Versuch 09 **Elastizitätsmodul** Raum F1-03

Aufgabe:
Bestimmung des Elastizitätsmoduls mehrerer Werkstoffe aus der Biegung zweiseitig gelagerter Stäbe (in N/mm^2).

Gundlagen:
Bei kleinen, elastischen Deformationen eines festen Körpers sind einwirkende Kraft und Verformung einander proportional (HOOKEsches Gesetz). Für die Zug- bzw. Druckbelastung gilt:

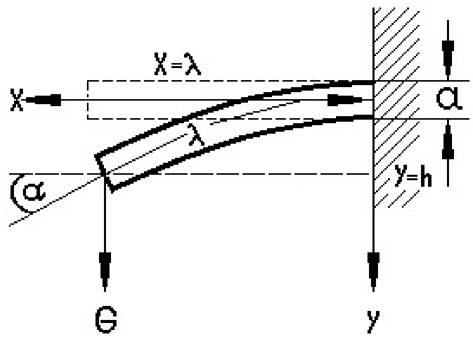
$$\varepsilon = \frac{1}{E}\cdot\sigma \qquad \text{oder} \qquad \sigma = E\cdot\varepsilon \tag{1}$$

$\varepsilon =$ Dehnung (relative Längenänderung $\varepsilon = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$)

$\sigma =$ Spannung (Kraft pro Flächeneinheit, Zug bzw. Druck)

Der Proportionalitätsfaktor $E = \frac{Spannung}{Dehnung}$ heißt Elastizitätsmodul und ist eine Materialkonstante.

Bei der Biegung eines Stabes werden die ''Fasern'' auf der konvexen Seite verkürzt. Die durch die Mitte gehende Schicht (sog. ''neutrale Faser'') behält ihre Länge. Für die Durchbiegung der neutralen Faser eines an einem Ende fest eingespannten und am anderen, freien Ende mit der Gewichtskraft G belasteten Stabes (Abb.1) gilt:



$$y = \frac{12\cdot G}{E\cdot a^3\cdot b}\left(\frac{\lambda x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) \tag{2}$$

$\lambda =$ Stablänge; $a =$ Stabdicke; $b =$ Stabbreite.
Die Senkung $y = h$ des Stabendes $x = \lambda$ ist also der angreifenden Gewichtskraft G proportional.

$$h = \frac{4\cdot\lambda^3}{E\cdot a^3\cdot b}\cdot G \tag{3}$$

Die Formeln (2) und (3) gelten nur unter den Voraussetzungen, dass die Durchbiegung klein ist und keine Scherung auftritt. Die Neigung $\tan\alpha$ des freien Endes $(x=\lambda)$ gegen die Horizontale folgt durch Differentiation aus der Gleichung (2)

$$\tan\alpha = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=\lambda} = \frac{6\cdot G}{E\cdot a^3\cdot b}\cdot\lambda^2 \tag{4}$$

Mit Gleichung (3) lautet (4):

$$\tan\alpha = \left(\frac{3}{2\lambda}\right)\cdot h \quad ; \quad h = \left(\frac{2\lambda}{3}\right)\cdot\tan\alpha \tag{5}$$

Wird Gleichung (5) in Gleichung (3) eingesetzt, so erhält man für den Elastizitätsmodul

$$E = \frac{6\cdot G\cdot\lambda^2}{a^3\cdot b\cdot\tan\alpha} \tag{6}$$

$$F = \frac{G}{2} \qquad\qquad F = \frac{G}{2}$$

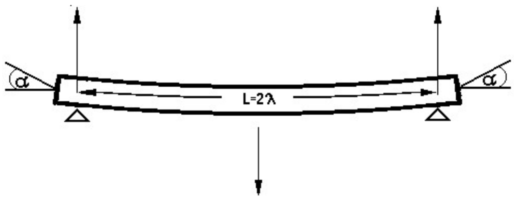


Abb. 2: $G = 2F$

Ein an seinen Enden auf zwei Schneiden lose aufliegender und in der Mitte mit der Gewichtskraft G belasteter Stab kann angesehen werden, als sei er an jedem Ende durch die Kraft F = G/2 hinaufgezogen und in der Mitte fest eingeklemmt. In Gl. (6) ist also G durch G/2 und λ durch L/2 zu ersetzen (L = Schneidenabstand)

$$E = \frac{3}{4} \cdot \frac{L^2}{a^3 \cdot b} \cdot \frac{G}{\tan\alpha} \tag{7}$$

Durchführung:
Weitaus genauer als eine Messung der Stabmitten-Durchsenkung ist die Bestimmung der Neigung $\tan\alpha$. Hierzu befestigt man (Abb. 3) zwei Spiegel an den Stabenden, die ein wenig gegeneinander geneigt sind. Das vom Lichtzeiger z kommende, nahezu parallele Licht wird vom Spiegel Sp_1 reflektiert, trifft dann den Spiegel Sp_2 und wird von hier aus zur Skala S reflektiert. Mit den Bezeichnungen der Abb.3 ist $\tan\alpha$ hinreichend genau gegeben durch die Beziehung

$$\tan\alpha = \frac{n}{4e + 2d} \tag{8}$$

n ist der durch die Belastung verursachte Ausschlag auf der Skala S.

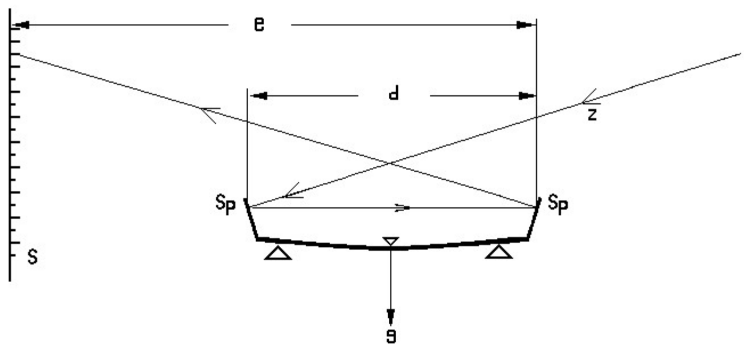


Abb. 3

Man belaste vor der Messung mit dem größten der nachher anzuwendenden Gewichtsstücke und prüfe, ob nach dem Entlasten die ursprüngliche Gestalt wieder entsteht; d. h. ob die Durchbiegung auch wirklich elastisch erfolgt.
Besonders sorgfältig ist die Stabdicke a zu messen, weil diese mit der dritten Potenz in die Bestimmungsgleichung eingeht (siehe Fehlerrechnung).

Literatur:
z.B. Gerthsen, Kneser, Vogel: Physik.