FAKULTÄT FÜR PHYSIK
Physikalisches Praktikum P1 für Physiker

Vorbereitungshilfe zum Versuch Galvanometer

1. Die Schwingungsdifferentialgleichung des Galvanometers lautet:

$$\Theta\ddot{\varphi} + \rho\dot{\varphi} + D\varphi = GI_{ges} \qquad \ddot{\varphi} + \frac{1}{\Theta}\left(\rho + \frac{G^2}{R_G + R_a}\right)\dot{\varphi} + \frac{D}{\Theta}\varphi = \frac{G}{\Theta}I \qquad \ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0^2\,\varphi = \frac{G}{\Theta}I$$

Darin bedeuten:

φ	Drehwinkel
Θ	Trägheitsmoment des schwingenden Systems
ρ	mechanische Dämpfungskonstante (ohne elektrische Dämpfung)
D	Rückstellkonstante der Torsionsaufhängung
G	Galvanometerkonstante (= nAB = Gesamte Windungsfläche der Spule · Magnetfeldstärke)
I_{ges}	Summe von Meßstrom I und von induziertem Strom $I_{ind} = -(G/R)\dot{\varphi}$ $\quad mit \quad R = R_G + R_a$
R_G	Galvanometer-Widerstand
R_a	Widerstand im äußeren Schließungskreis
$\Theta\ddot{\varphi}$	Trägheitsdrehmoment
$\rho\dot{\varphi}$	Dämpfungsdrehmoment (ohne elektrische Dämpfung)
D φ	Torsionsdrehmoment
G I_{ges}	Gesamtes elektromechanisches Drehmoment

2. Der eingeschwungene Fall (d.h. $\dot{\varphi} = o$, $\ddot{\varphi} = 0$, Strom I):

$$\hat{\varphi} = \frac{G}{D}I = C_I\,I \qquad (C_I = \text{Statische Stromempfindlichkeit})$$

3. Der Einschwingvorgang für den stromlosen Fall (I = 0).

$\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$. Der Ansatz $\varphi = Ce^{\lambda t}$ liefert $\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$

$$\varphi(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \Rightarrow \varphi(0) = C_1 + C_2$$

$$\dot{\varphi}(t) = \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 t} \Rightarrow \dot{\varphi}(0) = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$$

3.1 Rückschwingen aus dem eingeschwungenen Fall mit Strom in die Ruhelage ohne Strom ($\varphi(0) = \hat{\varphi}$), $\dot{\varphi}(0) = 0$)

$$C_1 = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\hat{\varphi}; C_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\hat{\varphi}\ ; \quad \varphi(t) = \frac{\hat{\varphi}}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\lambda_1 e^{\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{\lambda_1 t}\right); \quad \dot{\varphi}(t) = \frac{\lambda_1\lambda_2\hat{\varphi}}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}\right)$$

3.1.1 Kriechfall $\beta^2 > \omega_0^2; \quad \gamma = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ reell; $\lambda_1 = -\beta + \gamma; \lambda_2 = -\beta - \gamma$

$$\varphi(t) = \hat{\varphi}\left(\frac{\beta}{\gamma}\sinh\gamma t + \cosh\gamma t\right)e^{-\beta t}; \quad \dot{\varphi}(t) = \hat{\varphi}\frac{-\omega_0^2}{\gamma}\sinh\gamma t\, e^{-\beta t}$$

3.1.2 Grenzfall $\beta = \omega_0; \quad \frac{1}{2\Theta}\left(\rho + \frac{G^2}{R_G + R_a}\right) = \sqrt{\frac{D}{\Theta}}; \quad aufgelöst: \quad R_{a,gr} = \frac{G^2}{2\sqrt{D\Theta} - \rho} - R_G$

Mit $\gamma \to 0$, *also* $\frac{\sinh\gamma t}{\gamma t} \to 1$ *und* $\cosh\gamma t \to 1$ folgt aus den Kriechfall-Formeln:

$$\varphi(t) = \hat{\varphi}(\beta t + 1)e^{-\beta t} = \hat{\varphi}(\omega_0 t + 1)e^{-\omega_0 t}; \quad \dot{\varphi}(t) = -\hat{\varphi}\omega_0^2 t e^{-\beta t}$$

3.1.3 Schwingfall $\omega_o^2 > \beta^2; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ reell; $\lambda_1 = -\beta + i\omega; \quad \lambda_2 = -\beta - i\omega$

$$\varphi(t) = \hat{\varphi}\left(\frac{\beta}{\omega}\sin\omega t + \cos\omega t\right)e^{-\beta t}; \quad \dot{\varphi}(t) = \hat{\varphi}\frac{-\omega_0^2}{\omega}\sin\omega t e^{-\beta t}$$

3.2 Einschwingen aus der Ruhelage nach einem 'Stoß' ($\varphi(0) = 0; \quad \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0$)

$$C_1 = \frac{\dot{\varphi}_0}{\lambda_1 - \lambda_2}; \quad C_2 = \frac{-\dot{\varphi}_0}{\lambda_1 - \lambda_2}; \quad \varphi(t) = \frac{\dot{\varphi}_0}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}\right); \quad \dot{\varphi}(t) = \frac{\dot{\varphi}_0}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\lambda_1 e^{\lambda_1 t} - \lambda_2 e^{\lambda_2 t}\right)$$

3.2.1 Kriechfall, wie unter 2.1.1

$$\varphi(t) = \dot{\varphi}_0\frac{1}{\gamma}\sinh\gamma t e^{-\beta t}; \quad \dot{\varphi}(t) = \dot{\varphi}_0\left(\cosh\gamma t - \frac{\beta}{\gamma}\sinh\gamma t\right)e^{-\beta t}$$

Maximal erreichte Amplitude? Dann ist ; $\dot{\varphi}(t) = 0 \Rightarrow \tanh\gamma t = \frac{\gamma}{\beta}$; $\sinh\gamma t = \frac{\gamma}{\omega_0}$

$$\varphi_{\max} = \dot{\varphi}_0\frac{1}{\omega_0}e^{-(\beta/\gamma)\operatorname{arctanh}(\gamma/\beta)}$$

3.2.2 Grenzfall, wie unter 2.1.1

$$\varphi(t) = \dot{\varphi}_0 t e^{-\beta t} \equiv \dot{\varphi}_0 t e^{-\omega_0 t}; \quad \dot{\varphi}(t) = \dot{\varphi}_0(1 - \beta t)e^{-\beta t} \equiv \dot{\varphi}_0(1 - \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}$$

$\varphi_{\max} = \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_0 e}(\dot{\varphi}(t) = 0$, wenn $\omega_0 t = 1)$

3.2.3 Schwingfall, wie unter 2.1.1

$$\varphi(t) = \dot{\varphi}_0\frac{1}{\omega}\sin\omega t e^{-\beta t}; \quad \dot{\varphi}(t) = \dot{\varphi}_0\left(\cos\omega t - \frac{\beta}{\omega}\sin\omega t\right)e^{-\beta t}$$

$$\varphi_{\max} = \dot{\varphi}_0\frac{1}{\omega_0}e^{-(\beta/\omega)\arctan(\omega/\beta)}$$

4. Der Einschwingvorgang im Stromfall (I≠0) aus der stromlosen Ruhelage ($\varphi(0)=0;\quad \dot{\varphi}(0)=0$)

Die Differentialgleichung und ihre Lösungen ergeben sich aus dem stromlosen Fall mit der Transformation $\varphi_I = \hat{\varphi} - \varphi_{I=0}$

4.1 Kriechfall (wie 3.1.1)

$$\varphi(t) = \hat{\varphi}\left(1 - \left(\frac{\beta}{\gamma}\sinh\gamma t + \cosh\gamma t\right)e^{-\beta t}\right); \qquad \dot{\varphi}(t) = \hat{\varphi}\frac{\omega_0^2}{\gamma}\sinh\gamma t e^{-\beta t}$$

4.2 Grenzfall (wie 3.1.2)

$$\varphi(t) = \hat{\varphi}\left(1 - (\omega_0 t + 1)e^{-\omega_0 t}\right); \qquad \dot{\varphi}(t) = \hat{\varphi}\omega_0^2 t e^{-\omega_0 t}$$

4.3 Schwingfall (wie 3.1.3)

$$\varphi(t) = \hat{\varphi}\left(1 - \left(\frac{\beta}{\omega}\sin\omega t + \cos\omega t\right)e^{-\beta t}\right); \qquad \dot{\varphi}(t) = \hat{\varphi}\frac{\omega_0^2}{\omega}\sin\omega t e^{-\beta t}$$

5. Einschwingen aus der Ruhelage nach ballistischer Erregung ($\varphi(0)=0\,,\quad \dot{\varphi}(0)=0$)

Stromstoß Q: Strom I(t) während der Zeit 0 bis τ ('Stoßdauer'). Differentialgleichung über die Stoßdauer integriert:

$$\dot{\varphi}(\tau) + 2\beta\,\varphi(\tau) + \omega_0^2\int_0^\tau \varphi(t)\,dt = \frac{G}{\Theta}\int_0^\tau I(t)\,dt\,.$$

Sei $\tau << \frac{2\pi}{\omega_0} \;\Rightarrow\; \varphi(\tau) \cong 0\,; \quad \dot{\varphi}(\tau) \cong \frac{G}{\Theta}\int_0^\tau I(t)\,dt = \frac{G}{\Theta}Q$

5.1 Kriechfall (wie 3.2.1)

$$\varphi_{\max} = \frac{G}{\Theta}\frac{Q}{\omega_0}e^{-(\beta/\gamma)\operatorname{arctanh}(\gamma/\beta)} \cong \frac{G}{\Theta}\frac{Q}{2\beta} \cong \frac{R_G + R_a}{G}Q \quad \text{für } \beta >> \omega_0$$

5.2 Grenzfall (wie 3.2.2)

$$\varphi_{\max} = \frac{G}{\Theta}\frac{Q}{\omega_0 e}$$

5.3 Schwingfall (wie 3.2.3)

$$\varphi_{\max} = \frac{G}{\Theta}\frac{Q}{\omega_0}e^{-(\beta/\omega)\arctan(\omega/\beta)} \cong \frac{G}{\Theta}\frac{Q}{\omega_0} \quad \text{für } \beta << \omega_0$$

(W. Jüngst, 3/85)