

Auswertung von Exponentialgesetzen

Da die \ln -Funktion die Umkehrfunktion der e -Funktion ist, d.h. es gilt die Beziehung $\ln(e^x) = e^{\ln(x)} = x$, lassen sich Exponentialgesetze durch Logarithmieren linearisieren. Es ist dabei zu beachten, dass die \ln -Funktion die Eigenschaft $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$ besitzt.

$$\begin{array}{ll}
 \text{Exponentialgesetz:} & \text{linearisiert:} \\
 y = y_0 e^{mx} & \Leftrightarrow \ln y = mx + \ln y_0 \quad (1)
 \end{array}$$

So erhält man z. B. bei den Versuchen „Dampfdruckkurve“ und „Halbleiterwiderstandsthermometer“ lineare Beziehungen zwischen $\ln p$ bzw. $\ln R$ und $\frac{1}{T}$:

$$p = p_0 e^{-\frac{q_v}{RT}} \quad \Leftrightarrow \quad \ln p = -\frac{q_v}{R} \cdot \frac{1}{T} + \ln p_0 \quad (2)$$

$$R = R_\infty e^{\frac{b}{T}} \quad \Leftrightarrow \quad \ln R = b \cdot \frac{1}{T} + \ln R_\infty \quad (3)$$

Auswertung mit Log-Papier:

Bequem und anschaulich ist die Auftragung der gefundenen Messwertepaare p_i und $\frac{1}{T_i}$ (bzw. R_i und $\frac{1}{T_i}$) auf einfach-logarithmischem Papier (Abb. 1).

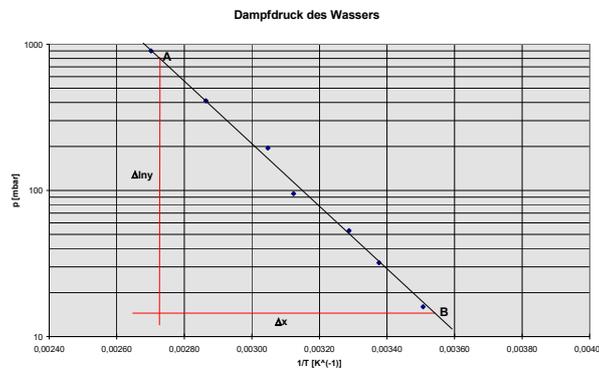


Abbildung 1: Auswertung mit Log-Papier

Auf Log-Papier sind die Zahlen N_k auf der y -Achse bereits proportional zu den Strecken $\ln(N_k)$ eingezeichnet. Mit einem Lineal zieht man die fürs Auge am besten passende "Ausgleichsgerade" durch die Messpunkte. Die Steigung m der Geraden, und damit das Messresultat für $\frac{q_v}{R}$ (bzw. b), erhält man, indem man zwei beliebige Punkte A und B auf dieser Geraden wählt und die zugehörigen Wertepaare $[p_A, \frac{1}{T_A}]$ und $[p_B, \frac{1}{T_B}]$ abliest. Dann ist

$$m = -\frac{q_v}{R} = \frac{\Delta \ln y}{\Delta x} = \frac{\ln p_A - \ln p_B}{\frac{1}{T_A} - \frac{1}{T_B}} = \frac{\ln \frac{p_A}{p_B}}{\frac{1}{T_A} - \frac{1}{T_B}} \quad (4)$$

Den Ordinatenabschnitt p_0 (bzw. R_∞) liest man direkt aus der Zeichnung bei $\frac{1}{T} = 0$ ab oder berechnet ihn aus den Werten bei A und B mit der Formel

$$\ln p_0 = \ln p_A - m \frac{1}{T_A} = \frac{\frac{1}{T_A} \ln p_B - \frac{1}{T_B} \ln p_A}{\frac{1}{T_A} - \frac{1}{T_B}} \quad (5)$$

Auswertung ohne Log-Papier:

Aus den gemessenen Werten T_i , p_i (bzw. R_i) rechnet man mit dem Taschenrechner $\frac{1}{T_i}$ und $\ln p_i$ (bzw. $\ln R_i$) aus und trägt die Wertepaare $[\frac{1}{T_i}, \ln p_i]$ (bzw. $[\frac{1}{T_i}, \ln R_i]$) gemäß Abb. 2 auf. Die weitere Auswertung erfolgt wie oben, wobei man jetzt bei den Punkten A und B auf der Ausgleichsgeraden direkt die Logarithmen $\ln p_A$ und $\ln p_B$ abliest.

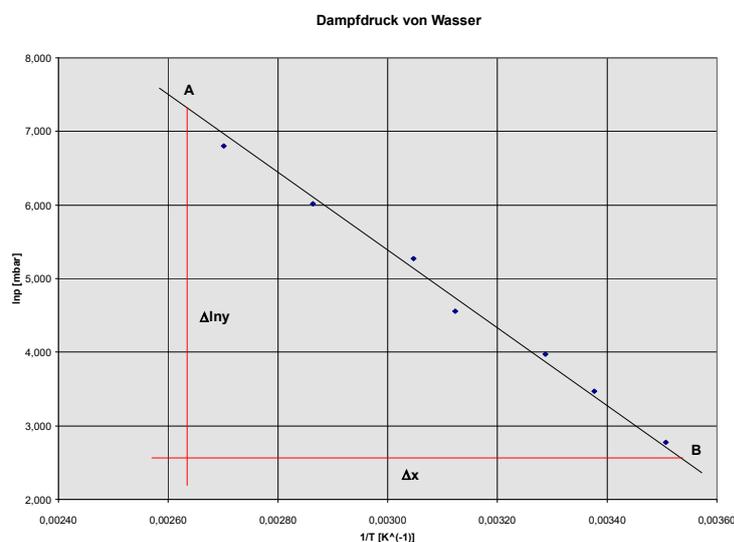


Abbildung 2: Auswertung ohne Log-Papier

Anmerkung:

Diese Art der Datenanalyse ist im Computerzeitalter natürlich nicht mehr zeitgemäß. Während der Messwert der physikalischen Größe mit dieser Methode noch einigermaßen richtig ermittelt werden kann, ist eine Fehlerabschätzung auf diese Art nicht seriös durchzuführen.

Im Nebenfachfachpraktikum soll diese Methode trotzdem verwendet werden, weil die Studenten direkt am Messplatz ihr Protokoll in ein gebundenes Heft schreiben müssen. Die graphische Darstellung auf Millimeterpapier hat nebenbei den pädagogischen Wert, dass sich die Studenten um Skalierung und Min/Max-Werte Gedanken machen müssen.