FAKULTÄT FÜR PHYSIK
Physikalisches Praktikum P1 für Physiker

Vorbereitungshilfe zum Versuch Elastizität

Zu Aufgabe 1 (Balkenbiegung, E-Modul):
Bei genügend kleiner Deformation (linearer elastischer Bereich) eines Körpers ist diese der einwirkenden Kraft proportional. Bei einheitlichem Querschnitt A über die Länge L und der in Längsrichtung einwirkenden Kraft F ist die Dehnung (bzw. Stauchung) $\Delta L/L = (1/E)\cdot(F/A)$. 1/E ist der Elastizitätskoeffizient. Sein Kehrwert E heißt E-Modul, *Elastizitätsmodul* oder *Young-Modul*.
Wird ein Stab (rechteckiger Querschnitt, Breite b, Dicke d, Länge L/2) an einem Ende (x=L/2) fest eingespannt und am anderen (x=0) mit der Kraft F/2 senkrecht zur Stabachse belastet, so biegt sich der Stab. Bei x = 0 ist die Krümmung Null und bei x=L/2 maximal, wie es den wirkenden Drehmomenten von 0 bzw. $(F/2)\cdot(L/2)$ entspricht.
Im Folgenden wird die Biegung durch das Eigengewicht vernachlässigt. Sie ist vergleichsweise gering, und es werden im Versuch ja auch nur Änderungen durch eine Zusatzkraft beobachtet. Die Kraft soll so klein sein, daß nicht nur der lineare elastische Bereich eingehalten wird, sondern es sollen auch alle üblichen Näherungen bei kleinen Winkeln gelten, nämlich Sehnenlänge ≅ Bogenlänge und $\alpha \cong \sin\alpha \cong \tan\alpha$.
Zu berechnen ist der ganze Biegewinkel α, zu dem alle Stabelemente der Länge dx am Ort x der unterschiedlichen Drehmomenten $(F/2)\cdot x$ entsprechende Beiträge dα liefern.
In der Mittelachse des Stabes verläuft die neutrale Faser (hier Ebene), die weder gedehnt noch gestaucht wird. Dort sei für die vertikale Achse y = 0. Die Stirnflächen des Stabelements sind um denselben Winkel dα gegeneinander geneigt, um den die Tangenten am Anfang und am Ende des Stabes gegeneinander gedreht sind. Eine zur neutralen Ebene parallele Schicht in diesem Stabelement (Breite b, Höhe dy, Länge dx+dl) im Abstand y von der neutralen Ebene ist um $dl = y \cdot d\alpha$ verlängert worden (verkürzt bei negativem y). Die zugehörige Kraft ist nach obigem elastischen Gesetz $dF = y \cdot d\alpha \cdot E \cdot b \cdot dy/dx$. Das entsprechende Drehmoment bezüglich y = 0 ist $dM = y \cdot dF$. Zur Dehnung (Stauchung) aller Schichten des Stabelements, die zur Biegung dα führte, bedarf es also eines Drehmoments M, das durch Integration über y von –d/2 bis +d/2 folgt,

$$M = \frac{E \cdot b \cdot d^3}{12} \cdot \frac{d\alpha}{dx}$$

Auf ein Stabelement an der Stelle x wirkt aber $M = (F/2) \cdot x$. Gleichsetzen ergibt die Biegung dα des Elements: $d\alpha = [6 \cdot F / (E \cdot b \cdot d^3)] \cdot x \cdot dx$ und durch Integration über x von 0 bis L/2 die Biegung α des ganzen Stabes:

$$\alpha = \frac{3 \cdot L^2 \cdot F}{4 \cdot E \cdot b \cdot d^3}$$

Die gleiche Formel gilt für die Kippung jedes der Enden des auf Schneiden im Abstand L aufgelagerten Stabes, der in der Mitte durch die Kraft F belastet wird.
Wenn der Abstand der an den Stabenden fast parallel zueinander montierten Spiegel auch L ist und der Schirm sich im Abstand l vom skalennahen Spiegel befindet, dann ergibt sich die Verschiebung v des ohne/mit Belastung F beobachteten Laserstrahls zu

$$v \approx 2 \cdot \alpha \cdot L + 4 \cdot \alpha \cdot (L+l).$$

Um das leicht einzusehen verfolge man den Lichtweg etappenweise, zunächst vom Laser über den skalennahen Spiegel zum skalenfernen Spiegel: hier beträgt die Auslenkung 2αL. Die Neigung dieses Spiegels (ebenfalls um α) addiert sich zum Einfallswinkel von 2α so dass die zweite Reflexion eine zusätzliche Auslenkung am Ort der Skala von 4α(L+l) gegen die „unbelastete“ Richtung bewirkt.

Zu Aufgabe 2 (Schallgeschwindigkeit, E-Modul):
In einem elastischen Stab (Querschnitt A, Dichte ρ) können sich elastische Longitudinalwellen ausbreiten. Die Auslenkung s einer Querschnittsfläche gegenüber dem spannungsfreien bzw. Ruhezustand ist sowohl orts(x)- als auch zeit(t)-abhängig, d.h. $s = s(x,t)$.
Ein Stabelement der (spannungsfreien) Länge Δx mit der Masse Δm wird betrachtet: Zur Zeit t gibt es einen Unterschied in den Auslenkungen der beiden Stirnflächen, d.h. $\partial s/\partial x$ ist ortsabhängig. Die zugehörige Kraft ist nach dem elastischen Gesetz

$$F = E \cdot A \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \cdot \Delta x.$$

Dieselbe Kraft bewirkt aber auch eine Beschleunigung des Stabelements gemäß

$$F = \Delta m \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \rho \cdot A \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \; .$$

Die resultierende Wellengleichung liefert die Ausbreitungsgeschwindigkeit $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

Zu Aufgabe 3 (Torsionsschwingungen, Schubmodul):
Ähnlich wie für die Dehnung gilt auch für die Scherung (Scherwinkel α) eines Körpers innerhalb eines beschränkten Bereichs ein lineares Gesetz: $\alpha = (1/G)\cdot(1/A)\cdot F$. Dabei ist A die Fläche, an der die Kraft F tangential angreift und G der Schubmodul.
Ein dünnwandiger Hohlzylinder (Länge L, Radius r, Wanddicke dr) wird durch das Drehmoment $dM = r\cdot dF$ um den Winkel φ verdrillt und dabei um den Winkel $\alpha = r \cdot \varphi/L$ geschert. Mit dem Scherungsgesetz folgt:

$$M = \frac{2\pi \cdot G \cdot \varphi \cdot r^3}{L} \cdot dr$$

und für den Vollzylinder mit Radius R durch Integration dann:

$$M = \frac{\pi \cdot G \cdot \varphi \cdot R^4}{2L}$$

Das resultierende Richtmoment $D^* = \pi\cdot G\cdot R^4/(2L)$ ist in die Differentialgleichung für Drehschwingungen:

$$\Theta\cdot\partial^2\varphi/\partial t^2 + D^*\varphi = 0 \quad \text{einzusetzen.}$$

Es folgt für die Kreisfrequenz: $\omega = \sqrt{\frac{D^*}{\Theta}}$

und für die leicht meßbare Schwingungsdauer: $T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{D^*}}$

Damit ergibt sich: $G = \frac{8\pi L}{R^4} \cdot \frac{\Theta}{T^2}$

Weil das Trägheitsmoment Θ_0 der Drehscheibe allein nicht einfach zu berechnen ist, werden durch Zusatzkörper Zusatzträgheitsmomente Θ_1 und Θ_2 erzeugt und die zu $\Theta_0 + \Theta_1$ und zu $\Theta_0 + \Theta_2$ gehörenden Schwingungsdauern T_1 und T_2 gemessen. Die Zusatzkörper haben zylindrische Gestalt, so daß Θ_1 und Θ_2 mit Hilfe des Steinerschen Satzes sehr einfach berechenbar sind. D^* wird dann aus der Differenz $\Delta\Theta$ der Trägheitsmomente (die Θ_0 nicht mehr enthält) und der Differenz ΔT^2 der zugehörigen Schwingungsdauerquadrate berechnet:

$$G = \frac{8\pi L}{R^4} \cdot \frac{\Delta\Theta}{\Delta T^2} \; .$$