

Aufgabe:
Bestimmung der Erdbeschleunigung g mit dem Reversionspendel.
Grundlagen:

Jeder Körper, der um eine horizontale Achse A drehbar aufgehängt ist, die nicht durch den Schwerpunkt S geht, ist ein physikalisches Pendel und vollführt bei kleiner Auslenkung φ harmonische Schwingungen um die Ruhelage nach der Bewegungsgleichung:

$$\Theta_A \cdot \ddot{\varphi} = - m \cdot g \cdot s \cdot \varphi . \quad (1)$$

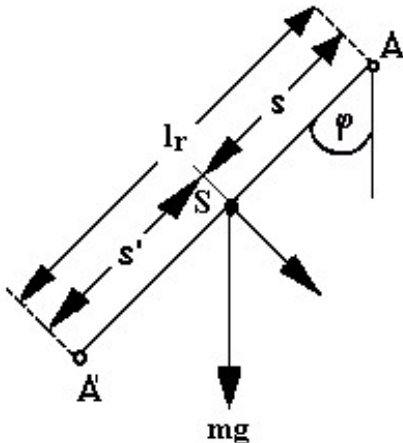
Dabei ist von der für kleine φ zulässigen Näherung $\sin \varphi = \varphi$ Gebrauch gemacht. Außerdem bedeuten :

Θ_A = Trägheitsmoment um die Achse A

m = Masse des physikalischen Pendels

s = Abstand $A - S$

g = Erdbeschleunigung



Aus der Lösung der Differentialgleichung (1) ergibt sich die Schwingungsdauer T zu:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta_A}{m \cdot g \cdot s}} . \quad (2)$$

Dieser Ausdruck vereinfacht sich für den idealisierten Fall des mathematischen Pendels, bei dem man sich die gesamte Masse im Schwerpunkt konzentriert denkt zu:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{s}{g}} . \quad (3)$$

Die Schwingungsdauer (3) ist natürlich im allgemeinen von der Schwingungsdauer (2) verschieden. Man kann jedoch Gleichung (2) auch in folgender Form schreiben:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_r}{g}} \quad l_r = \frac{\Theta_A}{m \cdot s} . \quad (4)$$

Damit ist die reduzierte "Pendellänge" l_r eingeführt. Sie stellt diejenige Pendellänge dar, die ein mathematisches Pendel haben müsste, um mit der gleichen Schwingungsdauer wie das physikalische Pendel zu schwingen. Das physikalische Pendel verhält sich also so, als ob seine Gesamtmasse im Punkt A' - dem sogenannten Schwingungsmittelpunkt - vereint wäre, der auf der geradlinigen Verlängerung von $A - S$ im

Abstand l_r von A liegt. Lässt man nun das Pendel um eine zur ursprünglichen Achse parallele Achse durch A' schwingen, so beträgt die Schwingungsdauer T'

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{l_r'}{g}} \quad \text{mit} \quad l_r' = \frac{\Theta_{A'}}{m \cdot s'} \quad (5)$$

Es gilt $T' = T$, das heißt: vertauscht man bei einem physikalischen Pendel den Aufhängepunkt A mit dem dazugehörigen Schwingungsmittelpunkt A' , so ändert sich die Schwingungsdauer nicht (Reversionspendel). Zum Beweis wird gezeigt, dass $l_r' = l_r$.

Der STEINERsche Satz verlangt:

$$\Theta_A = \Theta_S + m \cdot s^2$$

$$\Theta_{A'} = \Theta_S + m \cdot s'^2$$

mit Θ_S = Trägheitsmoment um die Achse durch den Schwerpunkt S

Division durch $m \cdot s$ bzw. $m \cdot s'$ gibt mit (4) und (5)

$$l_r = \frac{\Theta_A}{m \cdot s} = \frac{\Theta_S}{m \cdot s} + s$$

$$l_r' = \frac{\Theta_{A'}}{m \cdot s'} = \frac{\Theta_S}{m \cdot s'} + s'$$

Andererseits folgt für l_r' aus der Figur: $l_r' = s' + s$. Der Vergleich mit der ersten von beiden Gleichungen ergibt die Beziehung

$$\frac{\Theta_S}{m \cdot s} = s' \quad \text{oder} \quad \frac{\Theta_S}{m \cdot s'} = s ,$$

woraus mit der zweiten Gleichung folgt: $l_r' = s + s'$.

Durchführung:

Die Schwingungsdauer des physikalischen Pendels wird bei verschiedenen Schneidenabständen gemessen. Eine Schneide bleibt fest (wenige cm vom Stabende). Die andere wird von Versuch zu Versuch verschoben, um die zwei jeweils dazugehörigen Schwingungsdauern werden gemessen (dabei ist je einmal die feste Schneide und einmal die verschobene Schneide Aufhängepunkt). Man trage die Abhängigkeit der Schwingungsdauer vom Schneidenabstand für beide Aufhängepunkte auf Millimeterpapier auf. Im Schnittpunkt der beiden Kurven sind die Schwingungsdauern für beide Aufhängepunkte gleich, ihr Abstand ist also die reduzierte Pendellänge l_r . Aus l_r und der dazugehörigen Schwingungsdauer T ist die Erdbeschleunigung zu berechnen.

Zur Orientierung wird anfangs der Schneidenabstand in 10 cm-Intervallen variiert. In der Nähe des somit grob ermittelten Schnittpunktes sind weitere Messungen vorzunehmen. Jede Beobachtung soll mindestens 50 Schwingungen umfassen und zur Bildung des Mittels 3 bis 5 mal wiederholt werden. Dabei muss die Zeitmessung besonders sorgfältig durchgeführt werden.

Mit der Amplitude der Pendelschwingung bleibe man unter 5° . (Im Ansatz war in Gl. (1) $\sin \varphi = \varphi$ gesetzt worden. Der dadurch verursachte Fehler in der Schwingungszeit beträgt bei Amplituden von 1° etwa 0,002%, 10° etwa 0,2%.)