	$P_{\text{tot}}$	$\Delta P_{\text{tot}}$	$t$ [s]	$n$	$n_{\text{korr}}$	$A$	$\Delta A$
$0,75 \pm 0,15$	0,0675	0,0125	0,1	0,005	60	85508	83622	22942	16994
$1,25 \pm 0,15$	0,04	0,005	0,09	0,005	60	71315	69429	31790	21441
$1,75 \pm 0,15$	0,0275	0,0025	0,08	0,005	60	62649	60763	40028	25393
$2,25 \pm 0,15$	0,01875	0,00125	0,07	0,005	60	54834	52948	50607	30582
$3,25 \pm 0,15$	0,01125	0,00125	0,055	0,005	60	43696	41810	65546	41963
$4,25 \pm 0,15$	0,007	0,0005	0,04	0,005	60	35303	33417	82879	49086
$6,25 \pm 0,15$	0,00375	0,00025	0,03	0,005	60	24697	22811	104518	60843
$10,25 \pm 0,15$	0,001625	0,000125	0,02	0,005	60	15220	13334	139550	81934
$20,25 \pm 0,15$	0,000425	0,000025	0,01	0,005	60	6793	4907	194375	109603

Wir bilden nun den gewichteten Mittelwert, um den besten Schätzwert zu erhalten. Es gilt:

$$A_{\text{best}} = \frac{\sum w_i \cdot A_i}{\sum w_i}$$

mit

$$w_i = \frac{1}{(\Delta A_i)^2}$$

und

$$\Delta A_{\text{best}} = \sqrt{\frac{1}{\sum w_i}}$$

Wir erhalten als Ergebnis eine Aktivität  $A = (51756 \pm 1750)$  Bq. Die Korrektheit dieses Wertes darf aber bezweifelt werden, da die Werte der  $A_i$  scheinbar vom Abstand  $d$  abhängen, was physikalisch keinen Sinn ergibt.

### Aufgabe 3 - Röntgenemission

Mit der Cs-137-Quelle regten wir verschiedene Probe, welche wir direkt auf den Szintillator legten, zu Röntgenemission an. Aus den aufgenommenen Spektren werden wir nun die Röntgenpeaks bestimmen. Aus dem  $E - Z^2$ -Diagramm, welches wir durch zwei bekannte Elemente (Ba und Ta) bestimmen, können wir dann von der Energie  $E$  der Röntgenpeaks auf die Kernladungszahlen  $Z$  der unbekannt Elemente schließen.

Zur Ermittlung der Röntgenpeaks fitten wir an den Röntgenpeak (jener Peak, welcher im bekannten Cs-137-Spektrum bei Einlegen der Probe zusätzlich auftritt) eine Gaußkurve und erhalten dann wie in Aufgabe 1 das Maximum  $n_{\max}$ , den statistischen Fehler  $\Delta n_{\max, \text{stat}}$  aus dem Fit und den systematischen Fehler  $\Delta n_{\max, \text{sys}}$  aus der Breite des verschmierten Peaks (Standardabweichung der gefitteten Gaußkurve). Die Abbildung aller Peaks sparen wir hier ebenfalls, beispielhaft sind weiter unten das Spektrum der Ta-Probe und der Fit des Ta-Röntgenpeaks abgebildet.

Da wir in Aufgabe 1 schon feststellten, dass die Energiekalibrierung (dort nach dem ersten Photopeak im Co-60-Spektrum) für niedrige Energien nur unzureichend genau ist, werden wir hier anhand des Röntgenpeaks des Cs-137 (32 keV) eine neue Kalibrierung durchführen:

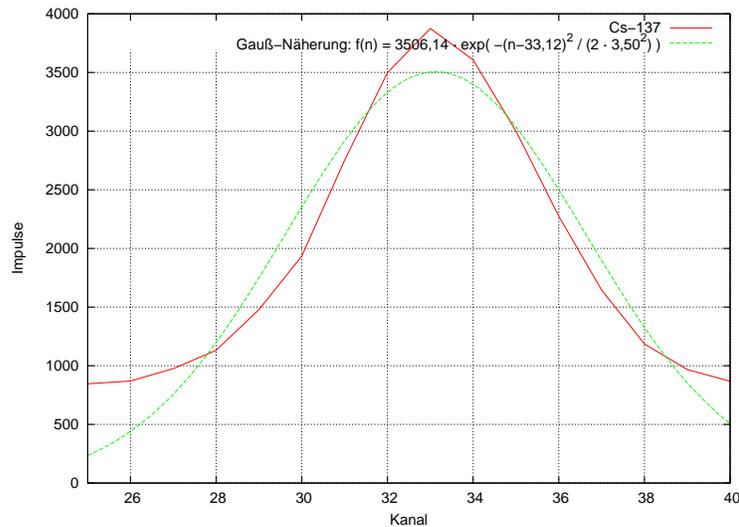


Abbildung 5: Eichung durch Fitten des Röntgenpeaks des Cs-137

Wir erhalten ein Maximum in Kanal  $n_{\max, \text{Cs}} = 33,12$  mit  $\Delta n_{\max, \text{sys}} = 3,50$  und  $\Delta n_{\max, \text{stat}} = 0,19$ . Mit der Energieskalierung ergibt sich also für die Energien der nun zu bestimmenden Röntgenpeaks

$$E = \frac{32 \text{ keV}}{n_{\max, \text{Cs}}} \cdot n_{\max}$$

Analog zur Fehlerfortpflanzung in Aufgabe 1 erhalten wir in  $E$  dann folgende Fehler

$$\Delta E_{\text{sys}} = \frac{32 \text{ keV} \cdot 3,50}{(33,12)^2} \cdot n_{\text{max}} + \frac{32 \text{ keV}}{33,12} \cdot \Delta n_{\text{max, sys}}$$

$$\Delta E_{\text{stat}} = \sqrt{\left(\frac{32 \text{ keV} \cdot 0,19}{(33,12)^2}\right)^2 \cdot (n_{\text{max}})^2 + \left(\frac{32 \text{ keV}}{33,12}\right)^2 \cdot (\Delta n_{\text{max, stat}})^2}$$

Für die Röntgenpeaks der untersuchten Proben erhalten wir damit:

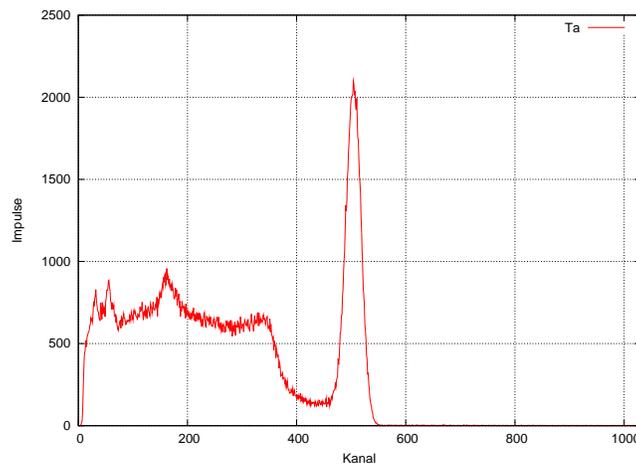
Probe	$n_{\text{max}}$	$\Delta n_{\text{max, sys}}$	$\Delta n_{\text{max, stat}}$	$E$ [keV]	$\Delta E_{\text{sys}}$ [keV]	$\Delta E_{\text{stat}}$ [keV]
Ba (Eichpunkt)	33,12	3,50	0,19	32	6,76	0,26
Ta	55,52	19,22	0,55	53,64	24,24	0,61
A	71,79	15,58	0,42	69,36	22,38	0,57
C	57,75	17,21	0,59	55,80	22,52	0,65
D	66,05	22,39	0,81	63,81	28,38	0,86

Im Spektrum der Probe E war kein Röntgenpeak zu erkennen, man sieht nur den aus der Cs-137-Probe stammenden Röntgenpeak (siehe Abbildung unten). Wir vermuten, dass der Röntgenpeak mit einem anderen Peak im Spektrum zusammenfällt und deswegen nicht beobachtet werden kann. Es wäre natürlich auch möglich, dass es sich um eine Probe handelt, die überhaupt keine Röntgenemission aufweist.

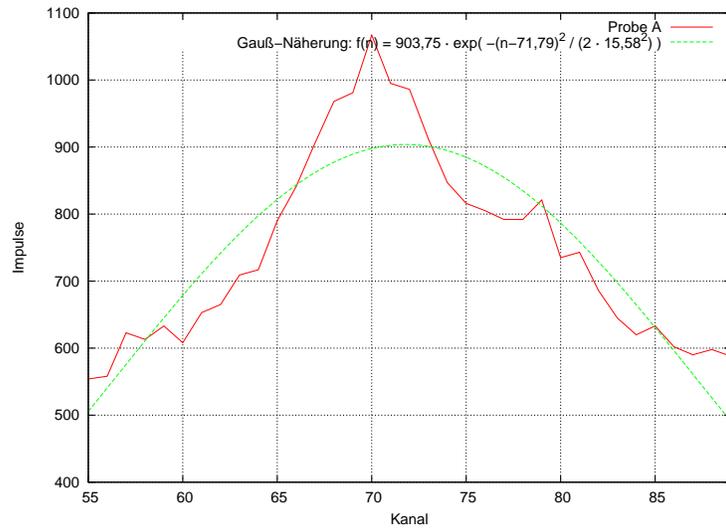
Wiederum haben wir für die gefitteten Gaußkurven der Röntgenpeaks einen hohen systematischen Fehler, da die Peaks verschmiert und (bis auf den Ba-Peak) nicht sonderlich stark ausgeprägt waren.

Abbildung 6: aufgenommene Spektren zur Röntgenemission

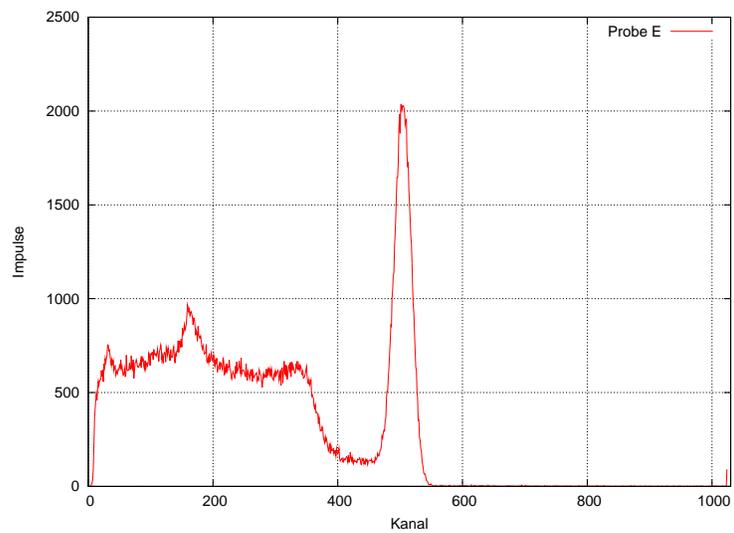
(a) Spektrum der Ta-Probe, Röntgenpeak rechts des Ba-137-Röntgenpeaks



(b) Näherung des Ta-Röntgenpeaks

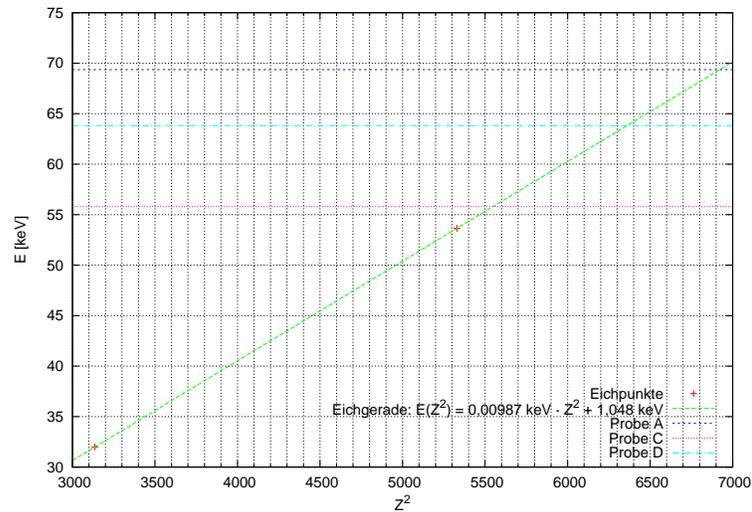


(c) Spektrum Probe E ohne erkennbaren Peak



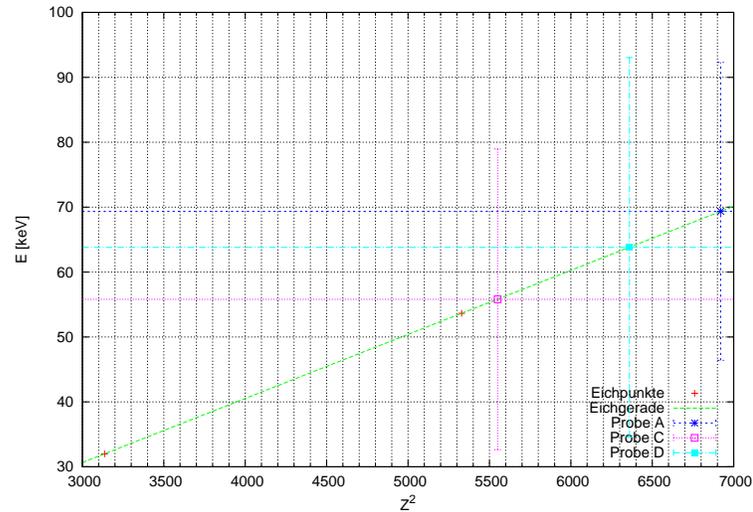
Wir fitten nun aus den zwei Wertepaaren von Ba ( $Z = 56$ ) und Ta ( $Z = 73$ ) die Gerade, welche den linearen  $E - Z^2$ -Zusammenhang beschreibt. An ihr kann man aus den bekannten Energien der Proben A, C und D auf die unbekannt Kernladungszahlen schließen:

Abbildung 7:  $E - Z^2$ -Diagramm



An den Schnittpunkten der Energiegeraden der verschiedenen Proben mit der Eichgerade können wir nun  $Z^2$  ablesen. Im folgenden Diagramm sind die Schnittpunkte mit Fehlerbalken geplottet (die systematischen Fehler wirken hier sehr groß, der Effekt auf die Kernladungszahl ist aber wie weiter unten zu sehen nur gering):

Abbildung 8:  $E - Z^2$ -Diagramm mit Fehlerbalken



Durch die Eichgerade  $E(Z^2) = 0,00987 \text{ keV} \cdot Z^2 + 1,048 \text{ keV}$  erhalten wir für  $Z$  den Zusammenhang  $Z = \sqrt{\frac{E - 1,048 \text{ keV}}{0,00987 \text{ keV}}}$ . Damit lässt sich nun auch der Fehler in  $E$  durch Größtfehlerabschätzung fortpflanzen, sodass wir für den Fehler in  $Z$  erhalten. Wir verwenden hier nur den systematischen Fehler in  $E$ , da der statistische Fehler im Vergleich dazu vernachlässigbar ist:

$$\Delta Z = \frac{\partial}{\partial E} \left( \sqrt{\frac{E - 1,048 \text{ keV}}{0,00987 \text{ keV}}} \right) \cdot \Delta E_{\text{sys}} = \frac{1}{2} \left( \frac{E - 1,048 \text{ keV}}{0,00987 \text{ keV}} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \Delta E_{\text{sys}}$$

Aus den Schnittpunkten erhalten wir dann folgende Ergebnisse:

	$Z^2$	$Z$	$\Delta Z$	mögliche Elemente
Probe A	6921,18	83,19	0,13	Pb ( $Z = 82$ )
Probe C	5547,32	74,48	0,15	W ( $Z = 74$ )
Probe D	6358,87	79,74	0,18	Au ( $Z = 79$ )

Im Vergleich mit den Kernladungszahlen der vorhandenen Proben (siehe Aufgabenblatt) identifizierten wir unsere Proben als Blei, Wolfram und Gold.

Im Rahmen unseres Fehler kommen wir bei den Proben auf keine ganzen Kernladungszahlen. Die geringen Abweichungen sehen wir dadurch begründet, dass auch unsere Eichung fehlerbehaftet und - wie in Aufgabe 1 festgestellt - die Linearität der Messapparatur nicht völlig gewährleistet ist.

## Aufgabe 4 - statistische Verteilung gemessener Ereignisanzahlen

### 4.1 Bilden von zwei Stichproben

Wir nahmen 200 Spektren im Vielkanalmodus mit 256 Kanälen und einer Messdauer von je einer Sekunde auf. Die Spannung am SEV betrug 567 V und die manuelle Verstärkung von CASSY 2,42. Leider stellte sich schon beim ersten Betrachten der Daten heraus, dass 66 der 200 Spektren keinen einzigen Peak aufwiesen. Wir vermuten, dass das Ändern der Messeinstellungen (SEV-Spannung, Verstärkung, Kanalmodus) dies zur Folge hatte. Während des Versuchs fiel uns dies leider nicht auf, da CASSY nur die ersten acht Spektren der Messung anzeigte, in welchen mehr Peaks zu erkennen waren. Um den für Stichprobe A geforderten Mittelwert von  $\approx 3$  zu erreichen summierten wir die Impulse der Kanäle 4-10 aus. In Stichprobe B verwendeten wir alle Kanäle.

### 4.2 Mittelwert, Standardabweichung, Standardabweichung des Mittelwerts

Wir berechnen diese Werte für beide Proben nach den Formeln aus der Vorbereitung.

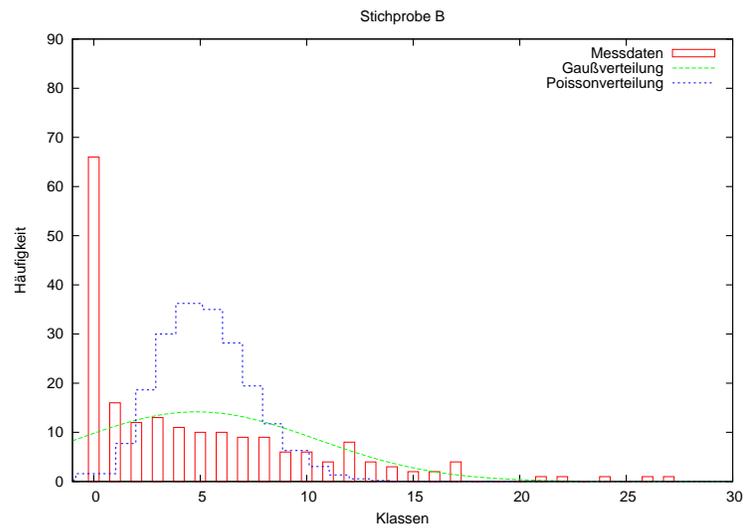
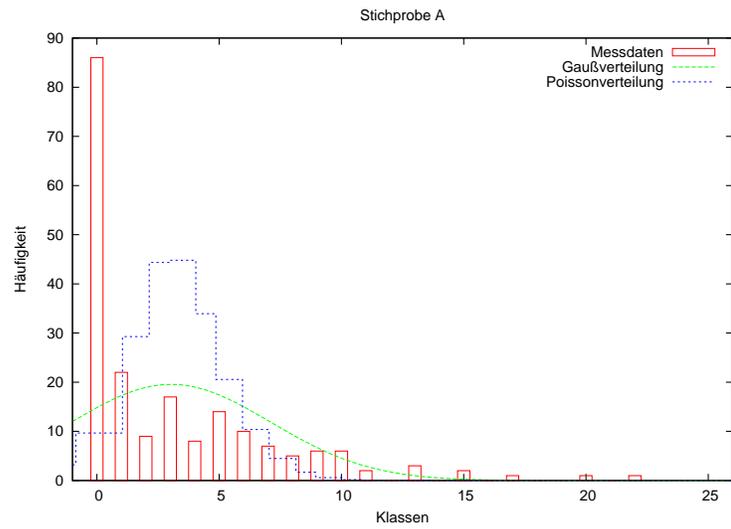
Man erkennt schon, dass bei beiden Proben die Wurzel aus dem Mittelwert deutlich von der Standardabweichung abweicht - es kann sich also entgegen der Erwartungen nicht um eine Poissonverteilung handeln:

	Stichprobe A	Stichprobe B
$x_m$	3,03	4,83
$s_x$	4,08	5,63
$s_{x_m}$	0,29	0,4
$\sqrt{x_m}$	1,74	2,2

### 4.3 Grafische Darstellung der Häufigkeitsverteilungen

Wir tragen die Häufigkeiten in ein Histogramm ein und im selben Diagramm die Poisson- und Gaußverteilungen, die sich aus den Mittelwerten und Standardabweichungen der Stichproben ergeben.

Hierbei sieht man, dass die Verteilung der Messwerte in beiden Stichproben keiner der beiden theoretischen Kurven entspricht, aber eher noch der Gaußverteilung:



#### 4.4 $\chi^2$ -Test

Wir verwenden nun den Chi-Quadratstest um zu prüfen, ob die Messwerte der Stichprobe A einer der theoretischen Kurven entsprechen.

Klasse	Stichprobe	Poissonverteilung	Gaußverteilung
0	86	9,66	14,84
1	22	29,28	17,27
2	9	44,36	18,93
3	17	44,8	19,54
4	8	33,94	19,0
5	14	20,57	17,4
6	10	10,39	15,0
7	7	4,5	12,18
8	5	1,7	9,32
9	6	0,57	6,71
10	6	0,17	4,55
11	2	0,05	2,91
12	0	0,01	1,75
13	3	0	0,99
14	0	0	0,53
15	2	0	0,27
16	0	0	0,13
17	1	0	0,06
18	0	0	0,02
19	0	0	0,01
20	1	0	0
21	0	0	0
22	1	0	0

Beim  $\chi^2$ -Test sollten die theoretischen Häufigkeiten nicht unter 4 liegen, daher fassen wir Klassen zusammen. Zuerst fassen wir für die Poissonverteilung die Klassen 7 bis 22 zusammen.

Klasse	Stichprobe A	Poissonverteilung
0	86	9,66
1	22	29,28
2	9	44,36
3	17	44,8
4	8	33,94
5	14	20,57
6	10	10,39
7-22	34	7,01

Der Wert für  $\chi^2$  ergibt sich aus der Formel  $\chi^2 = \sum \frac{(A_i - E_i)^2}{E_i}$  für die Poissonverteilung ergibt sich  $\chi^2 = 776,17$

und die Anzahl der Freiheitsgrade  $f = 8 - 1 - 1 = 6$ . In der Tabelle aus der Vorbereitungs-Hilfe finden wir den Wert 22,46 für 6 Freiheitsgrade und einer Ausschlusswahrscheinlichkeit von 99,9%, da dieser Wert deutlich übertroffen wird, kann man eine Poissonverteilung zu fast 100% ausschließen.

Nun fassen wir die Klassen 11-22 für die Gaußverteilung zusammen.

Klasse	Stichprobe A	Gaußverteilung
0	86	14,84
1	22	17,27
2	9	18,93
3	17	19,54
4	8	19
5	14	17,4
6	10	15,0
7	7	12,18
8	5	9,32
9	6	6,71
10	6	4,55
11-22	10	6,66

Hier ergibt sich  $\chi^2 = 363,22$  bei  $f = 12 - 1 - 2 = 9$  Freiheitsgraden aus der Tabelle bekommen wir den Wert 27,88 für 9 Freiheitsgrade und einer Ausschlusswahrscheinlichkeit von 99,9% , da dieser Wert deutlich übertroffen wird, kann auch die Gaußverteilung zu fast 100% ausgeschlossen werden. Es ist also äußerst unwahrscheinlich, dass die Stichprobe A aus einer poisson- oder gaußverteilten Grundgesamtheit stammen.

Dies entspricht nicht unseren Erwartungen, da die Häufigkeiten einer poissonverteilten Grundgesamtheit entstammen sollten. Für größere Häufigkeiten sollte sich dies sogar einer Gaußverteilung annähern. Dass wir diese Ergebnisse jedoch nicht erhalten würden, war bei den uns zur Verfügung stehenden Daten unausweichlich.